

Binární relace v množině, vlastnosti binárních relací, ekvivalence, uspořádání.

Binární relace v množině M je libovolná podmnožina kartézského součinu $M \times M$.

Znázornění binárních relací

Kartézský graf relace R – sestrojíme dvě na sebe kolmé přímky x, y (vodorovnou a svislou). Na vodorovnou přímku (osu) znázorníme pomocí bodů všechny prvky množiny, z níž vybíráme první složky dvojic, na svislou přímku (osu) znázorníme pomocí bodů všechny prvky množiny, z níž vybíráme druhé složky dvojic. (Obvykle jsou sousední body na obou osách od sebe stejně vzdáleny.) Uspořádanou dvojici $[a, b] \in R$ znázorníme bodem, který je průsečíkem dvou přímek procházejících body a, b a rovnoběžných po řadě se svislou a vodorovnou osou.

Uzlový graf relace R v množině M - v rovině znázorníme pomocí bodů (tzv. uzlů) všechny prvky množiny M (pokud bychom znázorňovali relaci z množiny A do množiny B , pak znázorníme všechny prvky sjednocení množiny A a B). Uspořádanou dvojici $[a, b] \in R$ znázorníme pomocí šipky (tzv. orientované hrany), která vychází z uzlu a a směřuje do uzlu b . V případě, že $a = b$, nazýváme šipku smyčkou. Pokud sou v relaci R dvojice $[a, b]$ a $[b, a]$, znázorníme je “dvojšipkou” (tzv. neorientovanou hranou).

Vlastnosti relací v množině M

Binární relace R v množině M je **reflexivní** právě tehdy, když $(\forall x \in M) ([x, x] \in R)$, tzn. obsahuje všechny uspořádané dvojice $[x, x]$, kde $x \in M$.

Binární relace R v množině M je **antireflexivní** právě tehdy, když $(\forall x \in M) ([x, x] \notin R)$, tzn. neobsahuje žádnou uspořádanou dvojici typu $[x, x]$, kde $x \in M$.

Binární relace R v množině M je **symetrická** právě tehdy, když $(\forall x, y \in M) ([x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R)$, tzn. s každou uspořádanou dvojicí $[x, y]$ obsahuje i dvojici $[y, x]$.

Binární relace R v množině M je **antisymetrická**, právě tehdy, když $(\forall x, y \in M) ((x \neq y \wedge [x, y] \in R) \Rightarrow [y, x] \notin R)$, tzn. s žádnou dvojicí $[x, y]$ různých prvků neobsahuje dvojici $[y, x]$.

Binární relace R v množině M je **tranzitivní** právě tehdy, když $(\forall x, y, z \in M) ([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R \Rightarrow [x, z] \in R)$, tzn. jestliže se v relaci vyskytují „na sebe navazující dvojice“, pak musí relace obsahovat i dvojici, jejíž první složkou je 1. složka z první dvojice a druhou složkou je 2. složka z druhé dvojice.

Binární relace R v množině M je **souvislá** právě tehdy, když $(\forall x, y \in M) (x \neq y \Rightarrow ([x, y] \in R \vee [y, x] \in R))$, tzn. každé dva různé prvky z množiny M musí být „spolu v relaci“.

Binární relaci U v množině M nazýváme **ostré lineární uspořádání** v M , právě když je antisymetrická, tranzitivní, souvislá a antireflexivní.

Binární relaci R v množině M nazýváme **relací ekvivalence** na M , právě když je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Každá relace ekvivalence na množině M vytváří **rozklad** této množiny, což je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny M takových, že průnik každých dvou tříd je prázdná množina a sjednocení všech tříd rozkladu tvoří množinu M .

Jinak lze také říci, že říci, že **rozklad** množiny M je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny M takových, že každý prvek množiny M patří právě do jedné z těchto tříd.

Cvičení

1. Rozhodněte, jaké vlastnosti mají následující binární relace v množině $M = \{a, b, c, d\}$

$$R_1 = \{[c,b], [b,c], [a,a], [b,b], [c,c], [d,d]\}$$

$$R_2 = \{[a,b], [c,d], [a,a], [b,b]\}$$

$$R_3 = \{[a,b], [d,c], [b,d], [a,c], [a,d], [b,c]\}$$

$$R_4 = \{[c,b], [b,c], [b,a]\}$$

$$R_5 = \{[a,a], [b,b], [c,c], [c,b], [b,c], [b,a], [a,b], [a,c], [c,a], [d,d]\}$$

$$R_6 = \{[c,a], [d,b]\}$$

$$R_7 = \{[a,a]\}$$

2. Zapište aspoň jednu neprázdnou binární relaci v množině $A = \{1, 2, 3\}$, která je

- a) reflexivní b) symetrická c) tranzitivní d) antireflexivní
e) antisymetrická f) souvislá g) symetrická a není tranzitivní

V každém případě určete, jaké další vlastnosti má zvolená relace.

3. Rozhodněte o vlastnostech následujících relací:

- a) rovnost v množině přirozených čísel
b) relace „být menší“ v množině přirozených čísel
c) relace „být podmnožinou“ v libovolném systému množin
d) kolmost přímek v rovině
e) rovnoběžnost přímek v rovině
f) shodnost trojúhelníků v rovině
g) relace „být sourozencem“
h) relace „být otcem“ ve vaší rodině
i) relace „narodit se ve stejném měsíci“ v množině lidí v této místnosti
j) relace „dávat stejný zbytek při dělení číslem 3“ v množině přirozených čísel.

Pokud je některá z výše uvedených relací relace ekvivalence, určete příslušný rozklad množiny.

Uvažujte další relace a určujte jejich vlastnosti.