

IMAp07 DIDAKTIKA MATEMATIKY

P 4 - TEXT K PŘEDNÁŠCE

Růžena Blažková

Které pojmy si zopakujeme:

Binární algebraická operace

Binární algebraická operace v množině M je zobrazení z množiny $M \times M$ do množiny M .

Pro naše potřeby budeme pracovat s množinou všech přirozených čísel, tedy se zobrazením z množiny $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do množiny \mathbb{N} .

Pokud uvažujeme množinu všech přirozených čísel s nulou, \mathbb{N}_0 , potom vybereme uspořádanou dvojici čísel, např. 4, 7 a nějakou operací jí přiřadíme výsledek operace, který je z množiny \mathbb{N}_0 . Někdy jej mohou najít, někdy jej nenajdu, například:

$$4 + 7 = 11 \quad 11 \text{ je přirozené číslo}$$

$$4 - 7 = -3 \quad -3 \text{ není přirozené číslo}$$

$$4 \cdot 7 = 28 \quad 28 \text{ je přirozené číslo}$$

$$4 : 7 = ? \quad \text{nenajdu přirozené číslo, které by bylo výsledkem této operace}$$

Obecně jste se seznámili s vlastnostmi binárních algebraických operací:

ND, A, K, EN, EI, ZR

Umíte je formulovat pomocí kvantifikátorů, v didaktice se naučíme je účelně využívat.

Na prvním stupni základní školy se děti učí operace sčítání, odčítání, násobení, dělení v oboru přirozených čísel. Pokud tyto operace zvládnou, usnadní jim to zvládnutí učiva matematiky v dalších ročnících ZŠ, ve složitějších matematických tématech.

SČÍTÁNÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL

Pamětné sčítání

Sčítání přirozených čísel vychází ze sčítání čísel kardinálních (viz předcházející ročníky studia a seminář DM): $|A| + |B| = |A \cup B|$, za předpokladu, že $A \cap B = \emptyset$.

Pro přirozená čísla: $a + b = c$

Názvy čísel: sčítanec, sčítanec, součet

Vlastnosti operace sčítání v množině přirozených čísel:

Když sečteme libovolná dvě přirozená čísla, vždy najdeme výsledek v množině přirozených čísel, sčítání přirozených čísel je **neomezeně definované**.

Některé příklady jsou pro děti snazší, některé obtížnější, např. který z příkladů se dětem počítá lépe: $2 + 8$ nebo $8 + 2$? Asi $8 + 2$. Sčítance můžeme zaměnit, součet se nezmění. Sčítání přirozených čísel je **komutativní**. Pro děti používáme pojmu „zaměnit“ (lépe než „přehodit“).

Komutace - záměna

$$a + b = b + a$$

Když sčítáme více čísel, snažíme se je seskupit tak, aby součty pro nás byly jednodušší, např. příklad $12 + 15 + 8$ pro někoho by asi jednodušší bylo $12 + 8 + 15$. Využijeme tedy jednak záměnu sčítanců $15 + 8 = 8 + 15$ a potom seskupení - sdružení sčítanců. Sčítání přirozených čísel je **asociativní**. Sčítance můžeme sdružovat, součet se nezmění (nikoliv přehazování závorek).

Asociace – sdružení

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Přičteme-li k libovolnému přirozenému číslu číslo nula, součet se nezmění, tj. nula je **neutrální prvek pro sčítání**:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Další vlastnosti operace sčítání přirozených čísel nemá (např. inverzní prvek k číslu 5 by byl (-5), což není číslo přirozené, základní rovnice, např. $5 + x = 1$ nemá řešení).

Množina přirozených čísel s operací sčítání tvoří komutativní pologrupu s neutrálním prvkem.

Metodický postup

1. Sčítání v oboru do 5 - viz seminář. (Od dramatizace k abstrakci, dva stupně abstrakce)
2. Sčítání v oboru do 10 – viz seminář.
 - Sledujeme náročnost příkladů pro děti, např. $3 + 7$ nebo $7 + 3$.
3. Sčítání v oboru do 20 – bez přechodu přes základ 10, s přechodem přes základ 10 - viz seminář.
 - Při sčítání s přechodem přes základ 10 vnímáme, jak děti počítají, jak čísla rozkládají, jaké mají vlastní přístupy. Například $7 + 8$ některé děti rozkládají vzhledem k číslu 5:
 $7 = 5 + 2$, $8 = 5 + 3$, $5 + 5 = 10$, $2 + 3 = 5$, $7 + 8 = 15$.
 - Snažíme se, aby děti nepočítaly po jedné. Přispívá to chybám typu, například: $9 + 4$:
počítají 9, 10, 11, 12 $9 + 4 = 12$

4. Sčítání a odčítání v oboru do 100

a) Sčítání desítek příklady typu $30 + 40$

Vysvětlujeme:

- buď na základě analogie: $3 + 4 = 7$
Slovy: 3 desítky plus 4 desítky rovná se 7 desítek
Zápis: $30 + 40 = 70$

- nebo na základě názoru – využíváme k tomu pomůcky: počítadlo, stovková tabule, předměty balené po deseti, svazky tyčinek nebo brček po deseti, peněžní model, Montessori banka, číselná osu, pokud ji děti správně chápou.

b) Sčítání čísla dvojciferného a jednociferného

Používáme metodickou řadu příkladů tak, aby v následujícím kroku byl jen jeden nový jev a aby bylo možno použít jevů z předcházejících příkladů, například.:

$$60 + 7 \quad 62 + 7 \quad 63 + 7 \quad 65 + 7$$

- Sledujeme, zda děti využívají rozkladů a jakých. Součet $65 + 7$ se většinou uvádí rozkladem čísla 7: $65 + 7$
 $5 \ 2$

$$65 + 5 = 70, \quad 70 + 2 = 72$$

Avšak některé děti počítají: $5 + 7 = 12$, $60 + 12 = 72$

- Vnímáme příčiny chyb typu $2 + 50 = 70$. V tomto případě je příčinou nepochopení poziční desítkové soustavy (jednotky, desítky).

c) Pamětné sčítání dvojciferných čísel

Nejprve připomeneme sčítání desítek, příklady typu $40 + 30$

Metodická řada postupuje v tomto pořadí příkladů:

$$46 + 30 \quad 46 + 32 \quad 46 + 34 \quad 46 + 38.$$

Těžištním příkladem je sčítání bez přechodu přes základ 10, příklad $46 + 32$.

Zde mohou děti rozkládat ob sčítance a počítat: $40 + 30 = 70$, $6 + 2 = 8$, $46 + 32 = 78$.

Ve všech příkladech na sčítání i na odčítání bez přechodu je tento rozklad možný.

Problém nastane až při odčítání s přechodem, například $72 - 28$, kdy děti počítají:

$$70 - 20 = 50, \quad 2 - 8 \text{ nejde, tak } 8 - 2 = 6, \quad 72 - 28 = 56.$$

V této fázi výuky bývá již obtížné naučit děti jiný rozklad, než na který byly po celou dobu zvyklé. Proto je vhodnější již u sčítání bez přechodu učit děti rozkládat jen jednoho sčítance, a to se potom vyplatí při odčítání s přechodem přes základ 10.

Postup: $46 + 32$ Počítáme: $46 + 30 = 76$, $76 + 2 = 78$
 $30 \ 2$

$$\begin{array}{r} 46 + 34 \\ 30 \quad 4 \end{array}$$

Počítáme: $46 + 30 = 76$, $76 + 4 = 80$

$$\begin{array}{r} 46 + 38 \\ 30 \quad 8 \end{array}$$

Počítáme: $46 + 30 = 76$, $76 + 8 = 84$

Avšak respektujeme vlastní strategie dětí, pokud si vytvoří vlastní postupy, které jsou matematicky správné a dají se využít i u vícečíslicových čísel, například:

$$\begin{array}{r} 46 + 38 \\ 4 \quad 34 \end{array}$$

Počítají: $46 + 4 = 50$, $50 + 34 = 84$

$$\begin{array}{r} 46 + 38 \\ 44 \quad 2 \end{array}$$

Počítají: $38 + 2 = 40$, $44 + 40 = 84$

V rámci online výuky jsme se setkali se zásahy dospělých, které dětem přivodily chyby.

Příběh 1. Paní učitelka přinesla práci Adélky, která počítala: $42 + 25 = 76$, $57 + 29 = 167$, později $57 + 29 = 68$.

Maminka ji naučila postup sčítání písemného, kdy se začíná počítat od jednotek, avšak v řádku, nikoliv pod sebou. Adélka tedy nejprve sečetla jednotky a zapsala na první místo (na místo desítek), potom sečetla desítky a zapsala na druhé místo (na místo jednotek).

Příběh 2. David počítal příklad $57 + 3 = 510$. Dědeček ho naučil $3 + 7 = 10$ jako při písemném sčítání, avšak už jej neupozornil na přechod mezi jednotkami a desítkami. David tedy zapsal součet 10 a 5 opsal.

Dětem pak není nic platné, že zvládly dobře sčítání do dvaceti, když je neumí uplatnit správně v dalším učivu.

Je třeba si uvědomit, že dospělí jsou zpravidla o několik úrovní dále než děti a že zapomínají, jak se jednotlivé části učiva vyvozují a jak na sebe navazují.

Podrobný výklad pamětného sčítání se vyvozuje na dvojciferných číslech, na sčítání vícečíslicových čísel se zobecňuje. Avšak z paměti se sčítají pouze taková čísla, která mají nejvýše dvě nenulové číslice (například $350 + 65$, $5600 + 2000$, atd.). Ostatní čísla se sčítají písemně.

Písemné sčítání

Písemné a pamětné sčítání se neliší tím, že se něco píše a něco počítá z paměti. Jak u pamětného, tak u písemného sčítání využíváme paměť i píšeme.

Rozdíl je v tom, že u pamětného sčítání začínáme počítat od nejvyššího řádu, u písemného sčítání začínáme počítat od jednotek.

Písemné sčítání se vyvozuje na sčítání dvojciferných čísel, na víceciferná čísla se pak zobecní.

Uvědomme si, že algoritmus je přesný předpis provádění činností. Pokud dětem zavedeme přesné algoritmy počítání operací s přirozenými čísly, děti se je snadněji naučí a docení to.

a) Sčítání bez přechodu přes základ 10

$$\begin{array}{r} 45 \\ \underline{23} \\ 68 \end{array}$$

Elementární kroky: $3 + 5 = 8$

$$2 + 4 = 6$$

Zkouška správnosti se provádí záměnou sčítanců: $\begin{array}{r} 23 \\ \underline{45} \\ 68 \end{array}$

Vzhledem k tomu, že sčítání je komutativní, bylo by možné počítat i $5 + 3$, $4 + 2$. Avšak algoritmus je přesný předpis a v budoucnu budeme učit děti písemné odčítání, kde tento postup při odčítání a přechodem přes základ možný nebude, proto je vhodnější už u sčítání dodržovat stejný postup.

b) Sčítání s přechodem přes základ 10

$$\begin{array}{r} 48 \\ \underline{27} \\ 75 \end{array}$$

Elementární kroky: $7 + 8 = 15$, 5 zapíšeme pod jednotky, 1 desítku přičteme k desítkám: $1 + 2 = 3$, $3 + 4 = 7$

Zkouška správnosti: $\begin{array}{r} 27 \\ \underline{48} \\ 75 \end{array}$

Zde by bylo možné také počítat $2 + 4 + 1$, avšak u odčítání tento postup není možný, proto dodržujeme přesný postup, který je uplatnitelný vždy.

Jaké problémy můžeme očekávat?

- Sčítání s přechodem: 29
 $\underline{37}$
 516

Nerespektování přechodu: 29
 $\underline{37}$
 56

-

- Sečtení všech čísel bez ohledu na řády: 29
 $\underline{37}$
 $21 \quad (7 + 9 + 3 + 2)$

ODČÍTÁNÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL

Pamětné odčítání

Odčítání přirozených čísel je definováno jako inverzní operace je sčítání, tj. jestliže pro přirozená čísla a, b platí $a + b = c$, pak existují operace inverzní: $c - a = b, c - b = a$.

Odčítání není v množině přirozených čísel neomezeně definované (nemůžeme odečíst $4 - 6$, aby rozdíl byl přirozené číslo), tedy nemá žádné další vlastnosti.

Názvy čísel: $a - b = c$

menšenec menšitel rozdíl

Odčítání souvisí s ubíráním, oddělováním, zmenšováním

Metodický postup

1. **Odčítání v oboru do 5** – od dramatizace k abstrakci

2. **Odčítání v oboru do 10** sledujeme obtížnost příkladů: $8 - 6, 8 - 2$

varujeme se odčítání po jedné, kdy děti počítají, např.

$9 - 4$: 9, 8, 7, 6, $9 - 4 = 6$

- 3. Odčítání v oboru do 20** bez přechodu přes základ 10, např. $19 - 7$
s přechodem před základ 10, např. $17 - 9$.
vše viz seminář

Pozor na rozklady: $16 - 9$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 3 \end{array}$$

Některé děti rozkládají menšence a odečítají od 10: $16 - 9$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 6 \end{array}$$

Počítají: $10 - 9 = 1$, $6 + 1 = 7$, $16 - 9 = 7$

4. Odčítání v oboru do 100

a) Odčítání násobků deseti $70 - 30 = 40$

- Analogie $7 - 3 = 4$, $70 - 30 = 40$
- Názor - pomůcky – viz sčítání

b) Odčítání jednociferného čísla od dvojciferného

$$\begin{array}{r} 46 - 6 \\ 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 46 - 4 \\ 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 40 - 6 \\ 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 42 - 6 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 4 \end{array}$$

c) Odčítání dvojciferných čísel

$$\begin{array}{r} 70 - 30 \\ 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 76 - 30 \\ 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 76 - 32 \\ 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 70 - 32 \\ 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 74 - 38 \\ 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ 8 \end{array}$$

Pokud je třeba, rozkládáme pouze jedno číslo, zpravidla menšitele. Sledujeme však vlastní strategie dětí. Např. $74 - 38$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 34 \end{array}$$

Nebo obě čísla zmenší o 4 a počítají $70 - 34$

Problémy při pamětném odčítání:

- Nechápu význam operace odčítání ani význam jednotlivých čísel.
- Odčítají po jedné, rozdíl je o jedna vyšší než správný rozdíl.
- Nechápu desítkovou soustavu, počítají $80 - 2 = 60$, $54 - 2 = 34$
- Při odčítání s přechodem přes základ 10 odčítají neustále od většího čísla menší bez ohledu, zda je v menšenci nebo v menšiteli: $62 - 38 = 36$ ($6 - 3$, $8 - 2$).

Písemné odčítání

Podobně jako u algoritmu písemného sčítání je třeba přesně postupovat při písemném odčítání. V poslední době lze nalézt v učebnicích nebo dalších materiálech různé postupy (např. odčítání „shora“), avšak pro děti je vhodné zavést takový algoritmus, který je platný pro všechna čísla, i pro čísla s nulami. Tento algoritmus se opírá o tzv. „dočítání“.

a) Písemné odčítání bez přechodu přes základ 10

$$\begin{array}{r} 79 \\ - 45 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 79 \\ - 45 \\ \hline 34 \end{array}$$

Elementární kroky: $5 + ? = 9$ $5 + 4 = 9$
 $4 + ? = 7$ $4 + 3 = 7$

Zkouška: 34
 45
 79

b) Písemné odčítání s přechodem přes základ deset

Písemné odčítání s přechodem přes základ deset se opírá o větu: Rozdíl se nezmění, když menšence i menšitele zvětšíme o totéž číslo.

Například: $8 - 2 = 6$
 $18 - 12 = 6$
 $10 - 4 = 6$, atd.

Tuto skutečnost využíváme při odčítání s přechodem přes základ 10, tak že menšence i menšitele zvětšíme o 10, ale menšence o 10 jednotek a menšitele o jednu desítku. Protože deset jednotek je jedna desítka, tak toho můžeme využít.

$$\begin{array}{r} 72 \\ - 26 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 72 \\ - 26 \\ \hline 46 \end{array}$$

Elementární kroky: $6 + ? = 2$ nemá řešení, proto přidáme k menšenci 10 jednotek:

$$6 + ? = 12 \quad 6 + 6 = 12$$

6 zapíšeme pod jednotky a jednu desítku přičteme k menšiteli:

$$2 + 1 = 3, \quad 3 + ? = 7 \quad 3 + 4 = 7$$

Zkouška: 46
26
72

Poznámka: Postupy využívající „půjčování“ jsou nevěrohodné. Zamyslete se, odkud si půjčujete a kam to vracíte?

c) Čísla s nulami

Pokud jsou v menšenci nebo v menšiteli na některých řádech nuly, zacházíme s nulou jako s každým jiným přirozeným číslem.

$$\begin{array}{r} 80 \\ -34 \\ \hline 46 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 84 \\ -50 \\ \hline 34 \end{array}$$

Počítáme: $4 + ? = 10$ $4 + \mathbf{6} = 10$, $1 + 3 = 4$ $4 + ? = 8$ $4 + \mathbf{4} = 8$
 $0 + ? = 4$ $0 + \mathbf{4} = 4$ $5 + ? = 8$ $5 + \mathbf{3} = 8$