IMAp07 DIDAKTIKA MATEMATIKY

P 9 - TEXT K PŘEDNÁŠCE

Závislosti, vztahy

Růžena Blažková

Závislosti a jejich vlastnosti

Žáci popisují jednoduché závislosti z praktického života,

doplňují tabulky, schémata, čtou a sestavují jednoduché tabulky

orientují se v jednoduchých grafech.

Propedeutika pojmu funkce. Rozvoj funkčního myšlení

Rozvoj funkčního myšlení

Pod pojmem funkční myšlení rozumíme schopnost posuzovat jevy v jejich změnách, sledovat příčiny těchto změn a umět je popsat.

a) u početních operací sledovat změny výsledků operace na změnách veličin do operace vstupujících
b) při řešení konstrukčních úloh umět stanovit závislost výsledku konstrukce na změnách velkosti nebo polohy zadaných prvků
c) při sledování závislostí umět rozhodnout, zda mezi sledovanými jevy existuje vztah, který by bylo možné popsat kvantitativně
d) umět popsat funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem
e) správně chápat definiční obory a obory hodnot daných funkcí
f) umět vyjádřit vlastnosti daných funkcí
g) umět číst grafy
h) umět zobecňovat kvantitativní vztahy.

Závislosti kolem nás

- závislost úspěchu ve škole na kvalitě přípravy
- růst rostlin v závislosti na množství vody při zalévání
- výše mzdy v závislosti na pracovním výkonu

- cena nákupu zboží v závislosti na jeho množství
- změna výšky a hmotnosti člověka v závislosti na jeho věku
- změna délky dne v závislosti na ročním období
- změna teploty ovzduší v závislosti na denním období
- spotřeba energií v domácnosti (voda, plyn, elektrická energie) v průběhu roku
- rozpočet domácnosti
- závislost spotřebovaných potravin na počtu osob
- změny kurzovních lístků
- poštovní poplatky
- poplatky za telefonní hovory u různých operátorů
- závislost ujeté dráhy na době jízdy při stálé rychlosti
- závislost doby jízdy na rychlosti při projetí určité dráhy
- výhodnost nákupů v akcích, výhodnost množstevních slev
- práce s jízdními řády

Přitom sledujeme, jak se mění jedna veličina v závislosti na druhé a jak je možné matematicky závislost vyjádřit, např.

- cena zakoupeného zboží závisí na jeho množství, při stanovené ceně za 1 kus či 1 kg.
- vzdálenost ujetá vozidlem závisí na době, po kterou vozidlo jede, při stálé rychlosti
- délka dne během roku závisí na ročním období,
- teplota ovzduší během dne závisí na denní době,
- čas potřebný k ujetí určité vzdálenosti závisí na rychlosti pohybu, atd.

Při provádění operací s čísly sledujeme, jak se mění výsledek operace v závislosti na změnách čísel vstupujících, např.:

jak se mění součet, když oba sčítance zvětšíme o jednu: $2 + 3 = 5$

$3 + 4 = 7$

$4 + 5 = 9$ atd.

jak se mění rozdíl, jestliže menšence i menšitele zvětšíme o stejné číslo:

$5 - 3 = 2$

$6 - 4 = 2$

$7 – 5 = 2$

$15 – 13 = 2$ atd.

jak se mění součin, když oba činitele zvětšíme o jednu: $1 . 2 = 2$

$2 . 3 = 6$

$3 . 4 = 12$

4 . 5 = 20

5 . 6 = 30 atd.

jak se mění podíl, když zvětšíme dělence i dělitele dvakrát: 6 : 2 = 3

12 : 4 = 3

24 : 8 = 3 atd.

3. Při řešení konstrukčních úloh sledujeme, jak se mění výsledek úlohy na změnách zadaných údajů. I u jednoduchých konstrukcí, které realizujeme na 1. stupni ZŠ můžeme poukázat na závislost výsledku konstrukce na změnách zadaných údajů.

4. Sledujeme, zda mezi změnami veličin existuje určitý vztah, který je možno matematicky popsat a pokud existuje, snažíme se jej odhalit. Na 1. stupni ZŠ jde zejména o vztah přímé úměrnosti.

5. Údaje ze sledovaných závislostí zapisujeme do tabulek nebo je znázorňujeme pomocí grafů. Porovnáváme, jakou informaci můžeme vyčíst z tabulky, jakou z grafu.

6. Sledujeme definiční obory závislostí, uvědomujeme si, že na 1. stupni ZŠ je zpravidla definičním oborem i oborem hodnot množina všech přirozených čísel.

Přímá úměrnost

Propedeutika přímé úměrnosti vychází z výuky násobení, kdy údaje zapsané v tabulce usnadní sledování funkčních vztahů.

Př. Jedna tyčinka stojí 6 Kč. Zapište do tabulky kolik zaplatíme za 2, 3, 4, … tyčinek.

Počet tyčinek (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kč (y)	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60

V tabulce pozorujeme:

a) **Kolikrát** se **zvětší** číslo v prvním řádku, **tolikrát** se **zvětší** číslo ve druhém řádku.
b) Číslo ve druhém řádku získáme tak, že číslo v prvním řádku násobíme stále stejným číslem.

Funkce o rovnici $y = k \, . \, x$ se nazývá funkce přímé úměrnosti. Jejím grafem je přímka procházející počátkem (v případě, že definičním oborem funkce je množina všech reálných čísel). Funkce $y = k \, . \, x$ je pro $k>0$ rostoucí, pro $k<0$ klesající a pro $k = 0$ konstantní.

V konkrétních případech může být grafem funkce polopřímka, úsečka nebo množina izolovaných bodů, které leží v přímce. Tak by tomu bylo v našem případě, protože můžeme koupit jen celé tyčinky - nelze koupit jen část tyčinky.

Graf přímé úměrnosti: Souřadná soustava (kartézská), počátek souřadné soustavy, osy, měřítko na osách, jednotka. Souřadnice bodu v souřadné soustavě.

Nepřímá úměrnost

V běžném životě se děti setkávají s nepřímou úměrností např. při dělení bonbónů. Jestliže je v sáčku např. 24 bonbónů, tak dvě děti dostanou při spravedlivém dělení každý 12 bonbónů, ale 6 dětí dostane při spravedlivém dělení každý jen 4 bonbóny.

Jestliže chceme překonat určitou vzdálenost např. 60 km, tak při chůzi pěšky půjdeme asi 15 hodin (půjdeme-li průměrnou rychlostí 4 km za 1 hodinu), při jízdě na kole urazíme tuto vzdálenost např. 4 hodiny (při průměrné rychlosti 15 km za 1 hodinu) a při jízdě automobilem ujedeme tuto vzdálenost za 1 hodinu (nebo i méně).

Př. Obsah obdélníku je 36 cm^2. Sledujte, jak se mění jeho šířka v závislosti na změně jeho délky (pracujeme pouze s přirozenými čísly, avšak rozměry obdélníku mohou být vyjádřeny jakýmkoliv kladným reálným číslem).

Délka (cm	1	2	3	4	6	9	12	18	36
Šířka (cm)	36	18	12	9	6	4	3	2	1

V tabulce pozorujeme:

a) **Kolikrát** se **zvětší** číslo v prvním řádku, **tolikrát** se **zmenší** číslo ve druhém řádku.
b) Číslo ve druhém řádku získáme tak, že stále stejné číslo dělíme číslem v prvním řádku.
c) Součin čísel v prvním i ve druhém řádku je stále stejné číslo.

Funkce o rovnici $y = \frac{k}{x}$ pro $x \neq 0$ $k \neq 0$ se nazývá funkce nepřímé úměrnosti. Jejím grafem je rovnoosá hyperbola.

ROVNOST, ROVNICE, NEROVNOST, NEROVNICE

Rovnost

$a = b$

Binární relace, která je reflexivní, symetrická, tranzitivní, je to relace ekvivalence. S rovností čísel se žáci setkávají od prvního ročníku ZŠ.

Rovnice

Z hlediska výrokové logiky je rovnice výroková forma, jejíž obor pravdivosti hledáme. Vybíráme čísla z definičního oboru a hledáme takové, pro které dostaneme pravdivý výrok.

Z hlediska algebraického je rovnice zápis rovnosti dvou výrazů, z nichž alespoň jeden obsahuje neznámou. Určitou posloupností kroků hledáme číslo, pro které, když dosadíme za neznámou, dostaneme rovnost výrazů.

Úlohy, které jsou propedeutikou rovnic, se ve školské matematice vyskytovaly vždy. Forma zadání nebo zápisu je různá.

Např.

1. Myslím si číslo, když k němu přičtu 5, dostanu 12. Které číslo si myslím?
2. ? + 5 = 12
3. $\square$ + 5 = 12
4. x + 5 = 12
5. Znázornění na rovnoramenných vahách (tzv. váhové rovnice)
6. Znázornění na houpačce

Možnosti řešení na prvním stupni ZŠ:

- Experiment, hledání čísla, pro které nastane rovnost.
- Názor – znázornění na misce, vahách, houpačce apod.
- Z vlastností početních operací (vztah mezi sčítáním a odčítáním).
- Jestliže platí, např. $3 + 5 = 8$
  $5 + 3 = 8$
  $8 - 3 = 5$
  $8 - 5 = 3$

  pak, pokud je jedno číslo neznámé (např. číslo 5), můžeme zapsat:

  $3 + \boxed{} = 8$

  $\boxed{} + 3 = 8$

  $8 - 3 = \boxed{}$

  $8 - \boxed{} = 3$

  Z těchto zápisů si žáci mohou vybrat ty, které jim nejvíce vyhovují.

  V žádném případě se neuplatňují ekvivalentní úpravy (učivo 2. stupně ZŠ). Tzv. „převádění čísla na druhou stranu rovnice s opačným znaménkem" je pro děti na prvním stupni neschůdné, protože „znaménka" znají pouze jako znaky pro provádění operací, nikoliv jako „znaménka u čísla".

Nerovnost

$a < b$

Binární relace, je antisymetrická a tranzitivní, relace uspořádání. Může být také reflexivní, antireflexivní, souvislá – podle vlastností se pak určují typy uspořádání.

Typy nerovností: ostrá, neostrá

Ostrá nerovnost požívá znaků $<$, $>$, neostrá nerovnost používá znaků $\leq$, $\geq$, což se na prvním stupni používá ve tvaru $a < b$ nebo $a = b$.

S nerovnostmi se děti setkávají od 1. ročníku ZŠ, při porovnávání čísel.,

Nerovnost $a < b < c$ zastupuje dvě nerovnosti: $a < b$ a $b < c$.

Zápisy typu $a < b > c$ jsou nepřípustné.

Z hlediska výrokové logiky je nerovnice výroková forma, jejíž obor pravdivosti hledáme.

Z hlediska algebraického jde o zápis nerovnosti dvou výrazů, z nichž alespoň jeden obsahuje neznámou.

Př.

- Najdi alespoň tři přirozená čísla, která jsou menší než 10.
- $\square < 10$ ______________________

- $x < 10$

Pomocí nerovnic můžeme zapisovat různá vyjádření, např.

Alespoň 5 znamená 5 nebo více, tj $x > 4$

Nejvýše 8 znamená 8 nebo méně, tj. $x < 8$

Praktické využití: Např. Vyhláška o dopravních předpisech – je v ní mnoho vyjádření, která je možné zapsat nerovnicemi (nejvyšší povolená rychlost, hmotnost a výška osoby, která může sedět na předním sedadle vedle řidiče, atd.)