MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pro žáky
základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií

64. ROČNÍK, 2014/2015

http://math.muni.cz/mo

Milí mladí přátelé,

máte rádi zajímavé matematické úlohy a chtěli byste si v jejich řešení zasoutěžit? Jestliže ano, zveme vás k účasti v matematické olympiádě (MO). Soutěž je dobrovolná a nesouvisí s klasifikací z matematiky. Mohou se jí zúčastnit žáci 5. až 9. ročníků základních škol a žáci jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií vždy ve svých kategoriích. Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka.

ročník			kategorie
ZŠ	8leté G	6leté G	
9	4	2	Z9
8	3	1	Z8
7	2	–	Z7
6	1	–	Z6
5	–	–	Z5

Se souhlasem svého učitele matematiky můžete soutěžit i v některé kategorii určené pro vyšší ročník nebo v některé kategorii A, B, C, P, které jsou určeny pro studenty středních škol. Soutěžní úlohy pro kategorie A, B, C, P jsou uveřejněny v letáku Matematická olympiáda na středních školách.

Průběh soutěže

Soutěž v jednotlivých kategoriích probíhá ve dvou nebo ve třech kolech.

Kategorie Z9 má školní, okresní a krajské kolo.
Kategorie Z8, Z7, Z6 a Z5 mají školní a okresní kolo.

Školní kolo: V tomto vstupním kole soutěže, organizovaném na školách, řeší žáci ve svém volném čase (doma) šest úloh uveřejněných v tomto letáku. Do soutěže budou zařazeni žáci, kteří odevzdají svým učitelům matematiky řešení alespoň čtyř úloh. Všem soutěžícím však doporučujeme, aby se snažili vyřešit všechny úlohy, protože v dalším průběhu soutěže mohou být zadány podobné úlohy.

Řešení úloh odevzdávejte svým učitelům matematiky v těchto termínech:

Kategorie Z5, Z9: první trojici úloh do **24. listopadu 2014** a druhou trojici úloh do **5. ledna 2015**.
Kategorie Z6 až Z8: první trojici úloh do **5. ledna 2015** a druhou trojici úloh do **18. března 2015**.

Vaši učitelé úlohy opraví a ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje*. Pak je s vámi rozeberou, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným, popřípadě i jiným řešením. Úspěšnými řešiteli školního kola se stanou ti soutěžící, kteří budou mít alespoň u čtyř úloh řešení hodnocena výborně nebo dobře.

Práce všech úspěšných řešitelů kategorií Z6 až Z9 zašle vaše škola okresní komisi MO. Ta z nich vybere nejlepší řešitele a pozve je k účasti v okresním kole soutěže. Výběr účastníků v kategorii Z5 provádějí po dohodě s okresní komisí MO školy, které okresní kolo pořádají (viz níže).

Okresní kolo se uskuteční
pro kategorii Z9 **21. ledna 2015**,
pro kategorii Z6 až Z8 **8. dubna 2015**,
pro kategorii Z5 **21. ledna 2015**.

Okresní kolo pro kategorie Z6 až Z9 se pořádá zpravidla v okresním městě, v kategorii Z5 okresní kolo probíhá na několika školách okresu pověřených pořádáním.

Žáci pozvaní do okresního kola kategorie Z9 budou řešit samostatně v průběhu 4 hodin 4 soutěžní úlohy. Pozvaní žáci kategorií Z6 až Z8 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 2 hodin. Pozvaní žáci kategorie Z5 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 90 minut.

Ve všech kategoriích se řešení úloh obodují a podle součtu získaných bodů se sestaví pořadí účastníků okresního kola. Účastníci, kteří získají předepsaný počet bodů (zpravidla aspoň polovinu z dosažitelných bodů), se stanou úspěšnými řešiteli okresního kola a nejlepší z nich budou odměněni.

Krajské kolo pro kategorii Z9 se bude konat **18. března 2015** v některém městě vašeho kraje. Průběh soutěže a její vyhodnocení je stejné jako při okresním kole. Nejlepší účastníci krajského kola jsou vyhlášeni jeho vítězi.

Matematickou olympiádu pořádají *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd České republiky.* Soutěž organizuje *ústřední komise MO*, v krajích ji řídí *krajské komise MO* při pobočkách JČMF a v okresech *okresní komise MO.* Na jednotlivých školách ji zajišťují pověření učitelé matematiky. Vy se obracejte na svého učitele matematiky.

Pokyny a rady soutěžícím

Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:

Karel Veselý
8. B
ZŠ, Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany
okres Znojmo
2014/2015
Úloha Z8–I–3

Řešení pište tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup, podrobně vysvětlete, jak jste uvažovali. Uvědomte si, že se hodnotí nejen výsledek, ke kterému jste došli, ale hlavně správnost úvah, které k němu vedly.

Práce, které nebudou splňovat tyto podmínky nebo nebudou odevzdány ve stanoveném termínu, nebudou do soutěže přijaty.

Na ukázku uvedeme řešení úlohy z II. kola kategorie Z8 z jednoho z předcházejících ročníků MO:

Úloha Z8–II-1. *Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Jestliže zvětšíme jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.*

Řešení. Délky stran obdélníku označíme a, b. Nový obdélník má délky stran $a+4$, $b-5$. Podle podmínky úlohy pro obsahy obou obdélníků platí

$$2ab = (a+4)(b-5).$$

Postupně upravíme:

$$\begin{aligned} ab - 4b + 5a &= -20 \\ ab - 4b + 5a - 20 &= -40 \\ (a-4)(b+5) &= -40 \end{aligned}$$

(Odečteme 20, abychom levou stranu mohli rozložit na součin.)

Řešení najdeme rozkladem čísla -40 na 2 činitele. Přitom musí být $a > 0$, $b > 0$, a tedy $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$. Jsou dvě možnosti:

$$(-2) \cdot 20 = -40 \qquad \text{a} \qquad (-1) \cdot 40 = -40.$$

V prvním případě dostaneme obdélník o stranách $a = 2$, $b = 15$ s obsahem $S = 30$. Nový obdélník pak má strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, tj. $S' = 2S$.

V druhém případě dostaneme obdélník o stranách $a = 3$, $b = 35$ s obsahem $S = 105$. Nový obdélník pak má strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210$. Opět je $S' = 2S$.

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

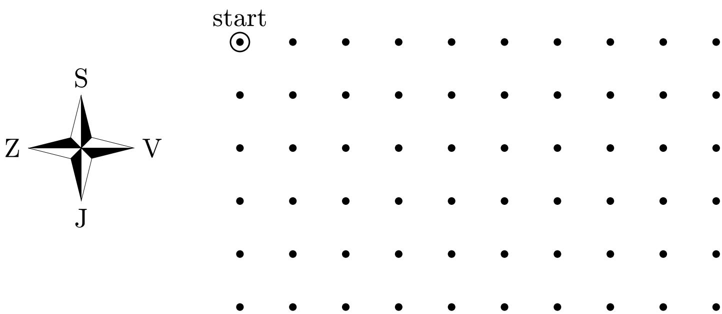
Chlapci mezi sebou měnili známky, kuličky a míčky. Za 8 kuliček je 10 známek, za 4 míčky je 15 známek. Kolik kuliček je za jeden míček?

(*M. Krejčová*)

Z5–I–2

Žabí princ se zúčastnil skokanské soutěže, při které se skákalo po kamenech rozmístěných jako na obrázku. Bylo dovoleno skákat pouze na nejbližší kameny východním nebo jižním směrem. Každý skok na východ byl oceněn dvěma body, každý skok na jih byl oceněn pěti body. Žabí princ získal 14 bodů. Určete všechny možné cesty, kudy mohl skákat.

(*E. Patáková*)



Z5–I–3

Z čísla 215 můžeme vytvořit čtyřmístné číslo tím, že mezi jeho číslice vepíšeme jakoukoli další číslici. Takto jsme vytvořili dvě čtyřmístná čísla, jejichž rozdíl byl 120. Jaká dvě čtyřmístná čísla to mohla být? Určete aspoň jedno řešení. (*L. Šimůnek*)

Z5–I–4

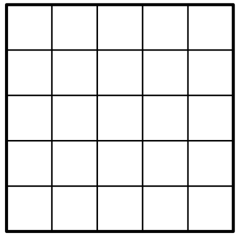
Najděte největší číslo takové, že

- žádná číslice se v něm neopakuje,
- součin každých dvou číslic je lichý,
- součet všech číslic je sudý.

(*M. Mach*)

Z5–I–5

Na obrázku je čtverec rozdělený na 25 čtverečků. Vybarvěte čtverečky pěti barvami tak, aby platilo:



- každý čtvereček je vybarven jednou barvou,
- v žádném řádku ani v žádném sloupci nejsou dva čtverečky stejné barvy,
- na žádné z obou úhlopříček nejsou dva čtverečky stejné barvy,
- žádné dva stejně barevné čtverečky se nedotýkají stranou ani vrcholem.

(*M. Petrová*)

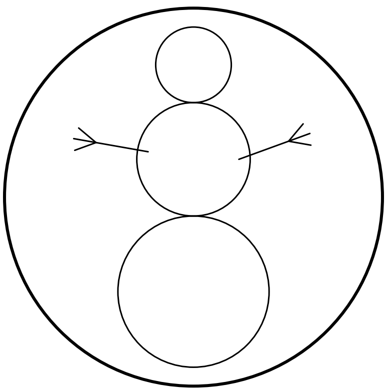
Z5–I–6

Na medaili, která má tvar kruhu o průměru 20 cm, je narýsován sněhulák tak, že jsou splněny následující požadavky:

- sněhulák je složen ze tří kruhů jako na obrázku,
- mezera nad sněhulákem je stejná jako pod ním,
- průměry všech kruhů vyjádřené v cm jsou celočíselné,
- průměr každého většího kruhu je o 2 cm větší než průměr kruhu předcházejícího.

Určete výšku co největšího sněhuláka s uvedenými vlastnostmi.

(*L. Dedková*)

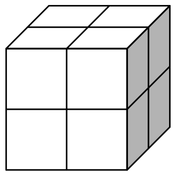


KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Erika a Petr dostali kostku, která měla každou stěnu rozdělenou na čtyři stejné čtverce, viz obrázek. Petr tvrdil, že lze do všech čtverců vepsat čísla 1 nebo 2 tak, aby na každé ze šesti stěn byl jiný součet. Erika naopak tvrdila, že to možné není. Rozhodněte, kdo z nich měl pravdu.

(*E. Novotná*)



Z6–I–2

Janeček a Walter sbírali autíčka. Walter měl autíčka srovnána ve skříňce ve třech poličkách. Nejvíce autíček stálo na horní poličce, na prostřední jich bylo o tři méně než na horní a na spodní poličce jich bylo o tři méně než na prostřední. Přitom na jedné z těchto poliček bylo 15 autíček. Když si Janeček sbírku prohlédl, řekl Walterovi:

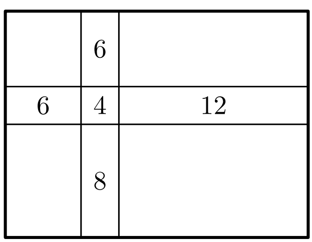
„Myslel jsem si, že když mám více než 20 autíček, tak jich mám mnoho. Teď ale vidím, že ty máš dvakrát více autíček než já!“

Kolik autíček měl ve svojí sbírce Janeček? (*L. Hozová*)

Z6–I–3

Pan Květák má obdélníkovou zahradu rozdělenou na 9 pravoúhelníkových záhonů, viz obrázek. U pěti záhonů jsou zapsány velikosti jejich obvodů v metrech.

Určete obvod celé zahrady pana Květáka. (*L. Hozová*)



Z6–I–4

Katka, Barča a Adélka se dohadovaly, které dvojmístné číslo je nejkrásnější. Katka říkala, že to je to její, protože je dělitelné čtyřmi, a když ho napíše pozpátku, dostane jiné dvojmístné číslo, které je také dělitelné čtyřmi. Barča tvrdila, že je to určitě to její, protože jedna z jeho číslic je násobkem druhé. Adélka o svém oblíbeném čísle prozradila, že jej lze rozložit na součin čtyř prvočísel.

Nakonec kamarádky zjistily, že mluví všechny o témž čísle. Určete, které číslo to bylo. (*L. Dedková*)

Z6–I–5

Určete, kolik různých řešení má následující algebrogram. Každé písmeno odpovídá jedné číslici od 0 do 5, různá písmena odpovídají různým číslicím, stejná stejným.

$$\begin{array}{r} KOSA \\ SAKO \\ \hline BABA \end{array}$$

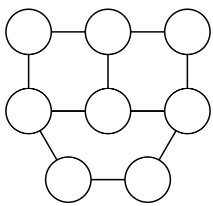
(*K. Pazourek*)

Z6–I–6

Skauti na výletě hráli hru. V lese bylo rozmístěno 8 stanovišť propojených provázky tak, jako na následujícím obrázku. Na každém stanovišti se vydávalo jedno písmenko, popřípadě pomlčka. Stanoviště je možné podle provázků proběhnout tak, že získaná písmena tvoří řetězec

ANANAS–KOKOS–MANGO.

Přiřaďte jednotlivým stanovištím odpovídající znaky. (*M. Mach*)



KATEGORIE Z7

Z7–I–1

Libor, Martin a jejich kamarádka Erika šetří na hračku. Libor a Martin přispěli do společné pokladničky stejným množstvím peněz, Erika přispěla jinou částkou. Kdyby Erika přispěla jen třetinou z toho, co do pokladničky dodala, celkově by měli polovinu z částky, která je v pokladničce nyní.

Kolikrát víc peněz do pokladničky dodala Erika než Libor?

(*E. Patáková*)

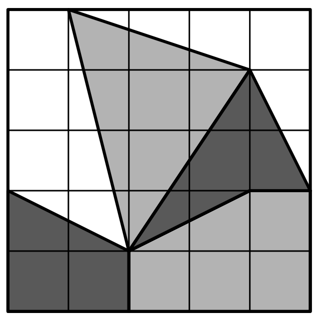
Z7–I–2

Lenka se bavila tím, že vyťukávala na kalkulačce čísla. Používala pouze číslice od 2 do 9 a brzy si všimla, že některé zápisy byly osově souměrné. Určete počet všech nejvýše trojmístných čísel s uvedenými vlastnostmi.

(*L. Dedková*)

Z7–I–3

Podle projektu bude dno bazénu vyskládáno kamínky tří barev tak, jak ukazuje obrázek (dno je navíc rozděleno na 25 shodných pomocných čtverců). Cena kamínků na jednotku plochy se u jednotlivých barev liší. Projektant počítal cenu kamínků použitých na takto vyskládané dno a k jeho překvapení se za každý druh kamínků utratí stejná částka. Dále spočítal, že kdyby celou plochu vyskládal těmi nejlevnějšími kamínky, byly by náklady 17 000 Kč.



Zjistěte, jaké by byly náklady, kdyby celé dno nechal vyskládat těmi nejdražšími kamínky.

(*L. Šimůnek*)

Z7–I–4

Body N, O, P a Q jsou vzhledem k trojúhelníku KLM zadány následujícím způsobem:

- body N a O jsou popořadě středy stran KM a KL,
- vrchol M je středem úsečky NP,
- bod Q je průsečíkem přímek LM a OP.

Určete, jaký je poměr délek úseček MQ a ML. (*L. Hozová*)

Z7–I–5

Na starém hradě bydlí drak a vězní tam princeznu. Honza šel princeznu osvobodit, na hradě objevil troje vrata s následujícími nápisy.

I: „Sluj za vraty III je prázdná."

II: „Princezna je v prostoru za vraty I."

III: „Pozor! Drak je ve sluji za vraty II."

Dobrá víla Honzovi prozradila, že na vratech, za kterými je princezna, je nápis pravdivý, u draka nepravdivý a na vratech prázdné sluje může být napsána pravda i lež.

Honza má na osvobození princezny pouze jeden pokus. Která vrata má otevřít? (*M. Volfová*)

Z7–I–6

Matěj má dvě kartičky, na každou z nich napsal jedno dvojmístné číslo. Zařadí-li menší číslo za větší, dostane čtyřmístné číslo, které je dělitelné čtyřmi a devíti. Zařadí-li naopak větší číslo za menší, dostane čtyřmístné číslo, které je dělitelné pěti a šesti.

Kolik dvojic kartiček mohl Matěj vyrobit tak, aby platily výše uvedené vlastnosti? Určete všechny možnosti. (*M. Petrová*)

KATEGORIE Z8

Z8–I–1

Písmenkový Logik je hra pro dva hráče, která má následující pravidla:

1. První hráč si myslí pětipísmenné slovo, v němž se žádné písmeno neopakuje.
2. Druhý hráč napíše nějaké pětipísmenné slovo.
3. První hráč odpoví dvěma čísly — první číslo udává, kolik písmen napsaného slova se shoduje s myšleným slovem, tzn. stojí také na správném místě; druhé číslo udává, kolik písmen napsaného slova je obsaženo v myšleném slově, ale nestojí na správném místě.
4. Kroky 2 a 3 se opakují, dokud druhý hráč myšlené slovo neuhodne.

Záznam jedné hry dvou kamarádů vypadal následovně:

SONET	1	2
MUDRC	0	2
PLAST	0	2
KMOTR	0	4
ATOLY	1	1
DOGMA	0	2

V následujícím tahu bylo myšlené slovo uhodnuto. Určete, které slovo to bylo. (*M. Volfová*)

Z8–I–2

Součet všech dělitelů jistého lichého čísla je 78. Určete, jaký je součet všech dělitelů dvojnásobku tohoto neznámého čísla. (*K. Pazourek*)

Z8–I–3

V lichoběžníku $KLMN$ platí, že

- strany KL a MN jsou rovnoběžné,
- úsečky KL a KM jsou shodné,
- úsečky KN, NM a ML jsou navzájem shodné.

Určete velikost úhlu KNM. (*L. Hozová*)

Z8–I–4

Adam má plnou krabici kuliček, které jsou velké nebo malé, černé nebo bílé. Poměr velkých a malých kuliček je 5 : 3. Mezi velkými kuličkami je poměr černých a bílých kuliček 1 : 2, mezi malými kuličkami je poměr černých a bílých 1 : 8.

Jaký je poměr všech černých a všech bílých kuliček? (*M. Petrová*)

Z8–I–5

Průměr známek, které měli na vysvědčení žáci 8.A z matematiky, je přesně 2,45. Pokud bychom nepočítali jedničku a trojku sourozenců Michala a Aleny, kteří do třídy přišli před měsícem, byl by průměr přesně 2,5.

Určete, kolik žáků má 8.A. (*M. Dillingerová*)

Z8–I–6

Šemík dostal od svého pána kvádr složený z navzájem shodných kostek cukru, kterých bylo nejméně 1 000 a nejvýše 2 000. Šemík kostky cukru ujídal po jednotlivých vrstvách — první den ujedl jednu vrstvu zepředu, druhý den jednu vrstvu zprava a třetí den jednu vrstvu shora. Přitom v těchto třech vrstvách byl pokaždé stejný počet kostek.

Zjistěte, kolik kostek mohl mít darovaný kvádr. Určete všechny možnosti. (*E. Novotná*)

KATEGORIE Z9

Z9–I–1

Milena nasbírala do košíku poslední spadlé ořechy a zavolala na partu kluků, ať se o ně podělí. Dala si ale podmínku: první si vezme 1 ořech a desetinu zbytku, druhý si vezme 2 ořechy a desetinu nového zbytku, třetí si vezme 3 ořechy a desetinu dalšího zbytku a tak dále. Takto se podařilo rozebrat všechny ořechy a přitom každý dostal stejně.

Určete, kolik Milena nasbírala ořechů a kolik se o ně dělilo chlapců. (*M. Volfová*)

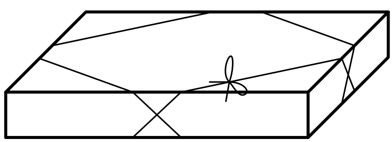
Z9–I–2

Lenka se bavila tím, že vyťukávala na kalkulačce čísla, přičemž používala pouze číslice od 2 do 9. Zápisy některých čísel měly tu vlastnost, že jejich obraz v osové nebo středové souměrnosti byl opět zápisem nějakého čísla.

Určete počet všech nejvýše trojmístných čísel s uvedenými vlastnostmi. (*L. Dedková*)

Z9–I–3

Dárek je zabalen do krabice, jejíž rozměry v cm jsou $40 \times 30 \times 6$. Krabice je převázána provázkem jako na obrázku. Určete, kolik nejméně cm provázku je potřeba na převázání krabice, pokud na uzel a mašli stačí 20 cm. (*M. Krejčová*)



Z9–I–4

Petr, Martin a Jirka se trefovali do zvláštního terče, který měl pouze tři pole s hodnotami 12, 18 a 30 bodů. Všichni chlapci házeli stejným počtem šipek, všechny šipky se trefily do terče a výsledky každých dvou chlapců se lišily v jediném hodu. Petrův průměrný bodový výsledek byl o dva body lepší než Martinův a ten byl o jeden bod lepší než průměr Jirkův.

Určete, kolika šipkami házel každý z chlapců. (*E. Novotná*)

Z9–I–5

Jarek si koupil nové kalhoty, ale nohavice byly příliš dlouhé. Jejich délka byla vzhledem k Jarkově výšce v poměru 5 : 8. Maminka mu nohavice zkrátila o 4 cm, čímž se původní poměr zmenšil o 4 %. Určete, jak je Jarek vysoký. (*L. Hozová*)

Z9–I–6

Neznámé číslo je dělitelné právě třemi různými prvočísly. Když tato prvočísla srovnáme vzestupně, platí následující:

- Rozdíl druhého a prvního prvočísla je polovinou rozdílu třetího a druhého prvočísla.
- Součin rozdílu druhého a prvního prvočísla s rozdílem třetího a druhého prvočísla je násobkem 17.

Určete nejmenší číslo, které má všechny výše uvedené vlastnosti.
(*K. Pazourek*)