II. kolo kategorie Z5

Z5–II–1

Otec hrál se strýčkem šachy. Za vyhranou partii dostal vítěz od soupeře 8 korun, za remízu nikdo nic. Strýc vyhrál čtyřikrát, remíz bylo pět a otec nakonec získal 24 korun.

Kolik partií otec se strýčkem sehráli? *(M. Volfová)*

Možné řešení. Otec čtyřikrát prohrál, takže musel strýci zaplatit $4 \cdot 8 = 32$ korun.

Otec však vyhrál tolikrát, že i po zaplacení těchto 32 korun získal 24 korun. Jeho celková výhra byla $32 + 24 = 56$ korun, vyhrál tedy $56 : 8 = 7$ partií.

Otec sedmkrát vyhrál, čtyřikrát prohrál a pětkrát remizoval, se strýčkem tedy sehrál $7 + 4 + 5 = 16$ partií.

Návrh hodnocení. 2 body za určení otcovy celkové výhry; 2 body za počet otcových vyhraných partií; 2 body za počet všech sehraných partií.

Z5–II–2

Veverka Hryzka ujídala oříšky ze svých zásob následujícím způsobem:

- v dietní den snědla jeden oříšek,
- v normální den snědla o dva oříšky víc než v dietní den.

Jistých 19 po sobě jdoucích dní se pravidelně střídaly dny dietní s dny normálními.

Zjistěte, kolik nejvíce a kolik nejméně oříšků mohla Hryzka během těchto 19 dnů sníst. *(E. Novotná)*

Možné řešení. Veverka snědla v dietní den jeden oříšek, v normální den tedy snědla tři oříšky. Oba typy dnů se pravidelně střídaly, proto se typ dne, kterým 19denní období začínalo, opakoval celkem 10krát, druhý typ se opakoval 9krát.

Protože nevíme, zda sledované období začínalo dietním, nebo normálním dnem, musíme uvážit obě možnosti:

a) pokud se začínalo dietním dnem, snědla veverka $10 \cdot 1 + 9 \cdot 3 = 37$ oříšků,
b) pokud se začínalo normálním dnem, snědla veverka $10 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 39$ oříšků.

Veverka snědla nejméně 37 a nejvíce 39 oříšků.

Návrh hodnocení. 1 bod za počet oříšků snědených v normální den; po 2 bodech za celkový počet snědených oříšků u každé z možností; 1 bod za závěr.

Z5–II–3

Ema chce sestrojit trojúhelník ABC se stranami $|AB| = 3$ cm a $|BC| = 4$ cm. Dále chce sestrojit všechny kružnice, z nichž každá bude mít střed v některém z vrcholů trojúhelníku a bude procházet některým jeho jiným vrcholem.

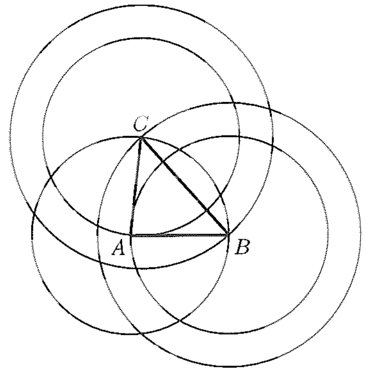
Jak dlouhá musí být strana AC, aby takových kružnic bylo právě pět? Určete všechny možnosti. *(V. Hucíková)*

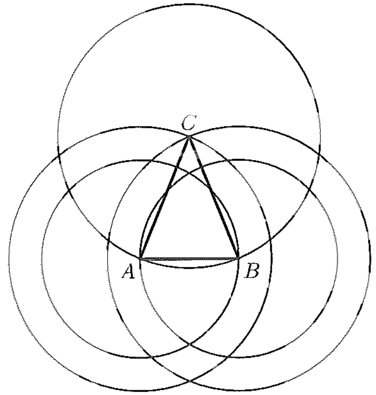
Možné řešení. Kdyby strany AB a AC byly stejně dlouhé, pak kružnice se středem v bodě A procházející bodem B by procházela také bodem C. V takovém případě by Ema sestrojila jedinou kružnici se středem v bodě A.

Kdyby strany AB a AC byly různě dlouhé, pak kružnice se středem v bodě A procházející jedním z bodů B a C nebude procházet tím druhým. V takovém případě by Ema sestrojila dvě kružnice se středem v bodě A.

Obdobné případy mohou nastat také pro kružnice se středem v bodě C. Kružnice se středem v bodě B budou jistě dvě, protože ze zadání víme, že strany BA a BC jsou různě dlouhé.

Pokud by strany trojúhelníku ABC byly navzájem různé, potom by Ema sestrojila $2 + 2 + 2 = 6$ kružnic. Pokud by strana AC byla shodná s jednou ze zbylých dvou stran, potom by Ema sestrojila $1 + 2 + 2 = 5$ kružnic. Strana AC proto musí být dlouhá buď 3 cm, nebo 4 cm.





Návrh hodnocení. Po 1 bodu za každou ze dvou vyhovujících možností; 3 body za zdůvodnění správného počtu kružnic; 1 bod za vysvětlení, že jiné možnosti nejsou.

Zdůvodnění správného počtu kružnic pouze u jedné ze dvou vyhovujících možností považujte za postačující.

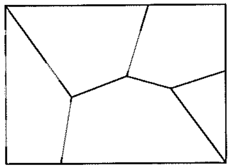
II. kolo kategorie Z5

Z5–II–1

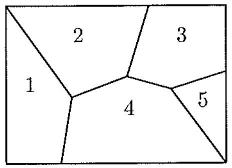
Na obrázku je znázorněno pět výběhů části zoo. Každý výběh obývá jeden z pěti druhů zvířat. Přitom víme, že

- výběh žiraf má pět stran,
- výběh opic nesousedí ani s výběhem nosorožců, ani s výběhem žiraf,
- výběh lvů má stejný počet stran jako výběh opic,
- ve výběhu tuleňů je bazén.

Určete, která zvířata jsou ve kterém výběhu. (*E. Novotná*)



Možné řešení. Označme jednotlivé výběhy číslicemi jako na obrázku:



Podle první informace jsou žirafy buď ve výběhu 3, nebo 4. Podle druhé informace víme, že výběh žiraf nemá sousedit s výběhem opic. Výběh 4 však sousedí se všemi ostatními výběhy, proto musí být žirafy ve výběhu 3.

Jediný výběh, který s výběhem žiraf nesousedí, je výběh 1. Podle druhé informace musí být ve výběhu 1 opice.

Kromě výběhu žiraf nesousedí s výběhem opic už jenom výběh 5. Podle druhé informace musí být ve výběhu 5 nosorožci.

Jediný výběh, který má stejný počet stran jako výběh opic, je výběh 2. Podle třetí informace musí být ve výběhu 3 lvi.

Zbývá jediný neobsazený výběh, a to výběh 4. Tuleni jsou tedy ve výběhu 4.

Hodnocení. Po 1 bodu za umístění zvířat do výběhů, 1 bod za kvalitu komentáře. Částečné odpovědi typu „žirafy jsou ve výběhu 3 nebo 4" hodnoťte po 1 bodu. Za řešení bez zdůvodnění udělte nejvýše 2 body.

Z5–II–2

Na stole leželo pět kartiček s navzájem různými kladnými celými čísly. Marek spočítal, že největší z čísel na kartičkách je o 8 větší než nejmenší číslo. Adam vzal se stolu kartičky s nejmenšími dvěma čísly a spočítal, že součin těchto dvou čísel je roven 12. Dominik pak spočítal, že součet čísel na zbylých třech kartičkách je roven 25.

Která čísla mohla být napsána na kartičkách? Najděte tři řešení. (*L. Růžičková*)

Možné řešení. Číslo 12 lze jako součin dvou kladných celých čísel, z nichž první je menší než druhé, získat třemi způsoby:

$$1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4.$$

Pokud by nejmenší dvě čísla byla 1 a 12, největší z čísel by mělo být $1 + 8 = 9$. To však není možné, protože 12 není menší než 9.

Pokud by nejmenší dvě čísla byla 2 a 6, největší číslo by bylo $2 + 8 = 10$. Zbylá dvě čísla pak mají být různá čísla větší než 6 a menší než 10, která spolu s číslem 10 dávají součet 25. To splňují pouze čísla 7 a 8.

Pokud by nejmenší dvě čísla byla 3 a 4, největší číslo by bylo $3 + 8 = 11$. Zbylá dvě čísla pak mají být různá čísla větší než 4 a menší než 11, která spolu s číslem 11 dávají součet 25. To splňují dvojice čísel 5 a 9 a také 6 a 8.

Tři vyhovující pětice čísel tedy jsou

$$(2, 6, 7, 8, 10), \quad (3, 4, 5, 9, 11), \quad (3, 4, 6, 8, 11).$$

Hodnocení. 2 body za každou pětici čísel: vždy 1 bod za nalezení dané pětice a 1 bod za odvození nebo ověření, že vyhovuje zadání.

Z5–II–3

Sestrojte čtverec $ABCD$ se stranou délky 6 cm a průsečík jeho úhlopříček označte S. Sestrojte bod K tak, aby spolu s body S, B, C tvořil čtverec $BKCS$. Sestrojte bod L tak, aby spolu s body S, A, D tvořil čtverec $ASDL$. Sestrojte úsečku KL, průsečík úseček KL a AD označte X, průsečík úseček KL a BC označte Y.

Ze zadaných údajů vypočtěte délku lomené čáry $KYBAXL$. (*L. Růžičková*)

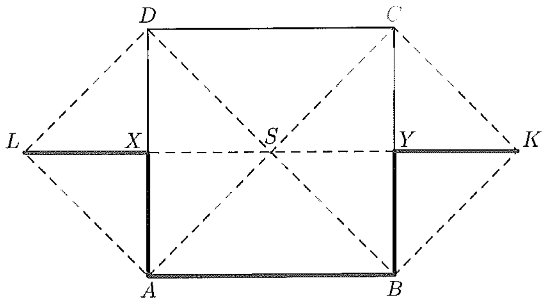
Možné řešení. Konstrukce:

- Čtverec $ABCD$ se stranou délky 6 cm,
- bod S jako průsečík úseček AC a BD,
- bod K jako průsečík kolmice k SB v bodě B a kolmice k SC v bodě C,
- bod L jako průsečík kolmice k SA v bodě A a kolmice k SD v bodě D,
- body X a Y jako průsečíky úsečky KL se stranami AD a BC.

Výpočet: Délka lomené čáry $KYBAXL$ je součtem délek úseček KY, YB, BA, AX a XL. Přitom délka úsečky AB je 6 cm.

Bod Y je průsečíkem úhlopříček čtverce $BKCS$, proto je středem každé z těchto úseček. Úsečka BC je stranou zadaného čtverce, a ta měří 6 cm. Každá z úseček KY a YB tedy měří 3 cm.

Z obdobného důvodu také každá z úseček AX a XL měří 3 cm.
Délka lomené čáry $KYBAXL$ je $3 + 3 + 6 + 3 + 3 = 18$ (cm).



Hodnocení. 2 body za provedení konstrukce. 4 body za výpočet, z toho 2 body za určení a zdůvodnění, že body X a Y jsou středy příslušných čtverců a 2 body za dořešení a výsledek. Za pouhé sečtení délek úseček bez zdůvodnění (nebo s odkazem na měření sestrojených délek v obrázku) udělte nejvýše 1 bod.