

MA0002 — 3. domácí úkol

Cvičení 3.1 Rozviňte podle binomické věty: $(\frac{1}{5} - i)^8$

Cvičení 3.2 Rozviňte podle binomické věty: $(-i + \frac{1}{3})^7$

Cvičení 3.3 Užitím binomické věty dokažte, že výraz $40^n - 8^n - 5^n + 1$ je pro každé n dělitelný číslem 28.

[Nápověda: rozložte výraz na součin dvou činitelů.]

Cvičení 3.4 Užitím binomické věty dokažte, že výraz $42^n - 7^n - 6^n + 1$ je pro každé n dělitelné číslem 30.

[Nápověda: rozložte výraz na součin dvou činitelů.]

Cvičení 3.5 Zdůvodněte (vlastními slovy), proč platí následující kombinatorické identity:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

(c) $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$

(d*) $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n}$

Cvičení 3.6 Dokažte, že platí:

(a) $1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$

(b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + m \cdot (m+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$

Cvičení 3.7 Kolika způsoby můžeme přeskládat písmena slova

(a) TIKTAK

(b) TARTAR

tak, aby nikdy nestála vedle sebe stejná písmena?

Cvičení 3.8 Určete součet všech pěticiferných čísel, která lze složit z číslic 1, 2, 3, 4, 5 tak, že každou číslici použijeme právě jednou.

Cvičení 3.9 Kolik existuje desticiferných čísel, v nichž se číslice neopakují?

Cvičení 3.10 Kolik existuje deseticiferných čísel, jejich ciferný součet je dělitelný třemi?

Cvičení 3.11 *Kolik celých čísel od 0 do 999 není dělitelno ani 5, ani 7?*

Cvičení 3.12 *Kolik různých čtyřciferných čísel lze sestavit z cifer čísla 123 153?*

Cvičení 3.13 *Kolik pěticiferných čísel lze sestavit z cifer čísla 12 312 343, požadujeme-li, aby tři číslice 3 nenásledovaly za sebou?*

Cvičení 3.14 (*) *Kolika způsoby lze přestavět cifry čísla 1 234 114 546 tak, aby tři stejné cifry nenásledovaly za sebou?*

Cvičení 3.15 *Kolika způsoby lze z přirozených čísel od 1 do 30 vybrat tři čísla tak, aby jejich součet byl sudý?*