

MA0002 — 5. domácí úkol

Cvičení 5.1 Na večírku se sešlo několik přátel. Každý si při přípitku připil s každým a ozvalo se 28 cinknutí. Kolik přátel se sešlo na večírku?

Cvičení 5.2 Kolik různých čísel dělitelných třemi menších než 10000 lze sestavit z číslic 0, 2, 3, 4, 6 takových, že se v nich číslice neopakují?

Cvičení 5.3 Vymyslete slovní úlohu tak, aby výsledek byl

(a) $\frac{12!}{3!2!2!2!}$

(b) $\frac{12!}{9!}$

Cvičení 5.4 Kolika způsoby můžeme mezi tři děti rozdělit 9 stejných jablek? Kolika způsoby můžeme těchto 9 jablek rozdělit mezi tři děti spravedlivě?

Cvičení 5.5 Kolika způsoby lze mezi tři děti rozdělit 15 stejných jablek a 9 stejných hrušek? Kolika způsoby to lze provést spravedlivě?

Cvičení 5.6 Kolika způsoby můžeme mezi čtyři studenty rozdělit 7 různých matematických sbírek?

Cvičení 5.7 Kolika způsoby může dát 5 chlapců 6 dívkám valentýnky, jestliže se chlapci mezi sebou nedomlouvali a každý z nich dá valentýnku právě jedné dívce?

Cvičení 5.8 Kolika způsoby lze ze třídy, v níž je 10 hochů a 20 dívek, vybrat trojici tak, aby v ní byl alespoň jeden hoch?

Cvičení 5.9 Kolika způsoby můžeme obarvit pěti barvami dvanáct stejných kuliček?

Cvičení 5.10 Vyřešte v oboru \mathbb{Z} rovnice:

(a) $2\frac{(x-1)!}{(x-2)!} + \frac{(x-2)!}{(x-4)!} = 6x - 16$

(b) $\frac{(x+1)!}{(x-1)!} - \frac{(x+4)!}{(x+3)!} = 0$

(c) $2\frac{(x-3)!}{(x-5)!} - \frac{(x-2)!}{(x-4)!} = 0$

(d) $2\frac{(x+2)!}{(x-1)!} - \frac{(x+1)!}{(x-2)!} = 0$

Cvičení 5.11 Kolika způsoby můžeme nalepit na dopis známky za 18 Kč, máme-li k dispozici známky za 2, 4 a 10 Kč (v libovolném potřebném množství)? Vypište všechny možnosti.

Cvičení 5.12 Na kolik oblastí rozdělí rovinu n přímek v obecné poloze (tzn. žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v témže bodě)?

[Návod: Promyslete si případy pro $n = 1, n = 2$ atd., odvoďte rekurentní vztah a z něj určete počet oblastí v závislosti na počtu přímek.]

Cvičení 5.13 Dokažte (např. matematickou indukcí):

$$(a) 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

$$(b) 2 + 4 + 6 + \dots + (2n) = n^2 + n$$

$$(c) 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2 - 1$$

$$(d) 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) = n^2 + 2n$$

$$(e) 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = 3n^2 - n$$

Cvičení 5.14 Sečtěte:

$$(a) S = n + (n + 3) + (n + 6) + \dots + 4n$$

$$(b) S = (-31) + (-27) + (-23) + \dots + 29 + 33$$

$$(c) S = n + (n + 2) + (n + 4) + \dots + 3n$$

$$(d) S = (-8) + (-5) + (-2) + 1 + 4 + \dots + (3n + 1)$$

$$(e) S = (-5) + (-3) + (-1) + 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 5) + (2n + 7)$$

Cvičení 5.15 Sečtěte (každou variantu rozložte na dvě aritmetické posloupnosti):

$$(a) S = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n+1}n$$

$$(b) S = 1 - 2 + 4 - 4 + 7 - 6 + 10 - 8 \dots + (3n - 2) + (-1)^{2n+1}2n$$

Cvičení 5.16 Sečtěte:

$$(a) S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$$

$$(b) S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^n}$$

$$(c) S = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n+3}$$

$$(d) S = 1 + 3 + 9 + \dots + 3^{n+2}$$

$$(e) S = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n+3}$$

$$(e) S = 1 + 4 + 16 + \dots + 4^{n-2}$$

Cvičení 5.17 Sečtěte (každou variantu rozložte na aritmetickou a geometrickou posloupnost):

$$(a) S = 2 + 5 + 11 + \dots + (3 \cdot 2^{n-1} - 1)$$

$$(b) S = 1 + 5 + 17 + \dots + (2 \cdot 3^{n-1} - 1)$$