MA0002 — 7. domácí úkol

Cvičení 7.1 *Eukleidovým algoritmem najděte největšího společného dělitele následujících dvojic čísel:*

(a) 240 a 264

(b) 51 a 81

(c) 391 a 10 127

(d) 437 a 247

Cvičení 7.2 *Uveďte, jaké zbytky po dělení 3, 4, 5, 6, 8 a 10 dávají druhé mocniny čísel 1 až 10. Výsledky přehledně zapište, např. do tabulky:*

dělitel:	3	4	5	6	8	10
1	1	1	1	1	1	1
4						
9						
16						
25						
36						
49	1	1	4	1	1	9
64						
81						
100						

Cvičení 7.3 *Určete, pro které hodnoty* $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10$ *jsou následující výrazy (a) sudé, (b) liché:*

(a) $n^2 - 4n + 3$

(b) $n^2 + 5n + 6$

(c) $n^2 - 1$

(d) $n^3 + 3n^2 - n - 3$

Zformulujte obecné pravidlo (např. „platí pro všechna n tvaru …“)

Cvičení 7.4 *Určete, pro které hodnoty* $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10$ *jsou následující výrazy dělitelné (a) 2, (b) 3, (c) 6:*

(a) $\frac{n^2+n-2}{4}$

(b) $\frac{n^3-n}{6}$

(c) $\frac{n^2+5n+6}{2}$

(d) $\frac{2n^2-1}{2n+1}$

Cvičení 7.5 *Dokažte:*

(a) *Dává-li* n *po dělení 3 zbytek 1, pak* n^2 *dává po dělení 3 zbytek 1.*

(b) *Výraz* $n^3 - n$ *je pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *dělitelný 6.*

(c) *Pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí:* n^2 *dává po dělení 4 zbytek 1 právě tehdy, když* n *je liché.*

(d) *Výraz* $n^3 + 9n^2 + 26n + 24$ *je pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *dělitelný 6.*

Cvičení 7.6 *Dokažte, že pro každé dvouciferné přirozené číslo* n *obsahuje dekadický zápis čísla* n^2 *alespoň dvě různé cifry. (*) Dokažte, že tvrzení platí pro libovolné přirozené číslo* $n > 3$.

[Rozčleňte si situaci podle cifry na místě jednotek.]

Cvičení 7.7 *Najděte takové prvočíslo* p*, že i čísla* $2p+1, 4p+1$ *jsou prvočísla. (*) Najděte všechna taková prvočísla* p.

[(*) Postupujte na základě výsledků u nejmenších prvočísel.]

Cvičení 7.8 *Určete alespoň jedno přirozené číslo* n*, pro něž je číslo* $46^n + 296 \cdot 13^n$ *dělitelné číslem 1 947. (*) Určete všechna taková* n.

[Rozložte si 1 947, 296 a 46 na prvočísla.]

Cvičení 7.9 *Dokažte, že pro všechna přirozená* n *platí:* $9|(10^n(9n-1)+1)$. *(*) Dokažte, že pro všechna přirozená* n *platí:* $81|(10^n(9n-1)+1)$.

Cvičení 7.10 *Dokažte, že pro všechna přirozená* n *platí:* $36|(2n^6 - n^4 - n^2)$.

[Rozložte mnohočlen $(2n^6 - n^4 - n^2)$ *na lineární a kvadratické mnohočleny.]*