

Diskrétní matematika (MA0002)

—
Kombinatorika: Základní kombinatorická pravidla.

—
Odvození kombinatorických vzorců:
Permutace, variace, kombinace bez opakování a s opakováním.

—
Faktoriály a kombinační čísla. Binomická věta.
Princip inkluze a exkluze a další kombinatorické lahůdky.

—
Konečné součty.

—
Dělitelnost celých čísel. Základní věta aritmetiky.

—
Dělitelnost polynomů. Hledání kořenů polynomu.
Dělení polynomu polynomem. Euklidův algoritmus.

—
Základy teorie grafů.
—

Studijní text Pdf MU - verze ze dne 10. listopadu 2020

Helena Durnová

Pracovní verze

Obsah

I	Teorie a příklady k procvičení	3
1	Kombinatorika	4
1.1	Základní kombinatorická pravidla	4
1.2	Faktoriály a kombinační čísla. Kombinatorické identity.	6
1.3	Aritmetický (Pascalův) trojúhelník	8
1.4	Odvození vzorců: variace, permutace, kombinace (bez opakování).	9
1.5	Další úlohy	12
1.6	Binomická věta	12
1.7	Princip inkluze a exkluze.	13
1.8	Kompozice a rozklady.	19
1.9	Rozdělování do přihrádek.	20
1.10	Závěrem ke kombinatorice.	20
2	Rekurentní vztahy. Konečné součty.	22
2.1	Fibonacciho posloupnost.	23
2.2	Aritmetická posloupnost.	23
2.3	Geometrická posloupnost.	24

Předmluva

Motto:

„Nevyučuj toho, kdo není připraven, aby byl vyučován.“

(Jan Ámos Komenský)

Matematika provází všechny děti po celou základní školní docházku od 70. let 20. století pod tímto jménem a pod jmény jinými (počty a měřictví, či aritmetika a geometrie) ještě déle. Některé děti matematika prostě baví, některé ne, ale přesto se jí musí učit všechny, stejně jako třeba češtině či tělocviku.

V dnešní době se stalo módou chlubit se neznalostí matematiky, začněme tedy kacířskou otázkou: co by se stalo, kdybychom děti, které matematické poznatky přirozeně nechápou, povinnosti učit se matematiku zprostiti? Odpovědět na ni dokážeme teprve tehdy, když si uvědomíme, jaké učitele matematiky jsme zažili a co od nás matematika vyžadovala.

Matematika se dá — s velkou nadsázkou — přirovnat ke sportu. Ani ve sportu není talent všechno; skoro u každého je potřeba trénink. Tak je tomu i s matematikou: během školní docházky se v matematice učíme postupům, které nám procvičováním přejdou do krve. A tak si při písemném sčítání „sloupečků“ i v dospělosti pomáháme prsty. Pravda, příležitostí k využití této dovednosti máme díky přítomnosti kalkulačky ve všudypřítomných mobilních telefonech pramálo, ale když bylo vynalezeno auto, také jsme nepřestali chodit pěšky a jezdit na kole.

Ve výuce matematiky se často klade důraz na správný zápis, na to, aby byl výsledek dvakrát podtržen, na to, aby znaménko rovnosti bylo v úrovni hlavní zlomkové čáry složeného zlomku. Všechny tyto věci se zvenčí mohou zdát podružnými a nepodstatnými, ale právě tyto návyky nás učí odlišovat podstatné od nepodstatného: vezměme si jako příklad pomocné výpočty psané tužkou na okraj sešitu nebo dokonce na šmírák. Podobně důraz na úpravu a dodržování pravidel není samoučelný, nýbrž nám samotným později ve složitějších výpočtech usnadní orientaci. Během hodin matematiky se tak cvičíme v disciplíně, učíme se odlišovat podstatné od nepodstatného.

Na závěr dovolte několik vět k předkládanému textu. Je věnován některým partiím z tzv. diskretní matematiky, zde konkrétně z teorie čísel, kombinatoriky a teorie grafů a je koncipován spíše jako vodítko k Vaší orientaci. Všechny partie zde probírané byly již popsány v řadě knih, na něž se v textu odkazujeme. Nepochopíte-li vše hned, nezoufejte a mějte na paměti, že vše lze pochopit, vyvinete-li dostatečné úsilí. Matematika je také práce.

Část I

Teorie a příklady k procvičení

Kapitola 1

Kombinatorika

Řada knih zabývajících se kombinatorikou a jejími počátky poukazuje na zálibu lidí v přeskupování a vytváření vzorů. Athanasius Kircher (1602–1680) v ní viděl největší umění a svou knihu věnovanou kombinatorice nazval *Ars Magna Sciendum, Sive Combinatoria* (*Velké umění vědecké, neboli kombinatorika*). Pro malé počty prvků jsou kombinatorické úlohy jsou pro malé počty prvků snadno řešitelné jednoduchým způsobem, totiž vypsáním všech možností. Při větším počtu však působí spíše magickým dojmem, protože vypsání všech možností by trvalo příliš dlouho. Nicméně i když není v našich silách všechny možnosti vypsát, stojí za to se o to pokusit. Začneme-li totiž možnosti systematicky vypisovat, může nám to pomoci uvidět, jak budeme počítat. Toto umění vidět může působit jako magie, ale dá se docela dobře nacvičit, podobně jako si člověk zvykne číst rukopis jiného člověka nebo se naučí rozeznat jednoho brouka od jiného.

1.1 Základní kombinatorická pravidla

Kombinatorické výpočty se zakládají na několika jednoduchých pravidlech. Uveďme si je v moderním množinovém vyjádření, neboť je stručné a jednoznačné.¹

Věta 1.1 (Pravidlo součtu) *Nechť A, B jsou množiny, $A \cap B = \emptyset$. Pak $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

Příklad 1.2 *Na otázku „kolika způsoby lze na šachovnici postavit pěšáka?“ lze odpovědět také rozdělením šachovnice na černá a bílá políčka. Pro variantu, jak postavit pěšáka na bílé políčko, máme 32 možností; pro variantu, kdy pěšák stojí na černém políčku, máme také 32 možností. Celkem je možností $64 = 32 + 32$ (stojí-li pěšák na černém políčku, nestojí na bílém, a naopak).*

Věta 1.3 (Pravidlo součinu) *Nechť A, B jsou neprázdné množiny. Pak $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.*

Příklad 1.4 *Ptáme-li se, kolika způsoby můžeme postavit na šachovnici černou a bílou dámu tak, aby černá dáma stála na černém políčku a bílá na bílém, odpověď určíme jako $32 \cdot 32 = 1\,024$*

¹O základech teorie množin se dozvíte v předmětu Základy matematiky.

V následujícím příkladu zkombinujeme pravidlo součtu a součinu:

Příklad 1.5 *Kolik různých slov vznikne přeházením písmen slova KOLENA tak, že se v nich samohlásky a souhlásky střídají a souhlásky jsou seřazeny abecedně?*

Pokud jsou souhlásky na sudých pozicích a samohlásky na lichých, můžeme takto získat 6 slov ($6 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$) a stejně slov získáme i tehdy, jsou-li souhlásky na lichých pozicích a samohlásky na sudých [užili jsme pravidlo součinu]. Celkem je možností $12 = 6 + 6$, neboť pokud jsou souhlásky na sudých místech, nejsou na lichých místech a naopak [užili jsme pravidlo součinu].

Věta 1.6 (Příhrádkový, též zvaný Dirichletův, princip) *Máme-li rozdělit $n + 1$ předmětů do n příhrádek, pak při libovolném rozdělení budou v alespoň jedné příhradce alespoň dva předměty.*

Příklad 1.7 *V zásuvce je 12 párů červených a 12 párů modrých ponožek. Pokud bereme ponožky z příhrádky poslepu, kolik ponožek musíme vzít, abychom měli alespoň dvě ponožky téže barvy?*

[Stačí vytáhnout tři ponožky.]

Všechny kombinatorické vzorce, které znáte ze střední školy, se dají odvodit pomocí pravidla součtu a pravidla součinu. Příhrádkový (Dirichletův) princip lze s výhodou použít při řešení některých příkladů.

Několik postřehů z historie kombinatoriky.

Kombinatorická pravidla jsou tak jednoduchá a samozřejmá, že těžko můžeme očekávat, že bychom v historických pramenech našli zmínky o jejich přesné formulaci.² Zmínky o úlohách, které bychom dnes klasifikovali jako kombinatorické, nacházíme především v indických a čínských textech. První zmínky se však objevují již ve starověkém Egyptě, jak dokládá následující

úloha z Rhindova papyru s poměrně nejasným zadáním. Obsahuje sloupec (viz též ??)

domy	7
kočky	49
myši	343
pšenice	2401
hekaty	6807
<hr/>	
	19607

Podobné počty najdeme i u Fibonnacciho (*Liber abaci*, 1202) ve formě říkanky o sedmi starých ženách, které jdou do Říma:

Sedm starých žen šlo do Říma
každá nesla.....
Kolik....

Tyto počty se dochovaly i v dětské říkance „Když jsem šel do St. Ives“:

²Biggs, N. 1979. 'Roots of combinatorics'. *Historia Mathematica* 6:109-136.

R79

Majetek:

		domy	7
		kočky	49
1	2 801	myši	343
2	5 602	pšenice	2 301 ^{sic}
4	11 204	ječmen	16 807
celkem	19 607	celkem	19 607

Obrázek 1.1: Úloha o majetku z Rhindova papyru. Převzato z knihy Vymazalová, Hana. *Hieratické texty*.

As I was going to St. Ives,
I met a man with seven wives.
Each wife had seven sacks.
In each sack there were seven cats.
Each cat had seven kits.
Kits, cats, sacks, and wives,
How many were going to St. Ives?

Mezi staré kombinatorické úlohy patří také počítání kombinací chutí nebo možnosti otevřených a zavřených dveří (Lílavátí). Kombinatorické výpočty se objevují také v úvahách o hazardních hrách (Huygens, Pascal, Fermat). Kombinatorická pravidla tak, jak je známe dnes, sepsal Jacob Bernoulli ve spise *Umění odhadu (Ars conjectandi)*, vydané v roce 1713.

1.2 Faktoriály a kombinační čísla. Kombinatorické identity.

V tomto oddíle stručně shrneme některé poznatky o faktoriálech a kombinačních číslech tak, abychom s nimi v dalším mohli počítat bez dalšího vysvětlování. Funkci faktoriál definujeme pouze pro přirozená čísla:

Definice 1.8 (Faktoriál přirozeného čísla) Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ klademe $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ (čteme: „ n faktoriál“).

Dále klademe $0! = 1$. Na okraj uveďme, že pojem faktoriálu lze rozšířit i mimo obor přirozených čísel; podobně i níže zmíněný pojem kombinačního čísla:

Definice 1.9 (Kombinační číslo) Pro libovolná $k, n \in \mathbb{N}$ definujeme kombinační číslo takto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

(čteme: „ n nad k “).

	0!	1
	1!	1
	2!	2
	3!	6
	4!	24
Tabulka hodnot faktoriálů:	5!	120
	6!	720
	7!	5 040
	8!	40 320
	9!	362 880
	10!	3 628 800

Počítání s faktoriály a kombinačními čísly: Jednodušší příklady lze řešit rozepsáním faktoriálů. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ představuje vlastně stručný zápis zlomku $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, platí tedy: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Kombinatorické identity: pro kombinační čísla platí řada tzv. kombinatorických identit. Lze je dokázat jednak rozepsáním jednotlivých kombinačních čísel, jednak kombinatorickou úvahou. Nejznámější z nich je tato:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Lze ji jednoduše ověřit rozepsáním kombinačních čísel. Také si můžeme uvědomit, že vybíráme-li např. tři osoby ze sedmi, je z početního hlediska jedno zda počítáme trojice těch, kteří nás budou reprezentovat, nebo naopak čtveřice těch, kteří “zůstanou doma”.

Uveďme některé další typy jednoduchých příkladů na toto téma::

- (a) Dokažte: $n! + (n-1)!n^2 = (n+1)!$ (Stačí na levé straně vytknout $n!$.)
- (b) Sečtěte: $\frac{(n+2)!}{n!} - 2\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} [=2]$
- (c) Vyjádřete jedním kombinačním číslem: $\binom{9}{4} + \binom{9}{6} [= \binom{10}{6}]$; $\binom{11}{2} + \binom{11}{8} [= \binom{12}{3}]$; $\binom{12}{5} + \binom{12}{6} [= \binom{13}{6}]$.

Dále platí tyto jednoduché kombinatorické identity:

- (i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- (ii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- (iii) $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$
- (iv) $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n}$
- (v) $\binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+m-1}{m-1} = + \binom{n+m}{m}$
- (vi) $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+m-1}{n} = + \binom{n+m}{m}$
- (vii) $1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$
- (viii) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + m \cdot (m+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$

$$(ix) \quad 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + m \cdot (m+1) \cdot (m+2) = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}$$

$$(x) \quad \binom{n}{0} \binom{n}{m} - \binom{n}{1} \binom{n-1}{m-1} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{m-2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{m} \binom{n-m}{0} = 0$$

Jednoduchou úvahou z platnosti identity (iii) vyplývá platnost následujících identit pro sudé n :

$$(iii-a) \quad 2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$(iii-b) \quad 2^{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n-1}$$

a analogicky pro liché n :

$$(iii-c) \quad 2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n-1}$$

$$(iii-d) \quad 2^{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n}$$

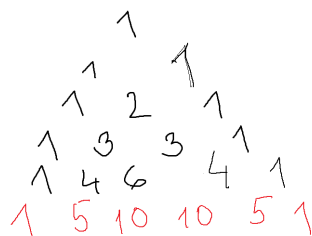
Dále platí například:

$$(*) \quad 4^n = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \binom{2n+1}{3} + \dots + \binom{2n+1}{n}$$

Řada vztahů mezi kombinačními čísly je patrná z tzv. Pascalova (též aritmetického) trojúhelníka.

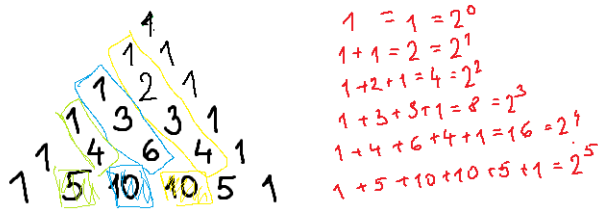
1.3 Aritmetický (Pascalův) trojúhelník

Kombinační čísla nalezneme i v tzv. aritmetickém (Pascalově) trojúhelníku. Každý jeho následující řádek vznikne tak, že do mezery mezi čísly předchozího řádku vepíšeme součty dvou čísel nad tímto místem. Postup je zřejmý z obrázku 1.2.



Obrázek 1.2: Aritmetický trojúhelník

V aritmetickém trojúhelníku lze nalézt řadu vztahů mezi kombinačními čísly. Známá identita $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ se používá přímo při vytváření trojúhelníka. Z toho, jak schéma vzniklo, se také lehce dá odvodit, že součet čísel v daném řádku je dvojnásobkem součtu čísel v řádku předchozím, neboť každé číslo předchozího řádku vstupuje jako sčítanec do dvou čísel v řádku daném. Vztah naznačený na obrázku 1.3 můžete zkusit odhalit sami.



Obrázek 1.3: Aritmetický trojúhelník: některé vztahy

Rovnice s kombinačními čísly

Cvičení 1.10 Najděte všechna $x \in \mathbb{N}$, pro něž platí:

$$\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9$$

[5]

Cvičení 1.11 Určete, pro jaká $m, n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{m} = \frac{5}{3} \binom{m+1}{m-1}$$

[$n = 6, m = 3$]

1.4 Odvození vzorců: variace, permutace, kombinace (bez opakování).

V následujícím odvodíme pomocí pravidla součtu a součinu vzorce, které znáte ze střední školy pod názvy variace, permutace a kombinace (bez opakování a s opakováním). Postup vysvětlíme vždy na nějakém příkladu.

Variace bez opakování:

Příklad 1.12 Kolika způsoby lze na šachovnici rozestavit dámu, krále a věž?

Řešení: Opakovaným použitím pravidla součinu: $64 \cdot 63 \cdot 62 = 249\,984$

Obecně pokud vybíráme k předmětů z celkového počtu n předmětů, přičemž $k, n \in \mathbb{N}$ a $k \leq n$, možností je

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutace bez opakování jsou zvláštním případem variací pro $n = k$. Někdy mluvíme také o *pořadí*.

Příklad 1.13 *Kolika způsoby lze sestavit devítimístné číslo z cifer 1 až 9 takové, že se v něm cifry neopakují?*

Řešení: *Opakovaným použitím pravidla součinu: $9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 1 = 362\,880$*

Obecně je počet pořadí n prvků roven $n!$ ($n \in \mathbb{N}$)

Příklad 1.14 *Určete součet všech čtyřciferných čísel sestavených z cifer 1, 2, 3, 4.*

Řešení: $640 + 6400 + 64000 + 640000$ (číslice se mohou opakovat); $60 + 600 + 6000 + 60000$ (číslice se nemohou opakovat).

Kombinace bez opakování: uvědomíme si, že množství stejně početných variací a kombinací bez opakování prvků vybíraných ze stejně velké množiny spolu úzce souvisí. V podstatě stačí počet variací vhodným číslem vydělit; tímto vhodným číslem je faktoriál počtu vybíraných prvků; tj.

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

To je právě kombinační číslo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Příklad 1.15 *Kolika způsoby lze na šachovnici rozestavit tři bílé pěšáky?*

Řešení: *Vyjdeme z příkladu, kdy jsme na šachovnici měli postavit krále, dámu a věž; možností bylo $64 \cdot 63 \cdot 62 = 249\,984$, Je zřejmé, že pokud na tři daná políčka postavíme tři pěšáky, je možnost jediná (pěšáci jsou stejní), zatímco krále, dámu a věž na tatáž políčka postavíme $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ způsoby.*

U variant „s opakováním“ začneme s odvozováním vzorců také u variací.

Variace s opakováním

Příklad 1.16 *Do restaurace přijde 12 hostů. Na jídelním lístku jsou 4 jídla. Kolika způsoby si mohou objednat?*

Řešení: *Každý z hostů má 4 možnosti, tedy $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^{12}$ možností.*

Podobným způsobem lze odvodit počet podmnožin množiny A o n prvcích:

$$2^{|A|} = 2^n$$

Permutace s opakováním tentokrát nejsou zvláštním případem variací.

Příklad 1.17 *Kolika způsoby můžeme přeskládat písmena slova*

(a) TATA

(b) POPOCATEPETL

Řešení:

(a) Vypíšeme možnosti dle abecedy: AATT, ATTA, ATAT, TAAT, TATA, TTAA. To odpovídá permutacím všech čtyř písmen vyděleným permutacemi opakujících se písmen, tj. $\frac{4!}{2!2!}$

(b) Analogicky slovo POPOCATEPETL má 3 P, 2 O, 2 T, 2 E, 1 A, 1 C 1 L, tj. dohromady 12 písmen a možností přeházení je tedy $\frac{12!}{3!2!2!1!1!1!}$

Každý z hostů má 4 možnosti, tedy $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^{12}$ možností.

Kombinace s opakováním vyžadují zvláštní přístup. Začneme „kódovat“ a sestrojovat bijekce (vzájemně jednoznačná zobrazení) mezi objekty, jejichž počet máme spočítat, a objekty, jejichž počet budeme umět spočítat.

Příklad 1.18 *Do restaurace přijde 12 hostů. Na jídelním lístku jsou 4 jídla. Kolika může být objednávek z hlediska kuchaře?*

Řešení: Kuchaři je jedno, kdo si objednal které jídlo, zajímá ho pouze, kolik má připravit porcí jídla č. 1 až 4. Možností je $\binom{12+4-1}{4-1} = \binom{12+4-1}{12}$

Příklad 1.19 *Kolika způsoby mohou vybrat deset mincí v hodnotě 5, 10 a 20 Kč? (Máme dostatečný počet mincí každé hodnoty.)*

Řešení: Možností je $\binom{10+3-1}{3-1} = \binom{10+3-1}{10} = 66$

Oba výše uvedené případy můžeme „zakódovat“ pomocí nul a jedniček. V příkladě s mincemi si například můžeme představit, že mince uspořádáme podle hodnoty: nejprve dvacetikoruny, pak desetikoruny a nakonec pětikoruny. Místo dvacetikorun napíšeme do řádku příslušný počet jedniček; za ně napíšeme nulu. Pokračujeme tak, že zapíšeme tolik jedniček, kolik je desetikorun; za ně opět napíšeme nulu. Nakonec napíšeme tolik jedniček, kolik je pětikorun. Je zřejmé, že psát za nimi nulu je nadbytečné: pokud hromádka dvaceti-, deseti- a pětikorun splňuje zadání a obsahuje deset mincí, napsali jsme posud deset jedniček a dvě nuly. Je zřejmé, že mezi hromádkami mincí a permutacemi deseti jedniček a dvou nul existuje vzájemně jednoznačné zobrazení, neboli vyhovujících hromádek je právě tolik, kolik je permutací deseti jedniček a dvou nul. Ty však již umíme spočítat: jedná se o předchozí výsledek, který jsme nazvali permutace s opakováním (deseti jedniček a dvou nul).

Výše uvedené odvození můžeme zopakovat při řešení jednotlivých příkladů; je to spolehlivější než snaha dosazovat naslepo do vzorečku pro kombinace s opakováním, kdy vybíráme k prvků n druhů:

$$C_o(k, n) = \binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$$

Vzoreček pro kombinace s opakováním, v němž přehodíme značení pro druhy a počet prvků, a tedy vybíráme n prvků k druhů, totiž vypadá dost podobně:

$$C_o(n, k) = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

1.5 Další úlohy

Nyní si ukážeme několik zajímavých příkladů, u kterých vhodně využijeme výše uvedené vzorce a pravidla. Jsou převzaty z jiných učebnic, zejména z výběrných skript Antonína Vrby.

Příklad 1.20 *Kolika způsoby lze přeskládat písmena slova LOKOMOTIVA tak, aby žádná dvě „O“ nestála vedle sebe?*

Řešení: Nejprve určíme, kolika způsoby lze přeskládat písmena L, K, M, T, I, V, A. To lze provést $7!$ způsoby. Při libovolném z těchto rozložení máme posloupnost sedmi písmen. Abychom vyhověli podmínkám, můžeme O vložit před nebo za tuto posloupnost nebo do mezer mezi písmeny, přičemž na každé z těchto míst lze vložit nejvýše jedno O. Taková místa můžeme vybrat $\binom{8}{3}$ způsoby. Možností je tedy $7! \binom{8}{3}$.

Příklad 1.21 *Krotitel má do arény přivést 4 tygry a 5 lvů tak, aby žádní dva tygři nešli za sebou. Kolika způsoby to lze provést?*

Řešení: Nejprve určíme počet seřazení tygrů a lvů bez ohledu na to, který tygr a který lev kde konkrétně bude. Symbolicky můžeme napsat, že hledáme permutace pěti L a čtyř T takových, že žádná dvě T nenásledují těsně za sebou; například LTLTLTLTL. Takových rozmístění je $\binom{6}{4}$ (mezi pěti L jsou čtyři mezery, jedno místo je před prvním L a jedno za posledním; podobně jako v předchozím příkladu vyberem z těchto šesti míst čtyři místa, na něž umístíme T). V dalším kroku pak „dáme lvům a tygrům jména“, což početně znamená, že například místo uvedené permutace bezejmenných tygrů LTLTLTLTL dostáváme $5! \cdot 4!$ Celkem je tedy možností $5! \binom{6}{4} \cdot 4!$

1.6 Binomická věta

Věta 1.22 *Nechť a, b jsou proměnné, $n \in \mathbb{N}$. Platí následující vztahy:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

a analogicky

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n}b^n$$

Příklad 1.23 *Speciálními příklady binomické věty jsou známé vzorce:*

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$(a - b)^2 = \binom{2}{0}a^2 - \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$(a + b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

$$(a - b)^3 = \binom{3}{0}a^3 - \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 - \binom{3}{3}b^3$$

Se vzorci, které se opticky podobají binomické větě, se setkáte např. i v matematické analýze.

Binomické věty lze s výhodou užít například při těchto výpočtech:

$$(a) \quad 101^5 = (100 + 1)^5 = 100^5 + 5 \cdot 100^4 + 10 \cdot 100^3 + 10 \cdot 100^2 + 5 \cdot 100 + 1$$

$$(b) \quad 99^5 = (100 - 1)^5 = 100^5 - 5 \cdot 100^4 + 10 \cdot 100^3 - 10 \cdot 100^2 + 5 \cdot 100 - 1$$

V obou výše uvedených případech je výpočet jednodušší než přímo umocňovat 101 a 99.

Podobně lze umocňovat i komplexní čísla v algebraickém tvaru. Pro to, abychom mohli podobné příklady počítat, vystačíme se znalostí faktu, že každé komplexní číslo lze zapsat ve tvaru $a + bi$, přičemž platí $i^2 = -1$.³

Cvičení a úkoly k zamyšlení: binomická věta

Cvičení 1.24 *Dokažte binomickou větu metodou matematické indukce.*

Cvičení 1.25 Určete, který sčítanec je v binomickém rozvoji $\sqrt{2} + \sqrt{3}^{50}$ největší.

$$\left[\binom{50}{22} \sqrt{2}^{22} \sqrt{3}^{28} \right]$$

1.7 Princip inkluze a exkluze.

V některých kombinatorických úlohách se výsledku dobereme tak, že nejprve vezmeme počet možností, který umíme dobře spočítat, i když víme, že tak zahrneme možností příliš mnoho; poté počet upravíme například odečtením nepříznivých případů nebo vydělením. Tyto postupy jsme už použili pro odvození vzorců pro kombinace (podělením příslušného počtu variací), pro permutace s opakováním (podělením celkového počtu permutací počty permutací opakujících se písmen), a tedy i pro odvození vzorce pro výpočet kombinací s opakováním. Ukažme si tuto strategii řešení na některých dalších příkladech.

Příklad 1.26 *úprava výsledku dělením - př. č. 1*

Příklad 1.27 *úprava výsledku dělením - př. č. 2*

³Pro ty, kteří se s komplexními čísly dosud neseťkali, doporučujeme např. knihu Emila Caldy *Komplexní čísla* z řady Matematika pro gymnázia nakladatelství Prometheus.

Příklad 1.28 Je dán čtverec $ABCD$. Na každé jeho straně je vyznačeno $n(n \geq 3)$ vnitřních bodů. Určete počet trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech.

Řešení:

- (a) Výběr stran s vrcholy trojúhelníka: $\binom{4}{3}$ - každý vrchol na jiné straně; dále dva vrcholy na jedné straně a jeden na jiné: $4 \cdot 3$, nakonec výběr konkrétního vrcholu na dané straně.
- (b) Od počtu všech trojic bodů ($\binom{4n}{3}$) odečteme trojice, které netvoří trojúhelníky — to jsou ty případy, kdy vybrané vrcholy leží na jedné straně a těchto možností je $4 \cdot \binom{n}{3}$

Nejčastěji se metoda odečtení původně započítaných možností používá pro takzvaný doplňkový jev:

Příklad 1.29 Určete, kolik je možností takových, kdy při hodu třemi kostkami padne alespoň na jedné kostce hodnota 1.

Řešení:

- (a) Vypočteme zvlášť případy, kdy padne na právě jedné kostce hodnota 1, právě na dvou a právě na třech: $3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 = 91$
- (b) Ode všech možností ($6^3 = 216$) odečteme případy, kdy nepadne ani jednou hodnota 1. To bude ve $5^3 = 125$ případech; čili hodnota 1 padne alespoň na jedné kostce ve $216 - 125 = 91$ případech.

V následujícím příkladu není metoda odečtení části výsledků sice elegantní, ale vede ke správnému výsledku:

Příklad 1.30 Kolika způsoby může k chlapců a d dívek utvořit taneční páry??

Řešení:

- (a) $k \cdot d$ způsoby (počet prvků kartézského součinu)
- (b) Od počtu všech dvojic $\binom{k+d}{2}$ odečteme počet dvojic složených jen z chlapců $\binom{k}{2}$ a počet dvojic složených jen z dívek $\binom{d}{2}$, neboť ty netvoří taneční páry:

$$\frac{(k+d)(k+d-1)}{2} - \frac{(k)(k-1)}{2} - \frac{(d)(d-1)}{2} = \frac{k^2 + d^2 + 2kd - k - d - k^2 + k - d^2 + d}{2} = kd$$

Někdy však nedokážeme určit výsledek pouze pomocí jednoho nebo dvou odečtení a musíme opět nějaké možnosti přičíst. Tomuto vědomému a systematickému přičítání a odečítání se říká *princip inkluze a exkluze*.

Nejjednodušším použitím principu inkluze a exkluze je vztah pro určení počtu prvků sjednocení dvou konečných množin:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Pro odvození vztahu pro určení počtu prvků sjednocení tří množin můžeme použít například Vennovy diagramy (viz *Základy matematiky*). Snadno nahlédneme, že

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|;$$

pro čtyři množiny:

$$\begin{aligned} &|A \cup B \cup C \cup D| = \\ &|A| + |B| + |C| + |D| \\ &- |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \\ &+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|; \end{aligned}$$

pro pět množin:

$$\begin{aligned} &|A \cup B \cup C \cup D \cup E| = \\ &|A| + |B| + |C| + |D| + |E| \\ &- |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |A \cap E| - |B \cap C| - |B \cap D| - |B \cap E| - |C \cap D| - |C \cap E| - |D \cap E| \\ &+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\ &- |A \cap B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap E| - |A \cap C \cap D \cap E| - |B \cap C \cap D \cap E| \\ &+ |A \cap B \cap C \cap D \cap E| \end{aligned}$$

atd., a tedy pro n množin lze formulovat

Příklad 1.31 V ústavu pracuje 67 osob, z nich 47 ovládá angličtinu, 35 němčinu a 23 oba jazyky. Kolik lidí neumí ani anglicky, ani německy?

Řešení: (a) pomocí Vennových diagramů

(b) $67 - 47 - 35 + 23 = 8$

Příklad 1.32 V ústavu pracuje 67 osob, z nich 47 ovládá angličtinu, 35 němčinu, 29 francouzštinu; dále 23 hovoří anglicky i německy, 12 anglicky a francouzsky a 11 německy a francouzsky, všemi třemi jazyky 5 osob. Kolik lidí neumí ani anglicky, ani německy, ani francouzsky?

Řešení: (a) pomocí Vennových diagramů

(b) $67 - 47 - 35 - 20 + 23 + 12 + 11 - 5 = 6$

Příklad 1.33 Na sídlišti žije 2229 rodin, z nichž každá má ledničku, auto nebo chatu. Určete, kolik rodin má všechno, víte-li že 13371 má ledničku, 1049 má auto, 1022 má chatu, 315 má ledničku i auto, 571 ledničku a chatu a 430 má auto a chatu.

Řešení: (a) pomocí Vennových diagramů

(b) 103

Příklad 1.34 Tělovýchovná jednota má čtyři oddíly: atletiky, košíkové, odbíjené a šachový.

A 26, K 17,

AK 7, AO 18, $AŠ$ 2, KO 9, $KŠ$ 0, $OŠ$ 5

AKO 5, $AKŠ$ 0, $AOŠ$ 2, $KOŠ$ 0

$AKOŠ$ 0

Kolik členů má jednota?

Řešení: (a) pomocí Vennových diagramů není vhodné

(b) 85

Příklad 1.35 Kolik přirozených čísel menších než 10^5 obsahuje každou z cifer 1, 3, 5, 7?

Řešení: Úlohu lze řešit dvěma způsoby:

(a) Rozdělím si všechna možná čísla na čtyřiciferná a pěticiferná.

(b) Pomocí principu inkluze a exkluze: všech pěticiferných čísel je $9 \cdot 10^4$, od nich odečtu ty, které neobsahují 1 nebo 3 nebo 5 nebo 7, přičtu ty, které neobsahují 1 a 3, 1 a 5, atd.

Musí to vyjít stejně, jinak je jeden z postupů špatně.

Obecný princip inkluze a exkluze:

$$\begin{aligned} |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n| = & \\ & |M_1| + |M_2| + \dots + |M_n| \\ & - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - \dots - |M_1 \cap M_n| \\ & - |M_2 \cap M_3| - \dots - |M_2 \cap M_n| - |M_3 \cap M_4| - \dots - |M_{n-1} \cap M_n| \\ & + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + \dots + |M_{n-2} \cap M_{n-1} \cap M_n| \\ & - \dots + \dots + (-1)^{n+1} |M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n| \end{aligned}$$

Příklad 1.36 (Eratosthenovo síto) Kolik je prvočísel mezi čísly od 1 do 100.

Můžeme si představit, že budeme postupovat jako prý postupoval Eratoshenes ve starověkém Řecku: na voskové tabulce napíšeme čísla od 1 do 100 a horkou jehlou „propichujeme“ místa označená násobky prvočísel, tj. násobky 2: 4, 6, 8, 10, ... atd., násobky 3: 6, 9, 12, ... atd., násobky 5: 10, 15, 20, 25, ... atd. a násobky 7: 14, 21, ... atd.

Snadno nahlédneme, že některá čísla vypichujeme vícekrát, například 6, 10, 15, 30, ... atd. toho níže využijeme. Dále využijeme skutečnosti, že při zkoumání toho, zda je dané číslo n prvočíslo, stačí vyzkoušet dělitelnost prvočísly do hodnoty \sqrt{n} (včetně). V našem případě hledáme prvočísla do 100, tedy stačí zkoumat dělitelnost prvočísly 2, 3, 5 a 7.

Víme, že 1 není prvočíslo, tedy můžeme počítat s 99 čísly. Nejprve od 99 odečteme počet všech násobků 2, 3, 5 a 7 s výjimkou těchto prvočísel:

$$99 - 49 - 32 - 19 - 13 = 50 - 51 - 13 = -14$$

Výsledkem je záporné číslo, neboť např. číslo 6 jsme odečetli dvakrát: jednou jako násobek dvou, jednou jako násobek tří. Všechna tato nedopatření se pokusíme napravit naráz tím, že přičteme zpět násobky 6, 10, 14, 15, 21 a 35:

$$99 - 49 - 32 - 19 - 13 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 = 31$$

Teď již nemáme varování v podobě záporného výsledku, ale snadno nahlédneme, že jsme například 30 přičetli třikrát: v prvním kroku jsme 30 třikrát odečetli (jako násobek 2, 3 a 5) a nyní jsme je třikrát přičetli (jako násobek 6, 10 a 15). Číslo 30 ale není prvočíslo, je tedy třeba je (a jemu podobná čísla, např. 70) odečíst. Dalším pokusem o nápravu je tedy odečtení násobků trojic prvočísel, tj. 30, 42, 70 a 105:

$$99 - 49 - 32 - 19 - 13 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 = 25$$

Naši snahu by mohlo zhatit číslo, které by bylo dělitelné všemi čtyřmi prvočísly; nejmenší takové číslo však je 210, a tedy bychom přičetli 0 (tolik je mezi čísly od 1 do 100 násobků 210).

(Jen pro úplnost: v prvním kroku bychom je 4x odečetli, následně 6x přičetli a nakonec 4x odečetli; v součtu bychom je tedy odečetli 2x, přičemž jsme je chtěli odečíst pouze 1x; to bychom napravili tím, že bychom je nyní ještě 1x přičetli; nic takového však dělat nemusíme, protože číslo 210 vůbec do hry nevstoupilo: počítali jsme stále pouze s čísly menšími nebo rovnými 100.)

Pro pořádek odpověď: mezi čísly 1 až 100 je 25 prvočísel.

Definujeme-li jednotlivé množiny pomocí vlastností, pak množina M_1 obsahuje prvky s vlastností 1, množina M_n prvky s vlastností i , analogicky $M_i \cap M_j$ prvky s vlastnostmi i a současně j , atd. Pak lze např. odvodit, že prvků, které nemají žádnou z požadovaných vlastností (přičemž prvky, které nemají vlastnost i označíme M_i' a množinu obsahující všechny uvažované prvky označíme M), je

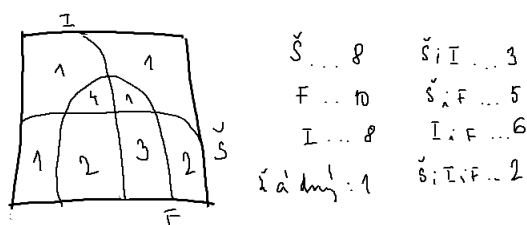
$$\begin{aligned} & |M_1' \cap M_2' \cap \dots \cap M_n'| = \\ & |M| - |M_1| - |M_2| - \dots - |M_n| \\ & + |M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + \dots + |M_1 \cap M_n| \\ & + |M_2 \cap M_3| + \dots + |M_2 \cap M_n| + |M_3 \cap M_4| + \dots + |M_{n-1} \cap M_n| \\ & - |M_1 \cap M_2 \cap M_3| - \dots - |M_{n-2} \cap M_{n-1} \cap M_n| \\ & + \dots - \dots + (-1)^n |M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n| \end{aligned}$$

Příklady, při nichž využíváme principu inkluze a exkluze lze řešit pomocí Vennových diagramů, avšak elegantněji je vyřešíme prostým sčítáním a odčítáním příslušných zadaných hodnot. Z níže uvedených příkladů je zřejmé, že potřebujeme zadat poměrně hodně údajů, které však nejsou zcela nezávislé. Touto metodou se dají odhalit tzv. zfalšovaná hlášení, tj. případy, kdy na první pohled není zřejmé, že čísla nemohou odpovídat pravdě.

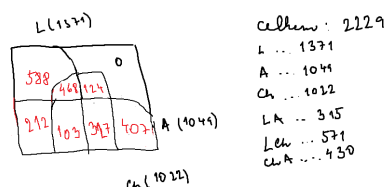
Příklad 1.37 *U velkého stolu se sešlo několik osob. Pouze jeden z nich neměl ani španělsky, ani italsky, ani francouzsky, z ostatních 8 umělo španělsky, 10 francouzsky, 8 italsky, 3 španělsky a italsky, 5 španělsky a francouzsky, 6 italsky a francouzsky a 2 španělsky, italsky a francouzsky. Určete, kolik lidí sedělo u stolu.*

Řešení: Úlohu lze řešit dvěma způsoby:

- (a) Pomocí Vennových diagramů (viz obrázek 1.4).
 (b) Všech osob bylo $1 + 8 + 10 + 8 - 3 - 5 - 6 + 2 = 16$.



Obrázek 1.4: Vennův diagram pro úlohu fr. it. šp.



Obrázek 1.5: Venn. diagram pro úlohu o ledničkách, chatách a autech

Příklad 1.38 Ve sportovním klubu pěstují členové alepoň jeden z těchto čtyř sportů: atletika (A), gymnastika (G), plavání (P) a lyžování (L).

Řešení: Zkusíme naznačit, co se změnilo oproti předchozímu příkladu.

(a) Řešit úlohu pomocí Vennových diagramů není vhodné, neboť Vennův diagram pro 4 množiny je nepřehledný.

(b) $c - s$

Příklad 1.39 Na sídlišti je 2229 rodin, z nichž každá má ledničku, auto nebo chatu. Určete, kolik rodin má všechno, víte-li, že 1371 rodin má ledničku, 1049 rodin má auto, 1022 má chatu, 315 rodin má ledničku a auto, 571 má ledničku a chatu a 430 má auto a chatu.

Řešení: Úlohu lze řešit dvěma způsoby:

(a) Pomocí Vennových diagramů (viz obrázek 1.5); v tomto případě je to dobré spíš pro kontrolu, ale ne pro počítání, neboť neznáme počet rodin, které mají všechno.

(b) $2229 - 1371 - 1049 - 1022 + 315 + 571 + 430 = 103$

Problém šatnářky (speciální princip inkluze a exkluze)

Příklad 1.40 Před koncertem si pánové odloží v šatně klobouky. Po koncertě jim je šatnářka vydává poněkud chaoticky, neboť shodou okolností všichni ztratili lístky. Kolika různými způsoby může šatnářka vrátit klobouky pánům tak, aby žádný z nich neměl na hlavě svůj klobouk?

Řešení pro 4 osoby: $4! - 4 \cdot 3! + \binom{4}{2} \cdot 2! - \binom{4}{3} 1! + \binom{4}{4} \cdot 0! = 9$

Možnosti

pro 4 osoby - 9 možností
v tabulce všech 24, z toho 15 nevyhovuje

ABCD x	BACD x	CABD x	DABC
ABDC x	BADC	CADB	DACB x
ACBD x	BCAD x	CBAD x	DBAC x
ACDB x	BCDA	CBDA x	DBCA x
ADBC x	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB x	BDCA x	CDBA	DCBA

pro 5 osob --- 44 možností

BADCE	BADEC	BAECD
BCAED	BDAEC	BDEAC
CABED	CADEB	

Pro 4 osoby je možností 9, pro 5 osob analogicky vypočteme 44.

pro 4 osoby - 9 možností
pro 5 osob - 44 možností

Kromě variací, permutací a kombinací známe další typické kombinatorické kategorie. Z nich si nyní představíme dva typy, a to počítání, kolika způsoby lze přirozené číslo zapsat ve tvaru sčítanců-přirozených čísel, a dále počítání, kolika způsoby můžeme věci (rozlišitelné nebo nerozlišitelné) rozdělit do přihrádek (rozlišitelných nebo nerozlišitelných)-

1.8 Kompozice a rozklady.

Definice 1.41 Rozkladem čísla n na k sčítanců rozumíme vyjádření čísla $n \in \mathbb{N}$ pomocí $k (\in \mathbb{N})$, přičemž na pořadí sčítanců nezáleží. Počet rozkladů čísla n na právě k sčítanců označíme $p(n, k)$ (z anglického partition), rozklad čísla n na libovolný počet sčítanců označíme $p(n)$

Je zřejmé, že k může nabývat hodnot od 1 do n . Dále platí (rozmyslete si, že to opravdu platí):

$$p(n, 1) = 1$$

a také

$$p(n, n) = 1.$$

Zaveďme nyní funkci celá část z čísla x a její označení: $[x]$. Tato funkce přiřadí každému číslu jeho celou část, tj. $[2, 5] = 2 = [2]$ atp. Pak lze jednoduše zapsat počet rozkladů čísla n na dva sčítance:

$$p(n, 2) = \left[\frac{n}{2} \right].$$

Přesvědčte se, že to to tvrzení skutečně platí. Důkaz 1 ze najít ve skriptech E. Fuchse *Diskrétní matematika pro učitele*.

Určení počtu rozkladů je obecně úkol, který vyžaduje tzv. rekurentní postup. To znamená, že abychom mohli spočítat počet rozkladů čísla 7 na

4 sčítance, musíme znáte rozklady menších čísel na menší nebo stejný počet sčítanců. Konkrétně platí:

$$p(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n - k, i),$$

tedy např.

$$p(5, 3) = p(5-3, 1) + p(5-3, 2) + p(5-3, 3) = p(2, 1) + p(2, 2) + p(2, 3) = 1 + 1 + 0.$$

Zřejmě $5 = 3 + 1 = 1 = 2 + 2 + 1$, zřejmě také $p(2, 3) = 0$, neboť nelze rozložit číslo 2 na 3 přirozené sčítance.

Podívejme se znovu na vztah

$$p(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n - k, i),$$

je to vlastně naopak konstruované než bychom čekali od jednotlivých čísel (složek) rozkladu, který ještě neznáme, ale předpokládáme, že budeme znát, odečteme vždy jedničku --- tím dostaneme rozklad čísla o k menšího na !nejvýše! k sčítanců

Definice 1.42 Kompozicí m čísla n z k sčítanců rozumíme vyjádření čísla $n \in \mathbb{N}$ pomocí $k \in \mathbb{N}$, přičemž záleží na pořadí sčítanců.

Výpočet počtu kompozic je ve srovnání s výpočtem počtu rozkladů poměrně jednoduchý, neboť se jedná o analogii vzorce pro kombinace s opakováním: máme-li rozdělit číslo n na právě k sčítanců, musí být každý ze sčítanců alespoň 1, tedy počet kompozic je

$$\binom{n - k + k - 1}{k - 1} = \binom{n - k + k - 1}{n - k}$$

1.9 Rozdělování do přihrádek.

rozlišitelné a nerozlišitelné věci
roz. a neroz. přihrádky
tabulka
převedení jednotlivých problémů na
již známé kombinatorické kategorie

1.10 Závěrem ke kombinatorice.

Dosud představené kombinatorické úlohy jsou samozřejmě pouhou „ochutnávkou“. Vůbec jsme se nedotkli problematiky magických či latinských čtverců, neformulovali jsme Kirkmanův problém 15 dívek, nedefinovali jsme Bellova či Stirlingova čísla. To je obsahem pokročilejších kurzů diskrétní matematiky. Zde probíraná látka představuje — kromě procvičení logického uvažování atp. — přípravu pro výukuteorii pravděpodobnosti.

Příklad 1.43 *Dokažte, že mezi čtyřmi libovolně zvolenými přirozenými čísly vždy najdeme dvě taková, že jejich součet nebo rozdíl je dělitelný pěti, nebo dvě, jejichž rozdíl je dělitelný pěti.*

Řešení: pomocí přihrádkového principu

Některé příkady nelze řešit ani jedním z výše uvedených způsobů, např. tento:

Příklad 1.44 *Kolika způsoby lze nalepit na dopis známky v hodnotě 18 Kč, máme-li k dispozici známky v hodnotě 10 Kč, 4 Kč a 2 Kč (v libovolném množství)?* **Řešení:** vypíšeme...

je rozdíl mezi $2+2+10+4$ a $10 + 4 + 2 + 2$ atp.? — ANO

Kapitola 2

Rekurentní vztahy. Konečné součty.

Uvedme nejprve příklad:

Příklad 2.1 *Kolika způsoby lze vyjít 10 schodů, děláme-li kroky po 1, 2, nebo 3 schodech?*

Řešení: Poslední krok můžeme udělat ze 7., 8. nebo 9. schodu; tj.

$$S_{10} = S_9 + S_8 + S_7.$$

Obecně můžeme psát:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}.$$

Lehce ověříme, že

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 4,$$

a podle vzorce tedy dopočítáme

$$S_4 = 7 (= 1 + 2 + 4)$$

a analogicky

$$S_5 = 13, S_6 = 24, S_7 = 44, S_8 = 81, S_9 = 149,$$

a tedy

$$S_{10} = S_9 + S_8 + S_7 = 149 + 81 + 44 = 274.$$

Příklad 2.2 *Na kolik oblastí rozdělí rovinu n přímk v obecné poloze?*

Řešení: Nejprve si ujasněme, co je to obecná poloha: znamená to, že žádné dvě přímky nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě.

Pak jedna přímka rozdělí rovinu na dvě části.

Druhá přímka přidá dvě další části — dvě přímky rozdělí rovinu na čtyři části.

Třetí přímka protne každou z již nakreslených dvou, tedy přidá tři části a dohromady bude rovina rozdělena na sedm částí.

Obecně:

$$p_{n+1} = p_n + n + 1$$

Právě uvedenému vztahu říkáme *rekurentní*: abychom podle něj mohli postupovat, musíme pro p_{n+1} znát p_n , pro to zase p_{n-1} , atd. V tomto případě však můžeme i odvodit vzorec pro n -tý člen takové posloupnosti:

$$p_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

Toto se dá dokázat — např. matematickou indukcí.

Faktoriál lze definovat rekurentně: $(n + 1)! = n!(n + 1)$

Obecně rekurentní vztah závislý na jednom předchozím členu: $f(n + 1) = F(n, f(n))$

2.1 Fibonacciho posloupnost.

Známa posloupnost je příkladem rekurentního vztahu, v němž pro každý další člen potřebujeme znát dva členy předchozí:

Rekurentní vztahy. např. Fibonacciho posloupnost: $f_1 = 1, f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$; první členy: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Z rekurentního vztahu umíme v některých případech určit i tzv. vzorec pro n -tý člen, tj. návod, jak vypočítat f_n jen pomocí n .

2.2 Aritmetická posloupnost.

Aritmetická posloupnost. Posloupnost daná rekurentním vztahem $a_n = a_{n-1} + d$ (a prvním členem), kde d nazýváme diferencí. U této posloupnosti umíme sečíst prvních n členů; vzorec:

$$S_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2} = \frac{n(2a_1 + (n - 1)d)}{2}$$

Traduje se, že jednu z variant této úlohy vyřešil Karl Friedrich Gauss (1777–1855), když jako školák dostal za úkol sečíst čísla od 1 do 50 (někdy se tvrdí, že od 1 do 100). Všiml si, že součet 1 a 50 je stejný jako součet 2 a 49 a tak dále, tedy dvojnásobek hledaného součtu je $51 \cdot 50$.

Příklad 2.3 *Určete součet:*

$$S = 2n - 4 + 2n - 2 + 2n + \dots + 4n.$$

Řešení: Jedná se o aritmetickou posloupnost s diferencí 2; její první člen je v našem částečném součtu $2n - 4$, poslední $4n$, diference 2. Abychom mohli použít výše uvedený vzorec, potřebujeme znát počet sčítanců, který však není n . Pro určení tohoto počtu můžeme použít úvahu: n sčítanců by bylo v součtu

$$S_n = (2n - 4) + (2n - 2) + (2n) + \dots + (4n - 6),$$

čili scházejí tři sčítance, neboť

$$S - S_n = (4n - 4) + (4n - 2) + (4n)$$

Dosazením do výše uvedeného vzorce získáváme

$$S = (2n - 4 + 4n) \frac{n + 3}{2} = (3n - 2)(n + 3).$$

Rozmyslete si, že výsledkem zlomku bude pro posloupnost s celočíselnými členy vždy celé číslo.

2.3 Geometrická posloupnost.

Geometrická posloupnost. Posloupnost daná rekurentním vztahem $a_n = a_{n-1}q$ (a prvním členem), kde q nazýváme kvocientem. U této posloupnosti umíme sečíst prvních n členů, a to podle vzorce

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$$

Příklad 2.4 *Sečtěte:*

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$$

Řešení: Jedná se o geometrickou posloupnost s kvocientem 2; její první člen je 1, poslední (sedmý) 64. Podle vzorce

$$S_n = 1 \frac{1 - 2^7}{1 - 2} = 1 \frac{-127}{-1} = 127.$$