MA0002 — řešení DÚ č. 1

Cvičení 1.1 *Mezi městy A a B vede 5 cest, mezi městy B a C vedou 3 cesty. Kolik existuje navzájem různých cest z A do C přes B?*

Řešení:

Z města A do města B můžeme zvolit cestu pěti způsoby, nezávisle na tom z města B do města C můžeme dojít třemi způsoby. Díky nezávislosti těchto voleb můžeme použít pravidlo součinu, tedy $5 \cdot 3 = 15$.

Existuje 15 navzájem různých cest z A do C přes B.

Cvičení 1.2 *Kolika způsoby lze na šachovnici vybrat jedno bílé a jedno černé políčko?*

Řešení:

Standardní šachovnice má 64 políček, polovinu bílých, polovinu černých. Máme tedy 32 možností k výběru bílého políčka, stejně tak máme 32 možností k výběru černého políčka. Tyto výběry jsou na sobě nezávislé, proto použijeme pravidlo součinu a dostáváme $32 \cdot 32 = 1024$.

Na šachovnici můžeme vybrat jedno bílé a jedno černé políčko 1024 způsoby.

Cvičení 1.3 *Kolika způsoby lze ze 32 karet vybrat krále a dámu?*

Řešení:

V sadě 32 karet máme čtyři barvy (například ve francouzských kartách srdce, káry, piky a kříže), v každé barvě existuje jeden král a jedna dáma. Máme tedy 4 krále a 4 dámy. Krále mohu z balíčku karet vybrat čtyřmi způsoby, nezávisle na výběru krále mohu vybrat čtyřmi způsoby i dámu. Díky nezávislosti výběrů použijeme pravidlo součinu, tedy $4 \cdot 4 = 16$.

Krále a dámu můžeme z 32 karet vybrat 16 způsoby.

Cvičení 1.4 *Kolika způsoby můžeme vybrat jednu souhlásku a jednu samohlásku z písmen daných slov?*

(a) LAVICE

(b) KOLEJ

Řešení:

Nejprve se podívejme na slovo LAVICE. V tomto slově se nachází tři souhlásky a tři samohlásky. Souhlásku tedy můžeme vybrat třemi způsoby,

stejně tak i samohlásku. Výběry souhlásky a samohlásky jsou na sobě nezávislé, pomocí pravidla součinu tedy získáváme $3 \cdot 3 = 9$.
Obdobně nalezneme řešení i u slova KOLEJ. V něm máme tři souhlásky a dvě samohlásky, dohromady $3 \cdot 2 = 6$.

Jednu souhlásku a jednu samohlásku můžeme vybrat ze slova LAVICE 9 způsoby a ze slova KOLEJ 6 způsoby.

Cvičení 1.5 *Na tenisovém turnaji, kde hrál každý hráč s každým právě jednou, se odehrálo 91 zápasů. Kolik se ho zúčastnilo hráčů?*

Řešení:

Zadání nám říká, že organizátoři tenisového turnaje ze všech zúčastněných hráčů vytvořili 91 dvojic tak, že každý hráč hrál s každým hráčem právě jednou. Zřejmě nebylo rozlišováno mezi dvojicemi Berdych–Veselý a Veselý–Berdych, tedy ve vybraných dvojicích nezáleželo na pořadí hráčů. Po převedení do matematického jazyka pořadatelé vytvořili z určitého počtu hráčů 91 dvouprvkových kombinací.

$$\begin{aligned} \binom{x}{2} &= 91 \\ \frac{x!}{2!(x-2)!} &= 91 \\ x(x-1) &= 2 \cdot 91 \\ x^2 - x - 182 &= 0 \end{aligned}$$

Kořeny této kvadratické rovnice jsou čísla -13 a 14. Rozhodně se turnaje nezúčastnilo -13 hráčů, jediným správným výsledkem je proto 14.

Tenisového turnaje se zúčastnilo 14 hráčů.

Cvičení 1.6 *Kolik hráčů se zúčastnilo šachového turnaje, jestliže každý hráč hrál s každým právě jednou a bylo odehráno 21 partií?*

Řešení:

Toto cvičení je analogií cvičení předchozího. Vybíráme k sobě dvojice hráčů a samozřejmě nerozlišujeme dvojice Kasparov–Kramnik a Kramnik–Kasparov. Všichni účastníci šachového turnaje se tedy dají rozdělit do 21 dvojic, v nichž nezáleží na pořadí hráčů, tedy lze z jejich počtu vytvořit 21 dvouprvkových kombinací.

$$\begin{aligned} \binom{x}{2} &= 21 \\ \frac{x!}{2!(x-2)!} &= 21 \\ x(x-1) &= 2 \cdot 21 \\ x^2 - x - 42 &= 0 \end{aligned}$$

Kořeny dané kvadratické rovnice jsou čísla -6 a 7. Záporný počet hráčů nedává smysl, výsledkem je proto číslo 7.

Šachového turnaje se zúčastnilo 7 hráčů.

Cvičení 1.7 *Máme 28 kostek domina. Každá kostka má dvě políčka, na každém políčku je 0 až 6 teček a kostky domina jsou navzájem různé).*

(a) Kolik kostek domina má součet teček v obou polovinách 7 nebo 11?

(b) Kolika způsoby můžeme z 28 kostek domina vybrat dvě tak, abychom je mohli přiložit k sobě?

Řešení:

Je dobré si uvědomit, že v naší sadě kostek domina neexistují dvě různé kostky s políčky 5–3 a 3–5, taková kostka je pouze jedna (tyto kostky by byly ve skutečnosti stejné). Řešme nyní jednotlivé varianty:

(a) Součet 7 na políčkách dominové kostky můžeme získat pouze třemi kombinacemi čísel: $1 + 6$; $2 + 5$; $3 + 4$. Součet 11 nalezneme jedině na kostce $5 + 6$.

Součet teček na dominové kostce je 7 nebo 11 u 4 kostek.

(b) Představme si situaci, kdy můžeme kostky přiložit k sobě (kostky mají na jedné straně stejný počet teček). Označme si počty teček na jedné kostce a–b (na jedné polovině a teček, na druhé b teček). K takové kostce můžeme jistě přiložit kostku b–c. Kolik existuje takových dvojic kostek?

Nejprve předpokládejme, že čísla a, b, c jsou po dvou různá. Za číslo a můžeme dosadit 7 různých hodnot $(0, 1, \ldots, 6)$, za číslo b už pouze 6 hodnot (aby bylo různé od a), číslo c volíme ze zbylých hodnot. Tyto volby jsou navzájem nezávislé, po využití pravidla součinu tedy zjistíme, že takových dvojic kostek můžeme nalézt $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. Při výpočtu jsme ale rozlišovali dvojice kostek a–b b–c a c–b b–a, výsledek tedy musíme vydělit dvěma a získáváme 105 dvojic.

Může nastat i situace, kdy nebudou hodnoty a, b, c po dvou různé? Ano, můžeme vytvořit dvojici z kostek a–b b–b. Pro určení počtu těchto dvojic opět využijeme pravidlo součinu, přičemž za číslo a mohu volit ze 7 hodnot, číslo b pak z 6 hodnot: $7 \cdot 6 = 42$. Popsali jsme dvě odlišné situace, které mohou nastat, počet všech dvojic k sobě patřících kostek domina je tedy součtem výsledných počtů v jednotlivých situacích. $105 + 42 = 147$

Dvě kostky, které lze přiložit k sobě, můžeme vybrat 147 způsoby.

Cvičení 1.8 *V balíčku 32 různých karet je 16 karet červených (srdce a káry) a 16 černých (piky a kříže). Kolika způsoby můžeme z balíčku vybrat pětici karet tak, aby mezi nimi bylo červených karet více než černých?*

Řešení:

Vybíráme-li pětici karet, nezáleží nám na pořadí, ve kterém jsme jednotlivé karty vybrali (klidně jsme mohli všechny karty vybrat najednou), jedná se o pětiprvkové kombinace z 32 karet. Pokud má být červených karet více než černých, mohou nastat následující situace: 5 červených; 4 červené a 1 černá; 3 červené a 2 černé. Jsou to tři odlišné situace, vyřešíme tedy každou z nich samostatně a následně využijeme pravidlo součtu. V první situaci vybíráme 5 karet z celkového počtu 16 červených karet, tedy pětiprvkovou kombinaci z 16 prvků $\binom{16}{5}$. V druhé situaci vybíráme 4 karty z 16 červených karet a (nezávisle na výběru červených karet) 1 kartu z 16 černých, tedy $\binom{16}{4} \cdot \binom{16}{1}$. Analogicky získáme počet možných výběrů 3 červených a 2 černých karet. Dohromady dostáváme $\binom{16}{5} + \binom{16}{4} \cdot \binom{16}{1} + \binom{16}{3} \cdot \binom{16}{2} = 100\,688$.

Pětici karet můžeme vybrat 100 688 způsoby.

Cvičení 1.9 *Kolika způsoby lze rozdělit zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili mezi 19 závodníků?*

Řešení:

Můžeme začít zlatou medailí: kolika způsoby lze vybrat závodníka, kterému ji udělíme? Zřejmě máme 19 možností. Pro stříbrnou medaili už máme možností pouze 18 (nositel zlaté medaile nemůže být i nositelem stříbrné) a pro bronzovou nám zbývá 17 možných závodníků. Jednotlivé výběry na sobě byly nezávislé, využijeme tedy pravidlo součinu a získáváme $19 \cdot 18 \cdot 17 = 5\,814$.

Medaile lze mezi 19 závodníků rozdělit 5 814 způsoby.

Cvičení 1.10 *Kolika způsoby lze z 25 členů společnosti vybrat předsedu, místopředsedu, tajemníka a pokladníka?*

Řešení:

Postup je analogický předchozímu cvičení. Nejdříve vybereme předsedu, na toto místo máme 25 kandidátů. Následně zvolíme místopředsedu, počet kandidátů je ovšem 24, protože pro zachování demokracie smí každý člen společnosti zastávat nejvýše jednu funkci. Pro výběr tajemníka zbývá 23 možností a pokladníka volíme z 22 členů. Jednotlivé volby jsou na sobě nezávislé, výsledek tedy získáme s pomocí pravidla součinu $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600$.

Do daných funkcí můžeme zvolit členy 303 600 způsoby.

Cvičení 1.11 *Kolika způsoby lze srovnat do poličky 20 různých knih? (Knihy zaberou beze zbytku celou poličku.)*

Řešení:

Knihy v poličce přesouváme, hledáme počet jejich různých pořadí, matematicky řečeno, hledáme počet všech jejich permutací.
$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$.

Knihy lze do poličky srovnat 2 432 902 008 176 640 000 způsoby.

Cvičení 1.12 *V rovině je dáno několik přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jediném bodě. Kolik přímek je dáno, pokud tak vznikne 55 různých průsečíků?*

Řešení:

Jestliže žádné dvě přímky nejsou rovnoběžné a žádné tři přímky se neprotínají v jediném bodě, pak se každé dvě přímky protínají v jednom bodě, tvoří jeden průsečík. Jinak řečeno, existuje tolik průsečíků, kolik existuje dvojic přímek. Převedeme-li tvrzení do kombinatorického jazyka, ze všech přímek lze vytvořit 55 dvouprvkových kombinací.

$$\begin{aligned}\binom{x}{2} &= 55\\ \frac{x!}{2!(x-2)!} &= 55\\ x(x-1) &= 2\cdot 55\\ x^2-x-110 &= 0\end{aligned}$$

Kořeny této rovnice jsou čísla -10 a 11. Nemá smysl uvažovat -10 přímek, máme tedy jediné řešení.

V rovině je dáno 11 přímek.

Cvičení 1.13 *Kolik různých třítónových popěvků lze vytvořit z osmi tónů?*

Řešení:

Zřejmě tóny popěvku musí být po dvou různé, jinak bychom nemohli hovořit o třítónovém popěvku. První tón popěvku můžeme vybrat osmi způsoby, pro druhý tón zbylo už pouze sedm možností a poslední tón volíme z šesti zbývajících tónů. Volby tónů (nezáleží nám na libozvučnosti) jsou na sobě nezávislé, proto použijeme pravidlo součinu a dostáváme $8\cdot 7\cdot 6 = 336$.

Z osmi tónů lze vytvořit 336 třítónových popěvků.

Cvičení 1.14 *Kolika způsoby lze na šachovnici* 8×8 *rozmístit věž, koně, krále a dámu?*

Řešení:

Na šachovnici je 64 políček, na které figurky postupně rozmístíme. Na jednom políčku smí stát nejvýše jedna figurka. Věž můžeme umístit na kterékoli políčko, máme tedy 64 možností. Následně umístíme koně na nějaké volné políčko, těch je 63, pro krále nám zbývá 62 možností umístění a pro dámu 61. Jednotlivá umístění jsou na sobě nezávislá, pomocí pravidla součinu tedy získáváme $64\cdot 63\cdot 62\cdot 61 = 15\,249\,024$.

Figurky lze na šachovnici rozmístit 15 249 024 způsoby.

Cvičení 1.15 *Kolika způsoby lze ze třídy o 30 žácích vybrat trojici nástěnkář, šatnář a pokladník? (Každé dítě má jen jednu „funkci“.)*

Řešení:

Volme postupně žáky do funkcí. Nástěnkáře můžeme vybírat z 30 žáků, šatnáře z 29 žáků (jeden žák už je nástěnkář) a pokladníka z 28 žáků. Výběry jsou na sobě nezávislé, dohromady tedy $30\cdot 29\cdot 28 = 24\,360$.

Trojici žáků můžeme vybrat 24 360 způsoby.

Cvičení 1.16 *Kolika způsoby lze sestavit třítónový akord z osmi různých tónů?*

Řešení:

V třítónovém akordu neexistuje pořadí jednotlivých tónů, všechny se hrají zároveň, zajímá nás pouze kombinace tří tónů.
$\binom{8}{3} = 56$

Třítónový akord z osmi různých tónů lze sestavit 56 způsoby.

Cvičení 1.17 *Kolika způsoby lze v krabičce uspořádat 12 pastelek?*

Řešení:

V krabičce měníme pořadí pastelek, vytváříme jejich různé permutace.
$12! = 479\,001\,600$

Pastelky lze uspořádat 479 001 600 způsoby.

Cvičení 1.18 *Kolika způsoby si můžete v ruce do vějíře seřadit 8 karet, které Vám byly rozdány?*

Řešení:

Stejně jako v předchozím příkladě máme určit počet různých pořadí 8 karet, počet jejich permutací.
$8! = 40\,320$

Karty lze seřadit 40 320 způsoby.

Cvičení 1.19 *Kolik existuje devítimístných telefonních čísel, v nichž se nevyskytuje nula a žádná cifra se neopakuje?*

Řešení:

Nesmí-li se mezi ciframi vyskytovat nula, můžeme použít 9 různých cifer $(1, 2, \ldots, 9)$. Jelikož se žádná cifra neopakuje, jsme nuceni využít všech devět povolených cifer a hledáme pouze jejich různá pořadí (permutace).
$9! = 362\,880$

Existuje 362 880 čísel splňujících zadání.

Cvičení 1.20 *Kolika způsoby lze na šachovnici rozestavit čtyři stejné pěšáky?*

Řešení:

Pěšáky nemůžeme rozlišit, proto nám nezáleží na pořadí vybraných políček jako ve cvičení 1.14, ale vybíráme najednou čtveřici políček šachovnice.
$\binom{64}{4} = 635\,376$

Čtyři stejné pěšáky lze rozestavit 635 376 způsoby.

Cvičení 1.21 *Kolika způsoby lze ze třídy o 30 žácích vybrat 6 žáků pro volejbalový turnaj? (Na výkonnosti nezáleží.)*

Řešení:

Zapomeňme na hodiny tělocviku, kdy nám na pořadí výběru hráčů záleželo. V této situaci jde pouze o to, zda daný žák vybraný byl, vybíráme tedy kombinace 6 žáků z 30.
$\binom{30}{6} = 593\,775$

Žáky na turnaj lze vybrat 593 775 způsoby.

Cvičení 1.22 *Kolika způsoby lze vybrat 8 karet z 32?*

Řešení:

Danou úlohu je možné pojmout různými způsoby. Prvním z nich je takový, že záleží na pořadí tahu karet, například pokud karty rozdáváme osmi hráčům. Pak bychom hledali počet všech osmiprvkových variací z 32 prvků.
$32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot \dots \cdot 25 = 424\,097\,856\,000$

Nezáleží-li na pořadí výběru karet, hledáme počet osmiprvkových kombinací z 32.
$\binom{32}{8} = 10\,518\,300$

Karty lze vybrat 424 097 856 000 způsoby, pokud záleží na pořadí výběru, nebo 10 518 300 způsoby, když na pořadí výběru nezáleží.

Cvičení 1.23 *Určete, kolik různých „slov“ vznikne záměnou pořadí písmen slov:*

(a) POPOCATEPETL

(b) ABRAKADABRA

(c) ACAPULCO

(d) ACONCAGUA

Řešení:

Záměnou pořadí písmen zřejmě získáváme jejich různé permutace. Musíme si však dát pozor, že ne každou záměnou získáme nové „slovo“ – zaměníme-li například ve variantě (a) první a třetí písmeno, slovo zůstane stejné. Počet všech permutací písmen musíme tedy vydělit počtem permutací stejných písmen (to je vzorec pro určení počtu permutací s opakováním).

(a) Určeme si četnost každého písmene ve slově POPOCATEPETL:
3×P, 2×O, 1×C, 1×A, 2×T, 2×E a 1×L.
Počet písmen ve slově je 12, jejich počet permutací dělíme počty permutací jednotlivých písmen.
$\frac{12!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 9\,979\,200.$

Záměnou pořadí písmen vznikne 9 979 200 různých „slov“.

(b) Určeme si četnost každého písmene ve slově ABRAKADABRA:
$5\times$A, $2\times$B, $2\times$R, $1\times$K a $1\times$D.
Počet písmen ve slově je 11, jejich počet permutací dělíme počty permutací jednotlivých písmen.
$\frac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!} = 83\,160$.

ZÁMĚNOU POŘADÍ PÍSMEN VZNIKNE 83 160 RŮZNÝCH „SLOV“.

(c) Určeme si četnost každého písmene ve slově ACAPULCO:
$2\times$A, $2\times$C, $1\times$P, $1\times$U, $1\times$L a $1\times$O.
Počet písmen ve slově je 8, jejich počet permutací dělíme počty permutací jednotlivých písmen.
$\frac{8!}{2!\cdot 2!} = 10\,080$.

ZÁMĚNOU POŘADÍ PÍSMEN VZNIKNE 10 080 RŮZNÝCH „SLOV“.

(d) Určeme si četnost každého písmene ve slově ACONCAGUA:
$3\times$A, $2\times$C, $1\times$O, $1\times$N, $1\times$G a $1\times$U.
Počet písmen ve slově je 9, jejich počet permutací dělíme počty permutací jednotlivých písmen.
$\frac{9!}{3!\cdot 2!} = 30\,240$.

ZÁMĚNOU POŘADÍ PÍSMEN VZNIKNE 30 240 RŮZNÝCH „SLOV“.

Cvičení 1.24 *Nechť jsou dána písmena a, b, c, d, e, f, g.*

(a) Kolik „slov“ o pěti písmenech se z nich dá sestavit?

(b) Kolik lze takových „slov“ sestavit, pokud se písmena nesmí opakovat?

Řešení:

(a) Jednotlivá písmena se ve „slovech“ mohou vyskytovat vícekrát, proto pro volbu každého z pěti písmen máme 7 možností, volby písmen jsou na sobě nezávislé (jedná se o variace s opakováním).
$7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7 = 7^5 = 16\,807$

Z PÍSMEN LZE SESTAVIT 16 807 „SLOV“.

(b) Jestliže se písmena nesmí opakovat, můžeme první písmeno zvolit 7 způsoby, druhé písmeno 6 způsoby (jedno písmeno už je zakázané) a tak dále, přičemž jednotlivé volby jsou na sobě nezávislé (variace bez opakování).
$7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2\,520$

Z PÍSMEN LZE SESTAVIT 2 520 „SLOV“ BEZ OPAKOVÁNÍ PÍSMEN.

Cvičení 1.25 *Kolika způsoby lze darovat 5 různých knížek třem různým lidem, máme-li alespoň 3 kusy každé knížky a dostane-li každý člověk jednu knihu?*

Řešení:

Postavme si tři lidi do řady a postupně jim dávejme knížky – pro každého máme pět možností výběru a volby knih jsou na sobě nezávislé, tedy $5^3 = 125$.

KNÍŽKY LZE DAROVAT 125 ZPŮSOBY.

Cvičení 1.26 *Kolika způsoby si může 15 dětí ve výtvarném kroužku vybrat, které ze tří zvířátek budou malovat? (Každý bude malovat jedno zvířátko, mohou všichni malovat to stejné.)*

Řešení:

Každé dítě má tři možnosti výběru, přičemž výběry jednotlivých dětí jsou na sobě nezávislé, proto existuje $3^{15} = 14\,348\,907$ výběrů.

DĚTI SI MOHOU VYBRAT ZVÍŘÁTKA 14 348 907 ZPŮSOBY.

Cvičení 1.27 *Kolik různých trojic čísel může padnou při hodu třemi stejnými kostkami?*

Řešení:

Jednou z možností řešení daného cvičení je systematické vypsání všech možných kombinací. Na úlohu se však můžeme dívat i jako na kombinace s opakováním, neznáme-li vzorec, můžeme si jej jednoduše odvodit. Je třeba si uvědomit, že kostky jsou stejné. Přiřazujme k jednotlivým počtům ok kostky, tedy přiřazujme kostky do pomyslných přihrádek. Přepážek mezi těmito přihrádkami je pět (nerozlišitelných), kostky jsou tři. Nechme mezi sebou permutovat těchto 8 prvků, získáme $\frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$.

MŮŽE PADNOUT 56 RŮZNÝCH TROJIC ČÍSEL.

Cvičení 1.28 *Kolika způsoby lze najednou vybrat 8 karet z 32 karet čtyř barev, pokud nám záleží pouze na barvě karty, nikoliv na její hodnotě?*

Řešení:

Hledáme kombinace osmi karet čtyř možných barev s možností opakování barev, přičemž karet každé barvy máme dostatečné množství. Vzorec pro výpočet lze odvodit stejně jako v předchozím cvičení, do čtyř přihrádek symbolizujících různé barvy (3 stejné přepážky) přiřazujeme jednotlivé karty.
$\frac{11!}{8!\cdot 3!} = 165$

KARTY LZE VYBRAT 165 ZPŮSOBY.

Cvičení 1.29 *Kolika způsoby lze ze sáčku, v němž je 5 kuliček zelených, 4 modré, 3 červené a 7 žlutých vybrat trojici kuliček?*

Řešení:

Kuličky jednotlivých barev od sebe nelze rozlišit, hledáme tedy kombinace tří kuliček, u nichž rozlišujeme pouze jejich barvu (může být taženo více kuliček stejné barvy, od každé barvy máme dostatečné množství kuliček). Úlohu lze vyřešit buďto výčtem všech možností, nebo podobně jako v předchozím cvičení vložme každou z trojice kuliček do přihrádky symbolizující její barvu (mezi přihrádkami jsou 3 stejné přepážky) a nechme mezi sebou permutovat přepážky a kuličky.
$\frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$

TROJICI KULIČEK LZE VYBRAT 20 ZPŮSOBY.