

# MA0002 — řešení DÚ č. 2

**Cvičení 2.1** *Vypočtěte:*

(a)  $8!$

(b)  $\binom{42}{4}$

(c)  $\binom{65}{61}$

Řešení:

Dosazením získáváme (a) 40 320; (b) 111 930; (c) 677 040.

**Cvičení 2.2** *Ve třídě je 13 chlapců a 15 dívek. Kolika způsoby z nich lze vytvořit šestičlenné družstvo takové, aby v něm bylo alespoň tolik dívek, jako chlapců?*

Řešení:

Má-li být v družstvu alespoň tolik dívek, kolik chlapců, máme čtyři možnosti skladby s ohledem na pohlaví – 3 dívky a 3 chlapci, 4 dívky a 2 chlapci, 5 dívek a 1 chlapec, nebo 6 dívek. Pro každou z těchto možností vypočítáme počet možných voleb, výsledné počty poté sečteme.

V prvním případě vybíráme trojici z 15 dívek a nezávisle na tomto výběru trojici ze 13 chlapců, možností výběru je  $\binom{15}{3} \cdot \binom{13}{3}$ . Stejným způsobem určíme počet možných družstev i pro zbylé případy a jednotlivé počty sečteme.  $\binom{15}{3} \cdot \binom{13}{3} + \binom{15}{4} \cdot \binom{13}{2} + \binom{15}{5} \cdot \binom{13}{1} + \binom{15}{6} = 280\,644$

DRUŽSTVO LZE VYTVOŘIT 280 644 ZPŮSOBY.

**Cvičení 2.3** *Kolika způsoby lze na šachovnici rozestavit 8 věží tak, aby se navzájem neohrožovaly?*

Řešení:

Dle pravidel šachů věž ohrožuje figurky stojící ve stejném sloupci nebo řádku. Vždy, když vybereme políčko pro jednu věž, „zakážeme“ všechna políčka v tomtéž řádku i sloupci. Po umístění sedmé věže nám zůstane pouze jedno volné „nezakázané“ políčko pro poslední věž. Každé další možné umístění 8 věží je některou permutací řádků (nebo sloupců) šachovnice, kterých existuje  $8! = 40\,320$ .

VĚŽE MŮŽEME UMÍSTIT 40 320 ZPŮSOBY.

**Cvičení 2.4** *Kolika způsoby lze 26 znakům přiřadit 26 různých zvuků? Uveďte odhad.*

Řešení:

Zafixujme si pořadí zvuků a k nim hledejme různá pořadí znaků. Jejich počet je  $26! \doteq 4,03 \cdot 10^{26}$ .

ZNAKY LZE KE ZVUKŮM PŘIŘADIT PŘIBLIŽNĚ  $4,03 \cdot 10^{26}$  ZPŮSOBY.

**Cvičení 2.5** Kolika způsoby lze 26 znakům přiřadit 26 různých zvuků, víme-li, kterých 6 znaků patří samohláskám? Uvedte odhad.

(a) Víme konkrétně který znak patří které samohlásce.

(b) Víme, kterých 6 znaků patří samohláskám, nevíme však, který znak patří které samohlásce.

Řešení:

(a) Znaků patřící samohláskám jsou dané, zbývá nám pouze spočítat počet přiřazení znaků souhláskám. Zafixujeme si pořadí 20 souhlásek a hledejme k nim různá pořadí znaků patřícím souhláskám.

$$20! \doteq 2,43 \cdot 10^{18}$$

ZNAKY LZE KE ZVUKŮM PŘIŘADIT PŘIBLIŽNĚ  $2,43 \cdot 10^{18}$  ZPŮSOBY.

(b) Zafixujeme si pořadí 6 samohlásek a k nim hledejme různá pořadí znaků patřících samohláskám (různých pořadí je  $6!$ ). Stejně tak určíme nezávisle na pořadí samohlásek počet přiřazení zbylých 20 znaků a zvuků.

$$6! \cdot 20! \doteq 1,75 \cdot 10^{21}$$

ZNAKY LZE KE ZVUKŮM PŘIŘADIT PŘIBLIŽNĚ  $1,75 \cdot 10^{21}$  ZPŮSOBY.

**Cvičení 2.6** Kolika způsoby lze 26 znakům přiřadit 26 různých zvuků, známe-li znaky pro 4 z 6 samohlásek (víme, který znak patří které samohlásce) a pro 13 z 20 souhlásek (víme, který znak patří které souhlásce)?

Řešení:

Zbývá nám přiřadit znaky k 7 souhláskám a 2 samohláskám, dohromady k 9 zvukům, to uděláme podobně jako v předchozích cvičeních.

$$9! = 362\,880$$

ZNAKY LZE KE ZVUKŮM PŘIŘADIT 362 880 ZPŮSOBY.

**Cvičení 2.7** Sedm dívek tančí v kruhu. Kolika různými způsoby mohou být v kruhu seřazeny?

Řešení:

Nejdříve určíme počet různých pořadí dívek v řadě, těch je  $7!$ . Rozdíl mezi řadou a kruhem je takový, že u kruhu nelze určit začátek – každou ze  $7!$  řad máme tedy v počtu kruhů započítanou sedmkrát. Proto získáváme  $7! : 7 = 720$  různých pořadí v kruhu.

DÍVKY MOHOU BÝT SEŘAZENY 720 ZPŮSOBY.

**Cvičení 2.8** Kolik různých náhrdelníků je možno sestavit ze 7 různých korálek?

Řešení:

Úloha je velmi podobná předchozí úloze, jediným rozdílem je, že náhrdelník můžeme i přetočit (to u dívek nebylo možné, tančily by hlavou dolů). Dva různé náhrdelníky lišící se pouze o přetočení považujeme za jeden, proto různých náhrdelníků bude poloviční počet kruhů dívek z předchozího příkladu.

$$\frac{7!}{7 \cdot 2} = 360$$

LZE SESTAVIT 360 RŮZNÝCH NÁHRDELNÍKŮ.

**Cvičení 2.9** Porovnejte:  $152! + 151!$  a  $150! + 153!$

Řešení:

$$\begin{array}{rcl} 152! + 151! & & 150! + 153! \\ 150!(152 \cdot 151 + 151) & & 150!(1 + 153 \cdot 152 \cdot 151) \\ 150! \cdot 23\,104 & < & 150! \cdot 3\,511\,657 \end{array}$$

**Cvičení 2.10** Seřadte dle velikosti následující kombinační čísla:

(a)  $\binom{152}{17}$

(b)  $\binom{153}{17}$

(c)  $\binom{152}{135}$

Řešení:

(a)  $\binom{152}{17}$

(b)  $\binom{153}{17} = \binom{152}{17} + \binom{152}{16}$

(c)  $\binom{152}{135} = \binom{152}{152-135} = \binom{152}{17}$

$$\binom{152}{17} = \binom{152}{135} < \binom{153}{17}$$

**Cvičení 2.11** Vypočtete:  $\binom{45}{3}$

Řešení:

$$\binom{45}{3} = \frac{45!}{3!42!} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43}{3 \cdot 2} = 15 \cdot 22 \cdot 43 = 14\,190$$

**Cvičení 2.12** Vypočtete:  $\binom{72}{68}$

Řešení:

$$\binom{72}{68} = \frac{72!}{68!4!} = \frac{72 \cdot 71 \cdot 70 \cdot 69}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 71 \cdot 70 \cdot 69 = 1\,028\,790$$

**Cvičení 2.13** Sečtete:  $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3}$

Řešení:

$$\begin{aligned} \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} &= \frac{3!}{3!0!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{6!}{3!3!} + \frac{7!}{3!4!} = \\ &= \frac{1}{1} + \frac{4}{1} + \frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 = 70 \end{aligned}$$

**Cvičení 2.14** Sečtete:  $\binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5}$

Řešení:

$$\begin{aligned} \binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5} &= \frac{5!}{5!0!} + \frac{6!}{5!1!} + \frac{7!}{5!2!} + \frac{8!}{5!3!} + \frac{9!}{5!4!} = \\ &= \frac{1}{1} + \frac{6}{1} + \frac{7 \cdot 6}{2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1 + 6 + 21 + 56 + 126 = 210 \end{aligned}$$

**Cvičení 2.15** Vyjádřete jedním kombinačním číslem a vyčíslete:

(a)  $\binom{9}{4} + \binom{9}{6}$

(b)  $\binom{11}{2} + \binom{11}{8}$

(c)  $\binom{12}{5} + \binom{12}{6}$

Řešení:

(a)  $\binom{9}{4} + \binom{9}{6} = \binom{9}{5} + \binom{9}{6} = \binom{10}{6} = 210$

(b)  $\binom{11}{2} + \binom{11}{8} = \binom{11}{2} + \binom{11}{3} = \binom{12}{3} = 220$

(c)  $\binom{12}{5} + \binom{12}{6} = \binom{13}{6} = 1716$

**Cvičení 2.16** Vypočtete:  $8!$ ,  $\binom{42}{4}$ ,  $\binom{65}{61}$

Řešení:

$$8! = 40320$$

$$\binom{42}{4} = \frac{42!}{4! \cdot 38!} = \frac{42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 41 \cdot 10 \cdot 39 = 111930$$

$$\binom{65}{61} = \frac{65!}{61! \cdot 4!} = \frac{65 \cdot 64 \cdot 63 \cdot 62}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 65 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 62 = 677040$$

**Cvičení 2.17** Zjednodušte:  $\frac{(n+2)!}{(n)!} - \frac{n!(n^2+3n+2)}{(n+1)!} - \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

Řešení:

$$\begin{aligned} \frac{(n+2)!}{(n)!} - \frac{n!(n^2+3n+2)}{(n+1)!} - \frac{(n+1)!}{(n-1)!} &= (n+2)(n+1) - \frac{(n+1)(n+2)}{n+1} - (n+1)n = \\ &= n^2 + 3n + 2 - (n+2) - (n^2 + n) = n \end{aligned}$$

**Cvičení 2.18** Dokažte:  $n! + (n-1)!n^2 = (n+1)!$

Řešení:

Upravujme postupně levou stranu

$$n! + (n-1)!n^2 = n! + n!n = n!(1+n) = (n+1)!$$

**Cvičení 2.19** Sečtete:  $\frac{(n+2)!}{n!} - 2\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}$

Řešení:

$$\begin{aligned} \frac{(n+2)!}{n!} - 2\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} &= (n+2)(n+1) - 2(n+1)n + n(n-1) = \\ &= n^2 + 3n + 2 - 2n^2 - 2n + n^2 - n = 2 \end{aligned}$$

**Cvičení 2.20** Najděte všechna  $n \in \mathbb{N}$ , pro něž platí:

$$\binom{n-1}{n-3} + \binom{n-2}{n-4} = 4$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{n-3} + \binom{n-2}{n-4} &= 4 \\ \frac{(n-1)!}{(n-3)! \cdot 2!} + \frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!} &= 4 \\ \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} &= 4 \\ (n-1)(n-2) + (n-2)(n-3) &= 8 \\ n^2 - 3n + 2 + n^2 - 5n + 6 &= 8 \\ 2n^2 - 8n &= 0 \\ 2n(n-4) &= 0\end{aligned}$$

V kombinačním čísle se nesmí vyskytovat záporná čísla, proto nemá rovnice pro  $n = 0$  smysl a jediným řešením je  $n = 4$ .

**Cvičení 2.21** Zjednodušte:  $\frac{(p+1)!}{(p-1)!} - \frac{(p+5)!}{(p+4)!} - \frac{(p-5)!}{(p-7)!}$

Řešení:

$$\begin{aligned}\frac{(p+1)!}{(p-1)!} - \frac{(p+5)!}{(p+4)!} - \frac{(p-5)!}{(p-7)!} &= (p+1)p - (p+5) - (p-5)(p-6) = \\ &= p^2 + p - p - 5 - p^2 + 11p - 30 = 11p - 35\end{aligned}$$