MA0002 — řešení DÚ č. 3

Cvičení 3.1 *Rozviňte podle binomické věty:* $(\frac{1}{5} - i)^8$

Řešení:

Připomeňme rovnosti $i^2 = -1; i^3 = -i; i^4 = 1; i^5 = i$.

$$\binom{8}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^8 i^0 - \binom{8}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^7 i^1 + \binom{8}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^6 i^2 - \binom{8}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^5 i^3 + \binom{8}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4 i^4 - \binom{8}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^3 i^5 + \binom{8}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^2 i^6 -$$
$$- \binom{8}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^1 i^7 + \binom{8}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^0 i^8 = \frac{1}{5^8} - \frac{8}{5^7} i - \frac{28}{5^6} + \frac{56}{5^5} i + \frac{70}{5^4} - \frac{56}{5^3} i - \frac{28}{5^2} + \frac{8}{5} i + 1$$

Cvičení 3.2 *Rozviňte podle binomické věty:* $(-i + \frac{1}{3})^7$

Řešení:

Řešíme analogicky předchozímu cvičení, zadání můžeme upravit na $(\frac{1}{3} - i)^7$.

$$\binom{7}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^7 i^0 - \binom{7}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^6 i^1 + \binom{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^5 i^2 - \binom{7}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^4 i^3 + \binom{7}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^3 i^4 - \binom{7}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2 i^5 + \binom{7}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^1 i^6 -$$
$$- \binom{7}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^0 i^7 = \frac{1}{3^7} - \frac{7}{3^6} i - \frac{21}{3^5} + \frac{35}{3^4} i + \frac{35}{3^3} - \frac{21}{3^2} i - \frac{7}{3} + 1$$

Cvičení 3.3 *Užitím binomické věty dokažte, že výraz* $40^n - 8^n - 5^n + 1$ *je pro každé n dělitelný číslem 28.*

Řešení:

$$\begin{array}{rcl}
28 & | & 40^n - 8^n - 5^n + 1 \\
28 & | & 8^n(5^n - 1) - (5^n - 1) \\
28 & | & (5^n - 1)(8^n - 1) \\
28 & | & ((4+1)^n - 1)((7+1)^n - 1) \\
28 & | & (4^n + 4^{n-1} + \cdots + 4 + 1 - 1)(7^n + 7^{n-1} + \cdots + 7 + 1 - 1) \\
28 & | & (4^n + 4^{n-1} + \cdots + 4)(7^n + 7^{n-1} + \cdots + 7) \\
28 & | & 4(4^{n-1} + 4^{n-2} \cdots + 1)7(7^{n-1} + 7^{n-2} + \cdots + 1) \\
28 & | & 28(4^{n-1} + 4^{n-2} \cdots + 1)(7^{n-1} + 7^{n-2} + \cdots + 1)
\end{array}$$

Cvičení 3.4 *Užitím binomické věty dokažte, že výraz* $42^n - 7^n - 6^n + 1$ *je pro každé* n *dělitelné číslem 30.*

Řešení:

$$\begin{array}{lcl}
30 & | & 42^n - 7^n - 6^n + 1 \\
30 & | & 7^n(6^n - 1) - (6^n - 1) \\
30 & | & (6^n - 1)(7^n - 1) \\
30 & | & ((5+1)^n - 1)((6+1)^n - 1) \\
30 & | & (5^n + 5^{n-1} + \cdots + 5 + 1 - 1)(6^n + 6^{n-1} + \cdots + 6 + 1 - 1) \\
30 & | & (5^n + 5^{n-1} + \cdots + 5)(6^n + 6^{n-1} + \cdots + 6) \\
30 & | & 5(5^{n-1} + 5^{n-2} \cdots + 1)6(6^{n-1} + 6^{n-2} + \cdots + 1) \\
30 & | & 30(5^{n-1} + 5^{n-2} \cdots + 1)(6^{n-1} + 6^{n-2} + \cdots + 1)
\end{array}$$

Cvičení 3.5 *Zdůvodněte(vlastními slovy), proč platí následující kombinatorické identity:*

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

(c) $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$

(d)* $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}$

Řešení:

(a) Každý řádek Pascalova trojúhelníku je symetrický. Po rozepsání kombinačního čísla na pravé straně získáváme

$\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

(b) Právě popsaným způsobem tvoříme v Pascalově trojúhelníku každý další řádek. Dokažme si platnost rovnosti:

$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} =$

$= \frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

(c) Přepíšeme-li $2^n = (1+1)^n$, získáváme po rozvinutí podle binomické věty pravou stranu zadané rovnosti.

(d*) Přepíšeme-li $0 = 0^n = (1-1)^n$, získáváme po rozvinutí podle binomické věty pravou stranu zadané rovnosti.

Cvičení 3.6 *Dokažte, že platí:*

(a) $1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$

(b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + m \cdot (m+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$

Pokud vás nenapadne jiné řešení, dokažte alespoň matematickou indukcí.

Řešení:

(a) Lze konstatovat, že pravou stranu rovnosti získáme dosazením do vzorce pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti. Proveďme důkaz platnosti vzorce:

Nechť m je sudé číslo. Pak lze všechny sčítance rozdělit do dvou sloupců o stejném počtu řádků následovně:

$$\begin{array}{cc} 1 & m \\ 2 & m-1 \\ 3 & m-2 \\ & \vdots \\ \frac{m}{2} & \frac{m}{2}+1. \end{array}$$

Řádků je $\frac{m}{2}$, v každém z nich je součet roven $m+1$, sečtením řádků získáváme $\frac{m(m+1)}{2}$.

Nechť m je liché číslo. Abychom mohli užít stejnou konstrukci, jakou jsme použili u sudých čísel, odeberme číslo m. V řádku vedle 1 tedy bude $m-1$ a součet každého řádku bude m. Počet řádků je $\frac{m-1}{2}$, jejich součet vyjádříme jako $\frac{(m-1)m}{2}+m=\frac{m(m+1)}{2}$. Tím je důkaz dokončen.

(b) Druhou variantu dokážeme matematickou indukcí.

Ověřme pro $m=1$: $L=1\cdot 2=2$ $P=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}=2$

Předpokládejme, že rovnost platí pro $m-1$ a z předpokladu dokažme platnost pro m:

$L=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(m-1)\cdot m+m\cdot(m+1)=\frac{(m-1)m(m+1)}{3}+$

$+m\cdot(m+1)=\frac{m(m+1)(m-1+3}{3}=\frac{m(m+1)(m+2)}{3}=P$

Cvičení 3.7 *Kolika způsoby můžeme přeskládat písmena slova*

(a) TIKTAK

(b) TARTAR

tak, aby nikdy nestála vedle sebe stejná písmena?

Řešení:

(a) Využijeme princip inkluze a exkluze: od celkového počtu přeskládání písmen odečteme ta přeskládání, v nichž stojí vedle sebe jedna dvojice písmen (T, respektive K) a přičteme přeskládání, v nichž jsou vedle sebe dvojice T i K.

Celkový počet přeskládání určíme jako permutaci s opakováním: $\frac{6!}{2!\cdot 2!}$. Má-li být vedle sebe dvojice písmen T, můžeme si tuto dvojici „slepit“ a považovat ji za jeden znak, počet všech takových přeskládání je $\frac{5!}{2!}$ (stejný počet získáme pro dvojici písmen K, výraz proto vynásobíme dvěma). Mají-li být vedle sebe písmena T i písmena K, opět dvojice stejných písmen „slepíme“ a považujeme za jeden znak, počet takových přeskládání určíme jako permutaci čtyř různých prvků.

$\frac{6!}{2!\cdot 2!}-2\cdot\frac{5!}{2!}+4!=84$

Písmena slova TIKTAK lze přeskládat 84 způsoby.

(b) Opět využijeme princip inkluze a exkluze: od celkového počtu přeskládání písmen odečteme ta přeskládání, v nichž stojí vedle sebe jedna dvojice písmen (dvojice T, dvojice A, nebo dvojice R), přičteme přeskládání, v nichž stojí vedle sebe dvě dvojice písmen (dvojice T a A, dvojice A a R, nebo dvojice T a R) a odečteme přeskládání, v nichž stojí vedle sebe všechny tři dvojice písmen.

Počet všech přeskládání písmen slova TARTAR je počet všech permutací s opakováním $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$. Bude-li jedna dvojice stejných písmen „slepena" a považována za jedno písmeno, bude počet přeskládání $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$. Toto bude platit pro dvojici písmen T, dvojici písmen A i dvojici písmen R, proto lomený výraz vynásobíme třemi. Následně určeme počet přeskládání písmen, v nichž budou stát vedle sebe (budou „slepené") dvě dvojice písmen. Pokud budeme každou ze spojených dvojic považovat za jeden znak, získáme $\frac{4!}{2!}$, přičemž tento výraz opět vynásobíme třemi, protože mohou být tři různé dvojice „slepených" písmen: TA, AR, TR. Nakonec uvažujme počet přeskládání, v nichž každou ze tří dvojic stejných písmen „slepíme". Dostáváme tak tři různé nové znaky, počet jejich permutací je 3!.

$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} - 3 \cdot \frac{5!}{2!\cdot 2!} + 3 \cdot \frac{4!}{2!} - 3! = 30$

Písmena slova TARTAR lze přeskládat 30 způsoby.

Cvičení 3.8 *Určete součet všech pěticiferných čísel, která lze složit z číslic 1, 2, 3, 4, 5 tak, že každou číslici použijeme právě jednou.*

Řešení:

Určeme nejdříve počet těchto čísel. Protože se mezi ciframi nevyskytuje 0, můžeme je mezi sebou jednoduše permutovat a získáme tak $5! = 120$ pěticiferných čísel. Podíváme-li se na ně blíže, zjistíme, že na místě jednotek se vyskytují jednotlivé cifry stejně často, konkrétně se zde vyskytuje každá z cifer $1, 2, \ldots 5$ čtyřiadvacetkrát. Stejně tomu bude i na místě desítek, stovek a dalších. Součet cifer na každém z míst (jednotky, desítky,...) je $24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 360$. Chceme-li určit součet všech daných pěticiferných čísel, sečteme si součty jednotek, desítek a tak dále vždy vynásobený příslušnou hodnotou.

$1 \cdot 360 + 10 \cdot 360 + 100 \cdot 360 + 1\,000 \cdot 360 + 10\,000 \cdot 360 = 3\,999\,960$

Součet pěticiferných čísel je 3 999 960.

Cvičení 3.9 *Kolik existuje deseticiferných čísel, v nichž se číslice neopakují?*

Řešení:

V zadaných číslech se zřejmě musí vyskytovat každá cifra $0, 1, \ldots 9$ právě jednou. Protože mají být vzniklá čísla deseticiferná, nesmí se na prvním místě objevit nula. Určeme tedy počet čísel jako počet všech permutací deseti cifer (10!) bez těch permutací, které mají jako první cifru nulu (9!).

$10! - 9! = 3\,265\,920$

Existuje 3 265 920 požadovaných čísel.

Cvičení 3.10 *Kolik existuje deseticiferných čísel, jejich ciferný součet je dělitelný třemi?*

Řešení:

Přeformulujme zadanou podmínku – ciferný součet čísla je dělitelný třemi právě tehdy, když je dané číslo dělitelné třemi. Máme tedy určit počet všech deseticiferných čísel dělitelných třemi. Všech deseticiferných čísel existuje $9 \cdot 10^9$ (první cifra nesmí být nula, máme pro ni devět možností, pro každou další cifru existuje deset možností). Z těchto čísel je každé třetí dělitelné třemi, tedy třetina všech deseticiferných čísel je dělitelná třemi.

$(9 \cdot 10^9) : 3 = 3 \cdot 10^9$

Existuje $3 \cdot 10^9$ deseticiferných čísel s ciferným součtem dělitelným třemi.

Cvičení 3.11 *Kolik celých čísel od 0 do 999 není dělitelno ani 5, ani 7?*

Řešení:

Z dané množiny 1 000 čísel je zřejmě pětina čísel dělitelná 5 ($1\,000 : 5 = 200$) a sedmina čísel dělitelná 7 ($1\,000 : 7 = 142$). Je třeba si uvědomit, že 0 je dělitelná každým přirozeným číslem. Nesmíme také zapomenout na čísla, která jsou dělitelná 5 i 7, tedy jejich nejmenším společným násobkem, číslem 35 ($1\,000 : 35 = 28$). Nyní využijeme principu inkluze a exkluze: od celkového počtu čísel odečteme ta, která jsou dělitelná jedním z čísel 5 a 7 a přičteme čísla dělitelná zároveň čísly 5 i 7.

$1\,000 - 200 - 142 + 28 = 686$

Čísel nedělitelných 5 ani 7 je 686.

Cvičení 3.12 *Kolik různých čtyřciferných čísel lze sestavit z cifer čísla 123 153?*

Řešení:

Rozdělme si výsledná čísla do tří skupin a v každé určeme jejich počet:

(a) Čísla, ve kterých se každá cifra vyskytuje pouze jednou. Zřejmě nemáme jinou možnost volby cifer než 1, 2, 3 a 5. Počet čísel vytvořených z těchto cifer bude počet jejich permutací $4! = 24$.

(b) Čísla, ve kterých se jedna cifra vyskytuje dvakrát. Máme dvě možnosti výběru cifry, která se bude vykytovat dvakrát (1, 3), k ní vybíráme ze tří zbylých různých cifer další dvě ($\binom{3}{2}$) a všechny čtyři vybrané cifry mezi sebou necháme permutovat $\left(\frac{4!}{2!}\right)$.
Dohromady dostáváme $2 \cdot \binom{3}{2} \cdot \frac{4!}{2!} = 72$ čísel.

(c) Čísla, ve kterých se dvě cifry vyskytují dvakrát. Dvakrát můžeme podle zadání využít pouze cifry 1 a 3. Necháme-li je mezi sebou permutovat, získáme $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$.

Zřejmě musí každé požadované číslo patřit do právě jedné ze tří skupin, výsledek tedy získáme sečtením dílčích počtů čísel v každé ze skupin.

$24 + 72 + 6 = 102$

Lze sestavit 102 čtyřciferných čísel.

Cvičení 3.13 *Kolik pěticiferných čísel lze sestavit z cifer čísla 12 312 343, požadujeme-li, aby tři číslice* 3 *nenásledovaly za sebou?*

Řešení:

Uvažujme stejně jako v předchozí úloze rozdělení výsledných čísel do disjunktních množin, spočítejme počet čísel v každé z množin a případně odečtěme čísla nevyhovující.

(a) Čísla obsahující jednu číslici dvakrát. Máme tři možnosti výběru číslice vyskytující se dvakrát, zbylé číslice jsou pak dány. Nechme všechny vybrané číslice permutovat a získáme $3 \cdot \frac{5!}{2!} = 180$ čísel.

(b) Čísla obsahující dvě číslice dvakrát. Vybíráme dvě ze tří možných číslic, které se budou vyskytovat dvakrát ($\binom{3}{2}$), k nim potřebujeme vybrat pátou číslici (2 možnosti) a všechny číslice necháme permutovat. $\binom{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 180$

(c) Čísla obsahující jednu číslici třikrát a zbylé číslice jednou. Třikrát se může vyskytovat pouze číslice 3, k ní vybereme další dvě čísla ze tří možných ($\binom{3}{2}$) a čísla necháme permutovat: $\binom{3}{2} \cdot \frac{5!}{3!} = 60$. Mezi 60 čísly jsou ale i čísla ze zadání zakázaná, například číslo 13 332. Počet zakázaných čísel získáme tak, že k sobě číslice 3 „slepíme“ a považujeme je za jeden znak, ke kterému musíme vybrat dvě další číslice ze tří možných a všechny znaky necháme permutovat, tedy $\binom{3}{2} \cdot 3! = 18$. Vyhovujících čísel je $60 - 18 = 42$.

(d) Čísla obsahující jednu číslici třikrát a jednu číslici dvakrát. Třikrát se může vyskytovat pouze číslice 3, k ní vybereme jednu ze dvou možných dvojic jiné číslice (1, 2) a necháme permutovat: $2 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 20$. Opět se zde vyskytují i nevyhovující čísla, jejichž počet získáme stejně jako v předchozí variantě $2 \cdot \frac{3!}{2!} = 6$. Vyhovujících čísel je $20 - 6 = 14$.

Zřejmě musí každé požadované číslo patřit do právě jedné ze čtyř skupin, stačí tedy sečíst $180 + 180 + 42 + 14 = 416$.

LZE SESTAVIT 416 PĚTICIFERNÝCH ČÍSEL.

Cvičení 3.14 *(*) Kolika způsoby lze přeskládat cifry čísla* 1 234 114 546 *tak, aby tři stejné cifry nenásledovaly za sebou?*

Řešení:

Využijeme princip inkluze a exkluze. Od celkového počtu přeskládání cifer odečteme taková přeskládání, ve kterých jedna trojice stejných cifer následuje za sebou (1 nebo 4), a přičteme ta přeskládání, kde následují za sebou dvě trojice stejných cifer (1 i 4). Počet všech přeskládání získáme jako počet všech permutací s opakováním $\frac{10!}{3! \cdot 3!} = 100\,800$. Chceme-li mít v přeskládání jednu trojici stejných cifer za sebou, musíme určit kterou (2 způsoby), danou trojici pak „slepíme“ do jednoho znaku a necháme s ostatními permutovat: $2 \cdot \frac{8!}{3!} = 13\,440$. Podobně pokud mají za sebou následovat obě trojice stejných cifer, můžeme každou trojici nahradit jedním znakem a nechat s ostatními permutovat, těchto čísel je $6! = 720$.

Výsledek určíme pomocí výše popsaného principu inkluze a exkluze.

$100\,800 - 13\,440 + 720 = 88\,080$

Cifry lze přeskládat 88 080 způsoby.

Cvičení 3.15 *Kolika způsoby lze z přirozených čísel od 1 do 30 vybrat tři čísla tak, aby jejich součet byl sudý?*

Řešení:

Mezi čísly od 1 do 30 je 15 čísel sudých a 15 čísel lichých. Chceme-li vybrat tři čísla tak, aby byl jejich součet sudý, musí být buď všechna sudá ($\binom{15}{3}$), nebo jedno sudé a dvě lichá ($\binom{15}{1} \cdot \binom{15}{2}$).

$\binom{15}{3} + \binom{15}{1} \cdot \binom{15}{2} = 2\,030$

Čísla lze vybrat 2 030 způsoby.