MA0002 — řešení DÚ č. 4

Cvičení 4.1 *Kolika způsoby můžeme 4 barvami obarvit 10 kuliček?*

(a) Kuličky jsou rozlišitelné.

(b) Kuličky nejsou rozlišitelné.

Řešení:

(a) Protože jsou kuličky různé (liší se například velikostí), rozhodujeme se pro každou kuličku zvlášť, kterou ze čtyř barev (možností) ji obarvíme. Obarvení jednotlivých kuliček na sobě nezávisí, použijeme tedy pravidlo součinu. $4^{10} = 1\,048\,576$

Kuličky lze obarvit 1 048 576 způsoby.

(b) Pro nerozlišitelné kuličky určíme množství různých obarvení jako počet kombinací s opakováním. Jinak řečeno, kuličky rozdělujeme do 4 přihrádek podle jejich barvy (mezi přihrádkami jsou 3 přepážky). Počet různých obarvení je tedy počet permutací s opakováním mezi 10 stejnými kuličkami a 3 přihrádkami).
$\frac{13!}{10!3!} = 286$

Kuličky lze obarvit 286 způsoby.

Cvičení 4.2 *Kolik devítimístných čísel obsahuje právě dvě stejné číslice a žádnou nulu?*

Řešení:

Nejprve vybereme číslici, která se bude v čísle vyskytovat dvakrát (9 způsobů). Dále určíme dvě místa ve výsledném čísle, kam tuto číslici umístíme ($\binom{9}{2}$ způsobů) a na dalších sedm míst postupně vybíráme ze zbylých osmi číslic – na první místo máme 8 kandidátů, na další 7 a tak dále.

$9 \cdot \binom{9}{2} \cdot 8! = 13\,063\,680$

Zadaných devítimístných čísel existuje 13 063 680.

Cvičení 4.3 *Kolika způsoby lze mezi 4 děti rozdělit 15 stejných hrušek tak, aby každé dítě dostalo alespoň 2 hrušky?*

Řešení:

Jelikož není řečeno jinak, všechny hrušky zřejmě vyhovují kritériím EU a proto jsou naprosto rovnocenné (nerozlišitelné). Nejprve rozdáme každému dítěti 2 hrušky a k dalšímu rozdělování nám jich zbude 7. Nyní můžeme zbylých 7 hrušek rozdělovat do přihrádek se jmény jednotlivých dětí: mezi přihrádkami jsou 3 nerozlišitelné přepážky, zajímá nás tedy počet permutací 3 přepážek a 7 hrušek.

$\frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$

Hrušky lze rozdělit 120 způsoby.

Cvičení 4.4 *Koika způsoby lze rozdělit 18 stejných jablek mezi 5 dětí tak, aby každé dítě dostalo alespoň 3 jablka?*

Řešení:

Nad úlohou uvažujeme stejně jako v předchozím cvičení. Po rozdání 3 jablek každému dítěti nám zbudou k rozdělování 3 jablka.

$\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$

Jablka lze rozdělit 35 způsoby.

Cvičení 4.5 *Určete počet přirozených čísel od 1 do 840, která nejsou dělitelná ani jedním z čísel 6, 10, 14.*

Řešení:

Využijeme princip inkluze a exkluze podobně jako ve cvičení 3.11. Od počtu všech čísel (840) odečteme počty čísel, která jsou dělitelná jedním z čísel 6 ($840 : 6 = 140$), 10 ($840 : 10 = 84$) a 14 ($840 : 14 = 60$). Následně přičteme počty čísel, která jsou dělitelná jednotlivými dvojicemi čísel zároveň, tedy jejich nejmenším společným násobkem. Pro čísla 6 a 10 získáváme nejmenší společný násobek 30, čísel dělitelných 30 je $840 : 30 = 28$. Podobně nejmenší společný násobek čísel 6 a 14 je 42, $840 : 42 = 20$. Poslední dvojice čísel 10 a 14 má nejmenší společný násobek 70, $840 : 70 = 12$. Konečně odečteme počet všech čísel, která jsou dělitelná čísly 6, 10 i 14, tedy jejich nejmenším společným násobkem 210, taková čísla jsou zřejmě 4.

$840 - 140 - 84 - 60 + 28 + 20 + 12 - 4 = 612$

Zadaných čísel existuje 612.

Cvičení 4.6 *V oddělení pracuje několik osob, z nichž každá zná alespoň jeden z těchto jazyků: ruština, španělština, italština. Rusky mluví 7 osob, španělsky 7 osob, italsky 7 osob, rusky a španělsky 4 osoby, španělsky a italsky 4 osoby, rusky a italsky 3 osoby, všechny tři uvedené jazyky ovládá jedna osoba. Určete, kolik osob*

(a) v oddělení pracuje;

(b) mluví pouze rusky;

(c) mluví pouze španělsky.

Řešení:

Označme R množinu všech osob mluvících rusky, S množinu všech osob mluvících španělsky a I množinu všech osob mluvících italsky. Úlohu je možné řešit přes Vennovy diagramy, my ji budeme řešit pomocí principu inkluze a exkluze.

(a) Počet všech zaměstnanců oddělení je sjednocením množin R, S a I. Dle pravidla inkluze a exkluze získáme celkový počet zaměstnanců sečtením osob mluvících rusky, španělsky nebo italsky, odečtením osob mluvících dvěma z daných jazyků a přičtením osob mluvících všemi třemi jazyky.
$|R \cup S \cup I| = |R| + |S| + |I| - |R \cap S| - |R \cap I| - |S \cap I| + |R \cap S \cap I| =$
$= 7 + 7 + 7 - 4 - 3 - 4 + 1 = 11$

V ODDĚLENÍ PRACUJE 11 OSOB.

(b) Od osob mluvících rusky musíme dle principu inkluze a exkluze odečíst osoby mluvící rusky a španělsky, případně rusky a italsky, a přičíst osoby mluvící rusky, španělsky i italsky.
$|R| - |R \cap S| - |R \cap I| + |R \cap S \cap I| = 7 - 4 - 3 + 1 = 1$

JEDNA OSOBA MLUVÍ POUZE RUSKY.

(c) Počítáme podobně jako předchozí variantu.
$|S| - |S \cap R| - |S \cap I| + |S \cap R \cap I| = 7 - 4 - 4 + 1 = 0$

NIKDO NEMLUVÍ POUZE ŠPANĚLSKY.

Cvičení 4.7 *Na třídní schůzce informoval učitel rodiče takto:*

„Naše třída má 30 žáků. Mohou chodit do 4 zájmových kroužků, z nichž každý probíhá jednou týdně. Pondělní kroužek navštěvuje 19 žáků, úterní 13, středeční 18 a čtvrteční 11. Žádný žák nenavštěvuje více než dva kroužky a žádné dva kroužky nemají více než 5 společných žáků.“

Určete, zda učitel mohl mluvit pravdu. Svou odpověď zdůvodněte.

Řešení:

Protože žádný žák nenavštěvuje více než dva kroužky, můžeme počet žáků pomocí inkluze a exkluze spočítat následovně: od součtu žáků v jednotlivých kroužcích odečteme počet žáků navštěvujících nějakou z kombinací dvou kroužků (například žáků navštěvujících pondělní a čtvrteční kroužek). Součet žáků v jednotlivých kroužcích je $19 + 13 + 18 + 11 = 61$. Každou kombinaci dvou kroužků navštěvuje nejvýše 5 žáků, uvažujme tedy, že každou kombinaci navštěvuje právě 5 žáků. V tom případě budeme od součtu žáků v jednotlivých kroužcích odečítat $5 \cdot \binom{4}{2} = 30$ žáků a dojdeme k výsledku, že třída má 31 žáků. Protože jsme odečítali nejvyšší možný počet žáků, není možné, aby bylo ve třídě méně než 31 žáků.

UČITEL SE PRAVDĚPODOBNĚ SPLETL, NEMLUVIL PRAVDU.

Cvičení 4.8 *Kolik „slov“ je možno sestavit z písmen slova*

(a) SEMESTR

(b) TERAKOTA

tak, aby žádná dvě stejná písmena nestála vedle sebe?

Řešení:

Úlohu vyřešíme stejně jako ve cvičení 3.7 pomocí principu inkluze a exkluze. Od všech přeskládání písmen vždy odečteme taková přeskládání, kdy vedle sebe stojí jedna dvojice stejných písmen (v obou variantách můžeme dvojici stejných písmen vybrat dvěma způsoby) a přičteme přeskládání, ve kterých vedle sebe stojí dvě dvojice stejných písmen.

(a) $\frac{7!}{2!\cdot 2!} - 2 \cdot \frac{6!}{2!} + 5! = 660$

Z písmen slova SEMESTR lze sestavit 660 „slov“.

(b) $\frac{8!}{2!\cdot 2!} - 2 \cdot \frac{7!}{2!} + 6! = 5\,760$

Z písmen slova TERAKOTA lze sestavit 5 760 „slov“.

Cvičení 4.9 *Máme 5 obálek s adresami a 5 dopisů (pro 5 různých lidí). Kolika způsoby můžeme vložit dopisy do obálek tak, aby žádný dopis nebyl ve správné obálce?*

Řešení:

Využijeme principu inkluze a exkluze. Od počtu všech možných vložení dopisů do obálek (5!) odečteme počet vložení dopisů do obálek, v nichž je jeden dopis ve správné obálce (vybereme z pěti dopisů jeden co má být ve správné obálce a zbylé necháme permutovat $\binom{5}{1} \cdot 4!$). Dále přičteme počet vložení dopisů do obálek, v nichž jsou dva dopisy ve správné obálce ($\binom{5}{2} \cdot 3!$), odečteme vložení se třemi dopisy ve správných obálkách ($\binom{5}{3} \cdot 2!$), přičteme vložení se čtyřmi dopisy ve správných obálkách ($\binom{5}{4} \cdot 1!$) a odečteme jedinou možnost jak vložit všechny dopisy do správných obálek.

$5! - \binom{5}{1} \cdot 4! + \binom{5}{2} \cdot 3! - \binom{5}{3} \cdot 2! + \binom{5}{4} \cdot 1! - 1 = 44$

Dopisy můžeme vložit do obálek 44 způsoby.

Cvičení 4.10 *Kolika způsoby mohou páry na plese vytvořit dvojice muž–žena tak, aby žádní partneři netančili spolu?*

(a) Na ples přišly 3 partnerské páry.

(b) Na ples přišly 4 partnerské páry.

(c) Na ples přišlo n partnerských párů.*

Řešení:

(a) Úloha je analogie předchozího cvičení. Pro 3 páry (Novákovi, Blažkovi a Tomanovi) máme dvě možnosti vytvoření párů: paní N. tančí s panem B., paní B. tančí s panem T. a paní T. tančí s panem N, nebo paní N. tančí s panem T., paní B. tančí s panem N. a paní T. tančí s panem B. Pokud bychom počítali principem inkluze a exkluze (zafixujeme si pány a řadíme k nim dámy), odečetli bychom od počtu všech přiřazení dam počet takových přiřazení, kde je jeden manželský pár pohromadě, přičetli přiřazení, kde tančí dva manželské páry spolu a odečetli jediné možné přiřazení, kdy tančí všechny ženy se svým doprovodem.

$3! - \binom{3}{1} \cdot 2! + \binom{3}{2} - 1 = 2$

Dvojice mohou vytvořit 2 způsoby.

(b) Pomocí inkluze a exkluze řešíme stejně jako v předchozí variantě.

$4! - \binom{4}{1} \cdot 3! + \binom{4}{2} \cdot 2! - \binom{4}{3} + 1 = 9$

Dvojice mohou vytvořit 9 způsoby.

(c)* Stejně jako v předchozích variantách bychom postupovali i pro více párů, můžeme tedy zobecnit:
$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{k}(n-k)!$

Dvojice mohou vytvořit $\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{k}(n-k)!$ způsoby.

Cvičení 4.11 *Kolik existuje pořadí písmen* ***a, b, d, e, i, k, m, n, r, ů, z*** *takových, že po vynechání některých písmen vznikne některé ze slov*

(a) mrak, důraz

(b) bar, den, razie*

(c) arzen, drak, dům, důraz*

Řešení:

(a) Začněme určením počtu pořadí písmen, ze kterých nám po vhodném proškrtání vznikne jedno ze slov MRAK, DŮRAZ, nejprve se zaměřme na slovo MRAK. V každém z uspořádání daných 11 písmen se vyskytují písmena M, R, A, K v jednom ze 4! různých vzájemných pořadí. My však požadujeme právě to pořadí, ze kterého po vyškrtání všech písmen mimo M, R, A, K vznikne slovo MRAK. Proto je počet všech uspořádání 11 písmen z nichž po vyškrtání vznikne slovo MRAK $\frac{11!}{4!}$. Stejně tak počet uspořádání všech písmen, ze kterých vznikne po vhodném vynechání slovo DŮRAZ, je $\frac{11!}{5!}$.

Kdybychom tato dvě čísla sečetli, započítali bychom dvakrát ta uspořádání, ve kterých se vyskytují obě slova MRAK i DŮRAZ. Tato uspořádání musíme nyní odečíst. Aby po vhodném vyškrtání vzniklo z daného pořadí slovo MRAK a po jiném vyškrtání slovo DŮRAZ, musí mít písmena M, R, A, K, D, Ů, Z vhodná pořadí, například MDŮRAZK, nebo DMŮRAKZ. Uvažujme, že by existovalo jenom jedno vhodné pořadí písmen M, R, A, K, D, Ů, Z. Pak by počet vyhovujících uspořádání všech 11 písmen byl $\frac{11!}{7!}$. Jelikož ale existuje více vhodných uspořádání 7 zmíněných písmen, zlomek vynásobit jejich počtem. Zřejmě musí písmena R, A stát vedle sebe v tomto pořadí. Před nimi musí stát písmena M, D, Ů, a to v 3 možných pořadích (MDŮ, DMŮ, DŮM). Za písmeny R, A stojí písmena K, Z v libovolném ze dvou pořadí.

Celkem tedy získáváme $\frac{11!}{4!} + \frac{11!}{5!} - \frac{11!}{7!} \cdot 3 \cdot 2 = 1\,948\,320$.

Existuje 1 948 320 požadovaných pořadí písmen.

(b)* Určeme si, z kolika pořadí nám vznikne slovo BAR, slovo DEN a slovo RAZIE a tyto hodnoty sečtěme. Musíme si ale dát pozor, abychom nějaká pořadí nezapočítali dvakrát, proto dle principu inkluze a exkluze odečteme pořadí generující po vhodném vyškrtání hned dvě ze tří slov (BAR a DEN, RAZIE A DEN, BAR a RAZIE) a opět přičteme ta pořadí, ze kterých nám mohou vzniknout všechny tři slova.

V každém přeskládání písmen se vyskytují písmena B, A, R v jednom z jejich 3! možných pořadí, přičemž my požadujeme právě jedno z pořadí. Počet vyhovujících přeskládání proto získáme $\frac{11!}{3!}$. Analogicky pro slovo DEN máme $\frac{11!}{3!}$ přeskládání a pro slovo RAZIE $\frac{11!}{5!}$ přeskládání.

Slova BAR a DEN získáme z pořadí tak, že si zafixujeme všechna jejich písmena ($\frac{11!}{6!}$) a následně ještě uvážíme, jak můžeme jednotlivá zafixovaná písmena mezi sebou permutovat. Jistě musí být zachováno pořadí písmen B, A, R, i pořadí písmen D, E, N, písmena těchto dvou slov se však mohou vmíchat do sebe (BADENR), zlomek proto musíme vynásobit výrazem $\frac{6!}{3!3!}$. Podobně uvažujme pro slova DEN a RAZIE. Po zafixování všech písmen ze slov dostáváme $\frac{11!}{7!}$ pořadí. Je jisté, že N musí být na posledním ze sedmi míst, pro D potom vybíráme jedno z 5 míst před písmenem E. Celkem dostáváme $\frac{11!}{7!} \cdot 5$. Konečně dvojice slov BAR a RAZIE nemohou být nikdy generovány stejným pořadím kvůli vzájemné poloze R a A. Ze stejného důvodu neexistuje pořadí generující všechna tři slova.

$\frac{11!}{3!} + \frac{11!}{3!} + \frac{11!}{5!} - \frac{11!}{6!} \cdot \frac{6!}{3!3!} - \frac{11!}{7!} \cdot 5 = 10\,272\,240$

Existuje 10 272 240 požadovaných pořadí písmen.

(c)* Postupujeme stejně jako v předchozích variantách. Počty pořadí pro slova nebo jejich kombinace jsou:
ARZEN: $\frac{11!}{5!}$ DRAK: $\frac{11!}{4!}$ DŮM: $\frac{11!}{3!}$ DŮRAZ: $\frac{11!}{5!}$
ARZEN a DRAK: 0
ARZEN a DŮM: $\frac{11!}{8!} \cdot \frac{8!}{4!3!}$
ARZEN a DŮRAZ: 0
DRAK a DŮM: $\frac{11!}{6!} \cdot \frac{5!}{3!2!}$ (D musí být na prvním místě)
DRAK a DŮRAZ: $\frac{11!}{6!} \cdot 2$ (můžeme prohodit pouze Z a K)
DŮM a DŮRAZ: $\frac{11!}{6!} \cdot \frac{4!}{3!}$ (DŮ musí být na začátku)
ARZEN, DRAK a DŮM: 0
ARZEN, DRAK a DŮRAZ: 0
ARZEN, DŮM a DŮRAZ: 0
DRAK, DŮM a DŮRAZ: $\frac{11!}{7!} \cdot 5 \cdot 2$ (musí začínat DŮ, hledáme místo pro M, můžeme přehazovat K a Z)
ARZEN, DRAK, DŮM a DŮRAZ: 0

$\frac{11!}{5!} + \frac{11!}{4!} + \frac{11!}{3!} + \frac{11!}{5!} - \frac{11!}{8!} \cdot \frac{8!}{4!3!} - \frac{11!}{6!} \cdot \frac{5!}{3!2!} - \frac{11!}{6!} \cdot 2 - \frac{11!}{6!} \cdot \frac{4!}{3!} + \frac{11!}{7!} \cdot 5 \cdot 2 = 7\,896\,240$

Existuje 7 896 240 požadovaných pořadí písmen.

Cvičení 4.12 *Kolika způsoby lze umístit 8 hracích kamenů na šachovnici 4x4 tak, aby v právě jednom řádku nebo v právě jednom sloupci byly 4 kameny?*

Řešení:

Zvolme si řádek a umístěme do něj 4 kameny. Zbylé kameny musíme umístit tak, aby nevytvořily celý řádek nebo sloupec. Od všech možností umístění ($\binom{12}{4}$) odečteme ta umístění, ve kterých kameny vytvoří celý nový řádek (vybíráme pouze řádek ze 3 možných), a umístění, ve kterých vyplní sloupec (vybereme jeden ze 4 sloupců a doplníme jej třemi kameny, pro poslední kamen vybereme jakékoli ze zbylých volných míst). Kdybychom na začátku místo řádku vybrali sloupec, došli bychom ke stejnému výsledku, proto výsledek ještě vynásobíme dvěma.

$2 \cdot 4 \cdot \left(\binom{12}{4} - 3 - 4 \cdot 9\right) = 3\,648$

Kameny lze umístit 3 648 způsoby.

Cvičení 4.13 *Kolik kompozic daného přirozeného čísla n na právě k sčítanců můžete vytvořit?*

(a) $n = 3, k = 5$

(b) $n = 15, k = 7$

(c) $n = 12, k = 7$

(d) $n = 12, k = 3$

Řešení:

Počet všech kompozic čísla n na právě k sčítanců určíme ze vzorce $K(n, k) = \binom{n-1}{k-1}$.

(a) Zřejmě nelze číslo rozložit na více sčítanců, než je jeho hodnota (uvažujeme pouze sčítance z oboru přirozených čísel). $K(3, 5) = 0$

(b) $K(15, 7) = \binom{14}{6} = 3\,003$

(c) $K(12, 7) = \binom{11}{6} = 462$

(d) $K(12, 3) = \binom{11}{2} = 55$

Cvičení 4.14 *Kolik rozkladů daného přirozeného čísla n na právě k sčítanců můžete vytvořit?*

(a) $n = 3, k = 5$

(b) $n = 15, k = 4$

(c) $n = 12, k = 4$

(d) $n = 12, k = 3$

Řešení:

Počet rozkladů čísla n na právě k sčítanců určíme z rekurentního vzorce

$$p(n, k) = \sum_{i=1}^{k} p(n - k, i); p(n, 1) = p(n, n) = 1.$$

(a) Podobně jako v předchozím cvičení nelze číslo rozložit na více sčítanců, než je jeho hodnota, proto $p(3, 5) = 0$.

(b) $p(15, 4) = p(11, 1) + p(11, 2) + p(11, 3) + p(11, 4) = 1 + 5 + 10 + 11 = 27$

(c) $p(12, 4) = p(8, 1) + p(8, 2) + p(8, 3) + p(8, 4) = 1 + 4 + 5 + 5 = 15$

(d) $p(12, 3) = p(9, 1) + p(9, 2) + p(9, 3) = 1 + 4 + 7 = 12$