MA0002 — řešení DÚ č. 6

Cvičení 6.1 *Najděte prvočíselný rozklad čísla:*

(a) $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

(b) $143 = 11 \cdot 13$

(c) $247 = 13 \cdot 19$

(d) $1\,001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

(e) $3\,575 = 5^2 \cdot 11 \cdot 13$

(f) $3\,705 = 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19$

(g) $3\,925 = 5^2 \cdot 147$

(h) $10\,127 = 13 \cdot 19 \cdot 41$

Cvičení 6.2 *Najděte největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel:*

(a) 240 a 264

(b) 51 a 81

(c) 391 a 10 127

(d) 437 a 247

Řešení:

Každé z čísel si rozložíme na prvočísla a následně určíme NSD a nsn.

(a)
$$\begin{aligned} 240 &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \qquad & NSD(240; 264) &= 2^3 \cdot 3 = 24 \\ 264 &= 2^3 \cdot 3 \cdot 11 \qquad & nsn(240; 264) &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 2\,640 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 51 &= 3 \cdot 17 \qquad & NSD(51; 81) &= 3 \\ 81 &= 3^4 \qquad & nsn(51; 81) &= 3^4 \cdot 17 = 1\,377 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 391 &= 17 \cdot 23 \qquad & NSD(391; 10\,127) &= 1 \\ 10\,127 &= 13 \cdot 19 \cdot 41 \qquad & nsn(391; 10\,127) &= 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 41 = 3\,959\,657 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 437 &= 19 \cdot 23 \qquad & NSD(437; 247) &= 19 \\ 247 &= 13 \cdot 19 \qquad & nsn(437; 247) &= 13 \cdot 19 \cdot 23 = 5\,681 \end{aligned}$$

Cvičení 6.3 *Určete součet všech kladných dělitelů čísla s výjimkou čísla samotného:*

(a) 10

(b) 14

(c) 15

(d) 24

(e) 18

(f) 21

(g) 6

Řešení:

(a) $\begin{array}{r|l} 10 & 1 \\ 5 & 2 \end{array}$ S=8

(b) $\begin{array}{r|l} 14 & 1 \\ 7 & 2 \end{array}$ S=10

(c) $\begin{array}{r|l} 15 & 1 \\ 5 & 3 \end{array}$ S=9

(d) $\begin{array}{r|l} 24 & 1 \\ 12 & 2 \\ 8 & 3 \\ 6 & 4 \end{array}$ S=36

(e) $\begin{array}{r|l} 18 & 1 \\ 9 & 2 \\ 6 & 3 \end{array}$ S=21

(f) $\begin{array}{r|l} 21 & 1 \\ 7 & 3 \end{array}$ S=11

(g) $\begin{array}{r|l} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{array}$ S=6

Cvičení 6.4 *Určete rozklad čísla na prvočinitele a počet všech jeho kladných dělitelů:*

(a) 236

(b) 3 159

(c) 1 296

(d) 5 400

(e) 10 125

(f) 5!

(g) 10!

(h) 12!

Řešení:

Každé z čísel rozložíme na prvočinitele. Zřejmě každý z jeho dělitelů je složen z prvočísel obsažených v rozkladu nejvýše v mocnině, v jaké se vyskytuje v původním čísle. Pokud bude například v rozkladu čísla 2^3, bude se v rozkladu každého z dělitelů vyskytovat prvočíslo 2 v mocninách 0, 1, 2, nebo 3. Označme si počet dělitelů čísla n symbolem $\tau(n)$ a vyjádřeme obecný vztah.

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

(a) $236 = 2^2 \cdot 59 \quad \tau(236) = 3 \cdot 2 = 6$

(b) $3\,159 = 3^5 \cdot 13 \quad \tau(3\,159) = 6 \cdot 2 = 12$

(c) $1\,296 = 2^4 \cdot 3^4 \quad \tau(1\,296) = 5 \cdot 5 = 25$

(d) $5\,400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \quad \tau(5\,400) = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$

(e) $10\,125 = 3^4 \cdot 5^3 \quad \tau(10\,125) = 5 \cdot 4 = 20$

(f) $5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \quad \tau(5!) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

(g) $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \quad \tau(10!) = 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270$

(h) $12! = 2^10 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \quad \tau(12!) = 11 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 792$

Cvičení 6.5 *Najděte alespoň pět přirozených čísel, která mají lichý počet dělitelů.*

Řešení:

Můžeme využít znalosti ze cvičení 6.3, případně ze cvičení 6.4. Podíváme-li se ještě jednou na řešení 6.3, kde je každý z dělitelů daného čísla (včetně jeho samého a jedničky) zapsán na nějaké straně svislé čáry, vidíme, že pro lichý počet dělitelů musí být v posledním řádku dvě stejná čísla. Číslo s lichým počtem dělitelů tedy musí být čtverec nějakého přirozeného čísla.

Chceme-li využít cvičení 6.4, hledáme takové mocniny prvočísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$, aby počet dělitelů byl lichý. Ze součinu získáme lichý výsledek právě tehdy, když jsou všechny činitele lichá čísla. Proto všechna $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ musí být sudá (to opět znamená, že hledané číslo je čtverec).

HLEDANÁ ČÍSLA JSOU NAPŘÍKLAD 1, 4, 9, 16 A 25.

Cvičení 6.6 *Najděte alespoň pět přirozených čísel, která mají sudý počet dělitelů.*

Řešení:

Z předchozího cvičení víme, že můžeme zvolit jakákoli čísla, která nejsou druhou mocninou přirozeného čísla.

HLEDANÁ ČÍSLA JSOU NAPŘÍKLAD 3, 5, 8, 15 A 24.

Cvičení 6.7 *Pro každá dvě přirozená čísla platí, že součin největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku je roven součinu těchto dvou čísel.*

(a) Vysvětlete vlastními slovy, že uvedené tvrzení platí.

(b) Ukažte na konkrétním příkladě, že předchozí tvrzení nelze obecně rozšířit na trojici čísel.

Řešení:

(a) Největší společný dělitel je tvořen průnikem prvočísel obsažených v daných číslech (včetně mocnin), nejmenší společný násobek je tvořen sjednocením prvočísel obsažených v rozkladu daných čísel (ve nejvyšších mocninách). Proto je-li prvočíslo p_1 v rozkladu pouze prvního z čísel, objeví se v součinu NSD a nsn i v součinu daných čísel, a to ve stejné mocnině, v jaké je obsažené v prvním čísle.

Máme-li v rozkladu prvního čísla prvočíslo $p_2^{\alpha_1}$ a v rozkladu druhého čísla prvočíslo $p_2^{\alpha_2}$, kde $\alpha_1 < \alpha_2$, objeví se v součinu NSD a nsn člen $p_2^{\alpha_1} \cdot {}_2^{\alpha_2}$, stejně tak se ale tento člen objeví i v součinu daných čísel.

Jiná možnost než dvě výše popsané nastat nemůže, proto tvrzení platí.

(b) $NSD(4;6;8) = 2 \quad nsn(4;6;8) = 24 \quad 2 \cdot 24 \neq 4 \cdot 6 \cdot 8$

Cvičení 6.8 *(*) Najděte všechna přirozená čísla x, y, pro která platí:*

$$nsn(x;y) = NSD(x,y) + 5$$

Řešení:

Zřejmě nemůže platit $x = y$, pak by bylo $nsn = NSD$. V dalších případech je vždy $nsn > NSD$, nsn je totiž NSD vynásobený nejméně jedním prvočíslem (je minimálně dvakrát větší). Proto musí být $NSD \leq 5$ a $nsn(x; y) \leq 10$, což nám ovšem velmi omezuje volbu čísel x, y.

$NSD(x; y) = 1$	$nsn(x, y) = 6$	$[x; y] \in [1; 6]; [6; 1]; [2; 3]; [3; 2]$
$NSD(x; y) = 2$	$nsn(x, y) = 7$	nelze
$NSD(x; y) = 3$	$nsn(x, y) = 8$	nelze
$NSD(x; y) = 4$	$nsn(x, y) = 9$	nelze
$NSD(x; y) = 5$	$nsn(x, y) = 10$	$[x; y] \in [5; 10]; [10; 5]$

Vyhovující uspořádané dvojice čísel jsou $[1; 6]; [6; 1]; [2; 3]; [3; 2]; [5; 10]$ a $[10; 5]$.

Cvičení 6.9 *Dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla a, b platí:*

(a) $NSD(a; b) = 1 \Rightarrow NSD(ab; a^2 + b^2) = 1$

(b) $NSD(a; b) = 1 \Rightarrow NSD(a + b; a^2 + b^2) \leq 2$

Řešení:

(a) Jsou-li čísla a, b nesoudělná, nemají ve svých prvočíselných rozkladech žádná společná prvočísla. Proto ani výrazy a^2, b^2 nemají žádná společná prvočísla, z výrazu $a^2 + b^2$ nelze žádné z prvočísel vyskytujících se v prvočíselném rozkladu čísel a, b vytknout. Avšak v prvočíselném rozkladu čísla ab jsou stejná prvočísla, jako v rozkladech čísel a, b, proto musí být $NSD(ab; a^2 + b^2) = 1$.

(b) Uvažujme nejprve situaci pro sudý součet $a + b$ (to znamená, že a, b jsou obě sudá, nebo obě lichá). Potom i součet druhých mocnin a, b musí být sudý a $NSD(a+b; a^2+b^2) \geq 2$. Dále si můžeme výraz a^2+b^2 upravit do tvaru $(a+b)^2 - 2ab$ a protože jsou a, b nesoudělná, podobně jako v předchozí variantě dojdeme k závěru, že žádné jiné prvočíslo se v NSD neobjeví. Platí $NSD(a + b; a^2 + b^2) = 2$.

Je-li součet $a + b$ lichý, nemůže se v NSD objevit ani prvočíslo 2, pro lichý součet $a+b$ platí $NSD(a+b; a^2+b^2) = 1$. Dohromady získáváme $NSD(a + b; a^2 + b^2) \leq 2$.

Cvičení 6.10 *(*) Dokažte, že jestliže zvolíme libovolných 7 různých prvočísel, bude součin jejich kladných rozdílů dělitelný číslem 163 840.*

Řešení:

Nejprve si rozložme číslo 163 840 na součin prvočísel: $163\,840 = 2^{15} \cdot 5$. Kladných rozdílů dvou prvočísel bude stejně, jako dvouprvkových kombinací ze sedmi prvočísel $\binom{7}{2} = 21$. Rozdíl každých dvou lichých prvočísel bude sudé číslo (dělitelné dvěma). Protože však existuje pouze jedno sudé prvočíslo, může se vyskytovat nejvýše v šesti rozdílech s jiným prvočíslem. Jistě tedy alespoň 15 rozdílů prvočísel bude sudých, alespoň z 15 rozdílů můžeme vytknout číslo 2 – součin rozdílů musí být dělitelný číslem 2^{15}.

Zbývá nám ověřit dělitelnost pěti. Jestliže alespoň jeden z rozdílů bude dělitelný pěti, jistě bude celý součin dělitelný pěti. Pokud ale nebude žádný z rozdílů dělitelný pěti, musí každý rozdíl dávat po dělení pěti zbytek 1, 2, 3, nebo 4. Protože máme k dispozici 21 rozdílů, jistě bude dávat alespoň 5 rozdílů stejný zbytek po dělení pěti. Z toho ale plyne, že právě součin těchto rozdílů je dělitelný pěti.

Dokázali jsme, že součin kladných rozdílů 7 různých prvočísel musí být dělitelný číslem 163 840.