MA0002 — řešení DÚ č. 8

Cvičení 8.1 *Najděte všechna celočíselná řešení rovnice:*

(a) $x + y = 2$

(b) $2x + y = 3$

(c) $7x + 3y = 5$

(d) $9x + 11y = 3$

Řešení:

(a) Rovnice $x+y = 2$ má nekonečně mnoho řešení, musíme však určit jejich tvar (ne každá uspořádaná dvojice čísel je řešením rovnice). Zvolme za x parametr $t \in \mathbb{Z}$ a vyjádřeme y v závislosti na $x = t$.

$x = t \quad y = 2 - t \quad K = \{[t; 2 - t], t \in \mathbb{Z}\}$

(b) Řešme rovnici $2x + y = 3$ podobně jako v předchozí variantě.

$x = t \quad y = 3 - 2t \quad K = \{[t; 3 - 2t], t \in \mathbb{Z}\}$

(c) U rovnice $7x + 3y = 5$ si musíme dát pozor, aby výsledné řešení bylo opravdu celočíselné. Opět zvolíme za x parametr t, ten ovšem musí splňovat určité podmínky. Když vyjádříme y v závislosti na $x = t$, získáváme $y = \frac{5-7t}{3}$, aby bylo $y \in \mathbb{Z}$, musí $3|5 - 7t$.

$$\begin{aligned} 5 - 7t &\equiv 0 \pmod{3} \\ 2 - t &\equiv 0 \pmod{3} \\ t &\equiv 2 \pmod{3} \end{aligned}$$

Parametr t musí dávat zbytek 2 po dělení 3, můžeme místo něj psát $t = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}$. Po dosazení do vyjádření y získáváme:

$x = 3k + 2 \quad y = -7k - 3 \quad K = \{[3k + 2; -7k - 3], k \in \mathbb{Z}\}$

(d) Rovnici $9x + 11y = 3$ řešíme podobně jako v předchozí variantě.
$x = t, \quad y = \frac{3-9t}{11}, \quad 11|3 - 9t$

$$\begin{aligned} 3 - 9t &\equiv 0 \pmod{11} \\ 3 + 2t &\equiv 0 \pmod{11} \\ 2t &\equiv -3 \pmod{11} \\ 2t &\equiv 8 \pmod{11} \\ t &\equiv 4 \pmod{11} \end{aligned}$$

Parametr t musí dávat zbytek 4 po dělení 11, můžeme místo něj psát $t = 11k + 4, k \in \mathbb{Z}$. Po dosazení do vyjádření y získáváme:

$x = 11k + 4 \quad y = -9k - 3 \quad K = \{[11k + 4; -9k - 3], k \in \mathbb{Z}\}$

Cvičení 8.2 *Zadejte alespoň dvě z výše uvedených rovnic pomocí slovní úlohy (řešení slovní úlohy nemusí být nekonečně mnoho).*

Řešení:

(a) Jak můžeme zaplatit 2 eura, máme-li k dispozici jednoeurové a dvacceticentové mince v dostatečném množství?

(b) Jakým způsobem si můžeme pověsit na stěnu trofeje z lovu, máme-li dostatečné množství zastřelených kozorohů a jednorožců, ale na stěně chceme mít právě 3 rohy?

(c) V létě získával každý táborník za dobrý skutek 7 bodů a za porušení pravidel slušného chování mu byly odebrány vždy 3 body. Kolik mohl Zdenda udělat dobrých skutků, když měl na konci léta 5 bodů?

(d) V ZOO je zvláštní klokan, který se může pohybovat pouze ve směru dopředu či dozadu (nikdy nezatáčí), přitom dopředu poskočí vždy o 11 decimetrů, dozadu o 9 decimetrů. Jak si může klokan doskákat pro pampelišku, na kterou dosáhne pouze z místa 3 decimetry před ním?

Cvičení 8.3 *Řešte úlohu č. 5 z Alkuinovy sbírky Úlohy pro bystření mladíků:*

Nějaký kupec řekl: Chci za sto denárů nakoupit sto prasat, přičemž kanec stojí deset denárů, prasnice pět denárů a dvě selata jeden denár. Ať řekne, kdo rozumí, kolik je třeba koupit kanců, kolik prasnic a kolik selat, aby žádné z těchto dvou čísel nebylo ani překročeno, ani zmenšeno.

Řešení:

Úlohu lze řešit (stejně jako všechny úlohy z Alkuinovy sbírky) pouhou úvahou. Pokud bychom úlohu chtěli řešit soustavou rovnic, měli bychom daleko více práce. Řešením úlohy je například nákup jednoho kance, devíti prasnic a devadesáti selat.

Cvičení 8.4 *Markéta nakoupila v papírnictví sešity po 10 korunách, tužky po 2 korunách a gumy po 5 korunách. Celkem utratila 100 korun za 18 předmětů. Kolik čeho nakoupila?*

Řešení: Podobně jako předchozí cvičení lze řešit úvahou. Například začněme od co nejvyššího počtu sešitů a postupně vylučujme možné nevyhovující kombinace. Práci usnadní skutečnost, že gum musí být jistě sudý počet.

Markéta nakoupila 5 sešitů, 5 tužek a 8 gum.

Cvičení 8.5 *Dokažte, že platí tento postup pro násobení čísel od 6 do 9:*
První činitel: levá ruka, na níž necháme vztyčeno tolik prstů, kolik je rozdíl mezi činitelem a číslem 5.
Druhý činitel: analogicky na pravé ruce.
Násobení: počet vztyčených prstů na obou rukou vynásobíme deseti a k tomu přičteme výsledek násobení počtu nevztyčených prstů na levé ruce a na pravé ruce.
*Příklad: 7*8*

Levá ruka: 2 vztyčené, 3 ne
Pravá ruka: 3 vztyčené, 2 ne
2+3=5 desítek (tj. 50)
*2*3=6 (jednotek)*
*50+6=56=7*8*

Řešení:Označme si činitele a, b. Popsaný postup můžeme zapsat následovně:

$$((a-5)+(b-5))10+(10-a)(10-b) = 10a+10b-100+100-10b-10a+ab = ab$$

Cvičení 8.6 *Doplňte tabulku pro $n = 1, \dots 25$. V tabulce vyhledejte pythagorejské trojice.*

n	n^2 *(druhá mocnina n*	$n^2 - (n-1)^2$ *(přírůstek oproti předchozímu řádku)*
0	*0*	-
1	*1*	*1*
2	*4*	*3*
3	*9*	*5*
4	***16***	*7*
5	***25***	***9***
6	*36*	*11*
7	*49*	*13*
8	*64*	*15*
9	*81*	*17*
10	*100*	*19*
11	*121*	*21*
12	***144***	*23*
13	***169***	***25***
14	*196*	*27*
15	*225*	*29*
16	*256*	*31*
17	*289*	*33*
18	*324*	*35*
19	*361*	*37*
20	*400*	*39*
21	*441*	*41*
22	*484*	*43*
23	*529*	*45*
24	***576***	*47*
25	***625***	***49***

Řešení:

Nejlépe viditelné pythagorejské trojice jsou v tabulce vyznačené tučným písmem, jedná se o trojice (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25). Hůře viditelné jsou trojice, ve kterých mají dvě nejvyšší čísla rozdíl 2 (součet příslušných hodnot v posledním sloupci je druhá mocnina přirozeného čísla) – takto můžeme nalézt trojice (6, 8, 10) a (8, 15, 17). Poslední skupinou pythagorejských trojic jsou násobky již uvedených trojic, kde je největší z čísel nejvýše 25, tímto způsobem doplníme trojice (9, 12, 15), (12, 16, 20) a (15, 20, 25).