MA0002 — řešení DÚ č. 9

Cvičení 9.1 *Pomocí Vietových vztahů řešte v oboru reálných čísel následující kvadratické rovnice:*

(a) $x^2 + x + 1 = 7$

(b) $x^2 + 2x + 4 = -5x - 8$

(c) $x^2 + 4x + 2 = 7$

(d) $x^2 + 4x + 4 = -10 - 5x$

Řešení:

Připomeňme si Vietovy vztahy pro kvadratickou rovnici. Pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$ platí:
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

(a) $x^2 + x - 6 = 0 \qquad x_1 + x_2 = -1 \quad x_1 \cdot x_2 = -6$
$(x-2)(x+3) = 0 \qquad K = \{-3; 2\}$

(b) $x^2 + 7x + 12 = 0 \qquad x_1 + x_2 = -7 \quad x_1 \cdot x_2 = 12$
$(x+4)(x+3) = 0 \qquad K = \{-4; -3\}$

(c) $x^2 + 4x - 5 = 0 \qquad x_1 + x_2 = -4 \quad x_1 \cdot x_2 = -5$
$(x+5)(x-1) = 0 \qquad K = \{-5; 1\}$

(d) $x^2 + 9x + 14 = 0 \qquad x_1 + x_2 = -9 \quad x_1 \cdot x_2 = 14$
$(x+7)(x+2) = 0 \qquad K = \{-7; -2\}$

Cvičení 9.2 *Nalezněte polynom, který má dané kořeny:*

(a) $x_1 = 4; x_2 = -7$

(b) $x_1 = 1; x_2 = 16$

(c) $x_1 = \sqrt{3}; x_2 = -\sqrt{3}$

(c) $x_1 = 2; x_2 = 3; x_3 = 0$

Řešení:

Postupujme opačným směrem, než tomu bylo v předchozím cvičení, hledaný polynom pak získáme roznásobením závorek s kořeny. Samozřejmě takto získaný polynom není jediný, je pouze jeden z nekonečně mnoha. Další polynomy bychom získali vynásobením výsledného polynomu jakoukoli nenulovou hodnotou.

(a) $(x-4)(x+7)=0 \qquad x^2+3x-28=0$

(b) $(x-1)(x-16)=0 \qquad x^2-17x+16=0$

(c) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0 \qquad x^2-3=0$

(d) $(x-2)(x-3)x=0 \qquad x^3-5x^2+6x=0$

Pro následující dvě úlohy bude vytvořen polynom stupně 6 (u dalších polynomů se budou obě cvičení řešit analogicky).

$$(x-1)(x+1)(x-3)(x+2)(x^2+2)=x^6-x^5-5x^4-x^3-8x^2+2x+12$$

Cvičení 9.3 *Hornerovým schématem najděte celočíselné kořeny vypočtených polynomů stupně 5 (nebo vyššího). Vypočítejte tedy nejméně šest příkladů. Kontrolou Vám bude Váš vlastní výpočet (násobení polynomů).*

Řešení:

	1	-1	-5	-1	-8	2	12
$x=1$	1	0	-5	-6	-14	-12	0
$x=-1$	1	-1	-4	-2	-12	0	
$x=2$	1	1	-2	-6	-24		
$x=-2$	1	-3	2	-6	0		
$x=3$	1	0	2	0			

Cvičení 9.4 *Proveďte dělení polynomu stupně 5 (nebo vyššího) polynomem stupně 2, vypočítejte nejméně šest příkladů. Jako zadání použijte Vámi vypočtené polynomy, např.:*

$$(x^5-x^4-3x^3+3x^2-4x+4):(x^2+1)=x^3-x^2-4x-4$$

Řešení:

$$\begin{array}{lllllll}
(x^6 & -x^5 & -5x^4 & -x^3 & -8x^2 & +2x & +12):(x^2+2)=x^4-x^3-7x^2+x+6 \\
-x^6 & & -2x^4 & & & & \\
 & -x^5 & -7x^4 & -x^3 & -8x^2 & +2x & +12 \\
 & x^5 & & +2x^3 & & & \\
 & & -7x^4 & +x^3 & -8x^2 & +2x & +12 \\
 & & 7x^4 & & +14x^2 & & \\
 & & & x^3 & +6x^2 & +2x & +12 \\
 & & & -x^3 & & -2x & \\
 & & & & 6x^2 & & +12 \\
 & & & & -6x^2 & & -12 \\
 & & & & & & 0
\end{array}$$