MA0002 — řešení DÚ č. 10

Cvičení 10.1 *Eukleidovým algoritmem najděte největšího společného dělitele pro alespoň šest dvojic polynomů stupně 4 až 6.*

Konkrétní polynomy si zvolte sami. Postupujte jako v předchozím domácím úkolu.

Řešení:

Stejně jako v předchozím domácím úkolu ukážeme řešení pouze na jedné dvojici polynomů, s dalšími dvojicemi by se pracovalo analogicky. Vezměme si polynom z předchozího domácího úkolu a druhý polynom vytvořme. Z rozkladu na součin hned vidíme, jaký je největší společný dělitel daných polynomů, tato znalost nám bude sloužit jako kontrola výsledku.

$$(x-1)(x+1)(x-3)(x+2)(x^2+2) = x^6 - x^5 - 5x^4 - x^3 - 8x^2 + 2x + 12$$

$$x(x-1)(x+1)(x-2) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
(x^6 & -x^5 & -5x^4 & -x^3 & -8x^2 & +2x & +12) & : (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x) = x^2 + x - 2 \\
-x^6 & +2x^5 & +x^4 & -2x^3 & & & & \\
 & x^5 & -4x^4 & -3x^3 & -8x^2 & +2x & +12 & \\
 & -x^5 & +2x^4 & +x^3 & -2x^2 & & & \\
 & & -2x^4 & -2x^3 & -10x^2 & +2x & +12 & \\
 & & 2x^4 & -4x^3 & -2x^2 & +4x & & \\
 & & & -6x^3 & -12x^2 & +6x & +12 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & -2x^3 & -x^2 & +2x) & & : (-6x^3 - 12x^2 + 6x + 12) = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3} \\
-x^4 & -2x^3 & +x^2 & +2x & & \\
 & -4x^3 & & +4x & & \\
 & 4x^3 & +8x^2 & -4x & -8 & \\
 & & 8x^2 & & -8 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl}
(-6x^3 & -12x^2 & +6x & +12) & : (8x^2 - 8) = \\
= 6(-x^3 & -2x^2 & +x & +2) & : 8(x^2 - 1) = \frac{6}{8}(-x - 2) \\
x^3 & & -x & & \\
 & -2x^2 & & +2 & \\
 & 2x^2 & & -2 & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

$$NSD(x^6 - x^5 - 5x^4 - x^3 - 8x^2 + 2x + 12; x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x) = x^2 - 1$$

Cvičení 10.2 *Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí následující tvrzení (matematickou indukcí nebo jinak):*

(a) $2|(n^2 + n)$

(b) $3|(n^3 + 2n)$

(c) $5|(2^{4n+3} - 3)$

(d) $6|(10^n - 4)$

(e)* $133|(11^{n+2} + 12^{n+1})$

(f)* $17|(5^{n+3} + 11^{3n+1})$

(g)* $11|(6^{2n} + 3^{3n+2} + 3^n)$

Řešení:

(a) Rozložme si $n^2 + n$ na součin $n(n+1)$. Jedná se o součin dvou po sobě jdoucích čísel, jedno z nich tedy musí být sudé, proto $2|(n^2 + n)$.

(b) Platnost dokážeme matematickou indukcí:

1. Pro $n = 1 : 3|(1 + 2)$, což zřejmě platí.
2. Předpokládejme platnost pro n a z předpokladu dokažme platnost pro $(n + 1)$.

$$\begin{array}{rcl} 3 & | & (n+1)^3 + 2(n+1) \\ 3 & | & n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ 3 & | & n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1) \end{array}$$

Výraz $n^3 + 2n$ je dělitelný 3 dle předpokladu, výraz $3(n^2 + n + 1)$ je zřejmě také dělitelný 3.

(c) Upravujme pravou stranu.

$$\begin{array}{rcl} 5 & | & 2^{4n+3} - 3 \\ 5 & | & 8 \cdot 2^{4n} - 3 \\ 5 & | & 8 \cdot 16^n - 3 \end{array}$$

Pro každé n bude mít 16^n na místě jednotek cifru 6, po vynásobení 8 bude na místě jednotek cifra 8, po odečtení 3 bude mít výsledné číslo na místě jednotek cifru 5. Každé číslo s cifrou 5 na místě jednotek je dělitelné číslem 5.

(d) Platnost dokážeme matematickou indukcí:

1. Pro $n = 1 : 6|(10 - 4)$, což zřejmě platí.
2. Předpokládejme platnost pro n a z předpokladu dokažme platnost pro $(n + 1)$.

$$\begin{array}{rcl} 6 & | & 10^{n+1} - 4 \\ 6 & | & 10 \cdot 10^n - 4 \\ 6 & | & 9 \cdot 10^n + 10^n - 4 \end{array}$$

Výraz $10^n - 4$ je dělitelný 6 dle předpokladu, ve výrazu $9 \cdot 10^n$ je 9 dělitelná 3, 10^n je dělitelné 2, dohromady je tedy celý výraz dělitelný 6.

(e*) Číslo 133 si můžeme rozložit na součin prvočísel $133 = 7 \cdot 19$. Nyní stačí dokázat, že výraz $11^{n+2} + 12^{n+1}$ je dělitelný 7 i 19. To zvládneme opět pomocí matematické indukce.

1. Pro $n = 1$ dostáváme $7 | 11^3 + 12^2 = 1\,475$, to ovšem není pravda. Vidíme, že tvrzení neplatí pro $n = 1$, nemá tedy smysl dále dokazovat.

(f*) Užitím matematické indukce tvrzení dokážeme.

1. Pro $n = 1 : 17 | 5^4 + 11^4 = 15\,266, 15\,266 : 17 = 898$.
2. Předpokládejme platnost pro na z předpokladu dokažme platnost pro $n + 1$.

$$\begin{array}{rcl} 17 & | & 5^{n+4} + 11^{3n+4} \\ 17 & | & 5 \cdot 5^{n+3} + 11^3 \cdot 11^{3n+1} \\ 17 & | & 5(5^{n+3} + 11^{3n+1}) + (11^3 - 5)11^{3n+1} \\ 17 & | & 5(5^{n+3} + 11^{3n+1}) + 1\,326 \cdot 11^{3n+1} \end{array}$$

Výraz $5(5^{n+3}+11^{3n+1})$ je podle předpokladu dělitelný 17, protože platí $1\,326 : 17 = 78$, je i $1\,326 \cdot 11^{3n+1}$ dělitelné 17.

(g*) Užitím matematické indukce se pokusíme dokázat tvrzení.

1. Pro $n = 1 : 11 | 6^2 + 3^3 + 3 = 66$, to zřejmě platí.
2. Předpokládejme platnost pro na z předpokladu dokažme platnost pro $n + 1$.

$$\begin{array}{rcl} 11 & | & 6^{2(n+1)} + 3^{(n+1)+2} + 3^{n+1} \\ 11 & | & 6^{2n+2)} + 3^{n+3} + 3^{n+1} \\ 11 & | & 6^2 \cdot 6^{2n} + 3 \cdot 3^{n+2} + 3 \cdot 3^n \\ 11 & | & 3(6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n) + 33 \cdot 6^{2n} \end{array}$$

Výraz $3(6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n)$ je podle předpokladu dělitelný 11 a na první pohled je vidět, že i výraz $33 \cdot 6^{2n}$ je dělitelný 11.

Cvičení 10.3 *Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí následující tvrzení (matematickou indukcí):*

(a) $1 + 3 \cdots + (2n - 1) = n^2$

(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(d) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(e) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

(f) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$

Řešení:

(a) Nechť n je sudé číslo. Pak lze všechny sčítance rozdělit do dvou sloupců o stejném počtu řádků následovně:

$$\begin{array}{cc} 1 & 2n-1 \\ 3 & 2n-3 \\ 5 & 2n-5 \\ & \vdots \end{array}$$

Řádků je $\frac{n}{2}$, v každém z nich je součet roven $2n$, dohromady $\frac{n}{2} \cdot 2n = n^2$. Pro liché n odebereme číslo $2n-1$ a přičteme jej až na konci. Opět máme dva sloupce, v nichž je $\frac{n-1}{2}$ řádků, v každém získáme součet $2n-2$. Celkem dostáváme $\frac{n-1}{2} \cdot 2(n-1) + 2n - 1 = (n-1)^2 + 2n - 1 = = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2$. Tím je tvrzení dokázáno.

(b) Tvrzení dokážeme užitím matematické indukce.

1. Pro $n = 1 : 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, to zřejmě platí.
2. Předpokládejme platnost pro n a z předpokladu dokažme platnost pro $(n+1)$.
$1^2 + 2^2 + 3^2 \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$
$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)}{6} = \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6} =$
$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$

(c) Tvrzení dokážeme užitím matematické indukce.

1. Pro $n = 1 : 1 = \frac{1 \cdot 4}{4}$, to zřejmě platí.
2. Předpokládejme platnost pro n a z předpokladu dokažme platnost pro $(n+1)$.
$1^3 + 2^3 + 3^3 \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$
$= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)}{4} = \frac{(n+1)^2[n^2+4n+4]}{4} =$
$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$

(d) Tvrzení dokážeme užitím matematické indukce.

1. Pro $n = 1 : \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, to zřejmě platí.
2. Předpokládejme platnost pro n a z předpokladu dokažme platnost pro $(n+1)$.
$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$
$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

(e) Tvrzení dokážeme užitím matematické indukce.

1. Pro $n = 1 : \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$, to zřejmě platí.
2. Předpokládejme platnost pro n a z předpokladu dokažme platnost pro $(n+1)$.
$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$
$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$

(f) Tvrzení dokážeme užitím matematické indukce.

1. Pro $n = 1 : 1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2}$. Tvrzení neplatí pro $n = 1$, proto není třeba dále pokračovat v důkazu.