MA0002 — řešení DÚ č. 7

Cvičení 7.1 *Eukleidovým algoritmem najděte největšího společného dělitele následujících dvojic čísel:*

(a) 240 a 264

(b) 51 a 81

(c) 391 a 10 127

(d) 437 a 247

Řešení:

(a) 240 a 264

$$\begin{aligned} 264 &= 1 \cdot 240 + 24 \\ 240 &= 10 \cdot 24 + 0 \end{aligned}$$

$$NSD(240; 264) = 24$$

(b) 51 a 81

$$\begin{aligned} 81 &= 1 \cdot 51 + 30 \\ 51 &= | \cdot 30 + 21 \\ 30 &= 1 \cdot 21 + 9 \\ 21 &= 2 \cdot 9 + 3 \\ 9 &= 3 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

$$NSD(51; 81) = 3$$

(c) 391 a 10 127

$$\begin{aligned} 10\,127 &= 25 \cdot 391 + 352 \\ 391 &= 1 \cdot 352 + 39 \\ 352 &= 9 \cdot 39 + 1 \\ 39 &= 39 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

$$NSD(391; 10\,127) = 1$$

(d) 437 a 247

$$\begin{aligned} 437 &= 1 \cdot 247 + 190 \\ 247 &= 1 \cdot 190 + 57 \\ 190 &= 3 \cdot 57 + 19 \\ 57 &= 3 \cdot 19 + 0 \end{aligned}$$

$$NSD(437; 247) = 19$$

Cvičení 7.2 *Uveďte, jaké zbytky po dělení 3, 4, 5, 6, 8 a 10 dávají druhé mocniny čísel 1 až 10. Výsledky přehledně zapište, např. do tabulky:*

dělitel:	*3*	*4*	*5*	*6*	*8*	*10*
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
4	*1*	*0*	*4*	*4*	*4*	*4*
9	*0*	*1*	*4*	*3*	*1*	*9*
16	*1*	*0*	*1*	*4*	*0*	*6*
25	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*5*
36	*0*	*0*	*1*	*0*	*4*	*6*
49	*1*	*1*	*4*	*1*	*1*	*9*
64	*1*	*0*	*4*	*4*	*0*	*4*
81	*0*	*1*	*1*	*3*	*1*	*1*
100	*1*	*0*	*0*	*4*	*4*	*0*

Cvičení 7.3 *Určete, pro které hodnoty* $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10$ *jsou následující výrazy (a) sudé, (b) liché:*

(a) $n^2 - 4n + 3$

(b) $n^2 + 5n + 6$

(c) $n^2 - 1$

(d) $n^3 + 3n^2 - n - 3$

Zformulujte obecné pravidlo (např. „platí pro všechna n *tvaru ...“)*

Řešení:

Vytvořme si tabulku parity daných výrazů pro $1 \leq n \leq 10$. Poté zformulujeme ke každé variantě obecné pravidlo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^2 - 4n + 3$	S	L	S	L	S	L	S	L	S	L
$n^2 + 5n + 6$	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
$n^2 - 1$	S	L	S	L	S	L	S	L	S	L
$n^3 + 3n^2 - n - 3$	S	L	S	L	S	L	S	L	S	L

(a) Určeme obecně paritu výrazu, lichá čísla označme L a sudá čísla S. Platí: $L^2 - 4L + 3 = L - S + L = S, \quad S^2 - 4S + 3 = S - S + L = L.$

Pro všechna n tvaru $2n, n \in \mathbb{N}$ je výraz lichý.
Pro všechna n tvaru $2n - 1, n \in \mathbb{N}$ je výraz sudý.

(b) Postupujme stejně jako v předchozí variantě. Platí: $L^2 + 5L + 6 = L + L + S = S, \quad S^2 + 5S + 6 = S + S + S = S.$

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je výraz sudý.

(c) Postupujme stejně jako v předchozích variantách. Platí: $L^2 - 1 = L - L = S, \quad S^2 - 1 = S - L = L.$

Pro všechna n tvaru $2n, n \in \mathbb{N}$ je výraz lichý.
Pro všechna n tvaru $2n - 1, n \in \mathbb{N}$ je výraz sudý.

(d) Postupujme stejně jako v předchozích variantách.
Platí: $L^3 + 3L^2 - L - 3 = L + L - L - L = S$,
$S^3 + 3S^2 - S - 3 = S + S - S - L = L$.

Pro všechna n tvaru $2n, n \in \mathbb{N}$ je výraz lichý.
Pro všechna n tvaru $2n - 1, n \in \mathbb{N}$ je výraz sudý.

Cvičení 7.4 *Určete, pro které hodnoty $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10$ jsou následující výrazy dělitelné (a) 2, (b) 3, (c) 6:*

(a) $\frac{n^2+n-2}{4}$

(b) $\frac{n^3-n}{6}$

(c) $\frac{n^2+5n+6}{2}$

(d) $\frac{2n^2-1}{2n+1}$

Řešení:

Podobně jako v předchozím cvičení vytvořme tabulku, nyní do ní však zapišme hodnoty výrazů po dosazení jednotlivých čísel a určeme dělitelnost každé hodnoty čísly 2, 3 a 6..

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{n^2+n-2}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{18}{4}$	$\frac{28}{4}$	$\frac{40}{4}$	$\frac{54}{4}$	$\frac{70}{4}$	$\frac{98}{4}$	$\frac{108}{4}$
$\frac{n^3-n}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{24}{6}$	$\frac{60}{6}$	$\frac{120}{6}$	$\frac{210}{6}$	$\frac{336}{6}$	$\frac{504}{6}$	$\frac{720}{6}$	$\frac{990}{6}$
$\frac{n^2+5n+6}{2}$	$\frac{12}{2}$	$\frac{20}{2}$	$\frac{30}{2}$	$\frac{42}{2}$	$\frac{56}{2}$	$\frac{72}{2}$	$\frac{90}{2}$	$\frac{110}{2}$	$\frac{132}{2}$	$\frac{156}{2}$
$\frac{2n^2-1}{2n+1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{31}{9}$	$\frac{49}{11}$	$\frac{71}{13}$	$\frac{97}{15}$	$\frac{127}{17}$	$\frac{161}{19}$	$\frac{199}{21}$

(a) Pro výraz $\frac{n^2+n-2}{4}$ dle hodnot z tabulky platí:

   (a) je dělitelný 2 pro $n \in \{1; 6; 9\}$
   (b) je dělitelný 3 pro $n \in \{1; 10\}$
   (c) je dělitelný 6 pro $n = 1$

(b) Pro výraz $\frac{n^3-n}{6}$ dle hodnot z tabulky platí:

   (a) je dělitelný 2 pro $n \in \{1; 3; 4; 5; 7; 8; 9\}$
   (b) je dělitelný 3 pro $n \in \{1; 8; 9; 10\}$
   (c) je dělitelný 6 pro $n \in \{1; 8; 9\}$

(c) Pro výraz $\frac{n^2+5n+6}{2}$ dle hodnot z tabulky platí:

   (a) je dělitelný 2 pro $n \in \{1; 2; 5; 6; 9; 10\}$
   (b) je dělitelný 3 pro $n \in \{1; 3; 4; 6; 7; 9; 10\}$
   (c) je dělitelný 6 pro $n \in \{1; 6; 9; 10\}$

(d) Pro výraz $\frac{2n^2-1}{2n+1}$ dle hodnot z tabulky platí:

   (a) není dělitelný 2 pro žádné $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10$
   (b) není dělitelný 3 pro žádné $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10$
   (c) není dělitelný 6 pro žádné $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10$

Cvičení 7.5 *Dokažte:*

(a) *Dává-li n po dělení 3 zbytek 1, pak n^2 dává po dělení 3 zbytek 1.*

(b) *Výraz $n^3 - n$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ dělitelný 6.*

(c) *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: n^2 dává po dělení 4 zbytek 1 právě tehdy, když n je liché.*

(d) *Výraz $n^3 + 9n^2 + 26n + 24$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ dělitelný 6.*

Řešení:

(a) Napišme si $n = 3k + 1, k \in \mathbb{N}_0$.
Po umocnění dostáváme $n^2 = 9k^2 + 6k + 1$, přičemž členy $9k^2; 6k$ jsou dělitelné třemi, proto je zbytek po dělení třemi 1.

(b) Výraz $n^3 - n$ lze rozložit na součin $n(n-1)(n+1)$, tedy součin tři po sobě jdoucích čísel. Mezi třemi po sobě jdoucími čísly je jistě právě jedno dělitelné třemi a alespoň jedno dělitelné dvěma, dohromady je výraz dělitelný číslem 6.

(c) Umocněme na druhou n tvaru $2k+1, k \in \mathbb{N}_0$: $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, přičemž členy $4k^2; 4k$ jsou dělitelné 4, celý výraz $(2k+1)^2$ proto dává po dělení 4 zbytek 1.

Jelikož je v zadání použita spojka „právě tehdy, když", musíme ukázat, že pro jiná než lichá n neplatí, že n^2 dává po dělení 4 zbytek 1. Ověřme tedy situaci pro n tvaru $2k, k \in \mathbb{N}$: $(2k)^2 = 4k^2$, což je beze zbytku dělitelné 4.

(d) Výraz $n^3 + 9n^2 + 26n + 24$ můžeme například pomocí Hornerova schématu rozložit na součin $(n+2)(n+3)(n+4)$, což jsou tři po sobě jdoucí čísla a ze stejného důvodu jako ve variantě (b) je celý výraz dělitelný číslem 6.

Cvičení 7.6 *Dokažte, že pro každé dvouciferné přirozené číslo n obsahuje dekadický zápis čísla n^2 alespoň dvě různé cifry. (*) Dokažte, že tvrzení platí pro libovolné přirozené číslo $n > 3$.*

Řešení:

Soustřeďme se na jednotky každého dvouciferného čísla. Například číslo s cifrou 1 na místě jednotek můžeme zapsat ve tvaru $10a + 1, a \in \{1; 2; \dots 9\}$, jeho druhá mocnina je $(10a+1)^2 = 100a^2 + 20a + 1$. Na místě desítek se nám nikdy nemůže objevit cifra jedna, protože pro jakékoli a má číslo $20a$ na místě jednotek cifru různou od jedné. Podobně budeme postupovat i pro další cifry na místě jednotek.

$(10a+2)^2 = 100a^2 + 40a + 4$, na místě jednotek bude cifra 4. Abychom dostali cifru 4 i na místě desítek, muselo by $a \in \{1; 6\}$, ale $12^2 = 144, 62^2 = 3\,844$.

$(10a+3)^2 = 100a^2 + 60a + 9$, na místě jednotek je cifra 9, kterou nemůžeme na místě desítek nikdy získat.

$(10a+4)^2 = 100a^2 + 80a + 16 = 100a^2 + 10(8a+1) + 6$, na místě jednotek je cifra 6, kterou nemůžeme na místě desítek nikdy získat.

$(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100(a^2+a) + 10 \cdot 2 + 5$, číslo zřejmě vždy končí 25.

$(10a+6)^2 = 100a^2 + 120a + 36 = 100(a^2+a) + 10(2a+3) + 6$, na místě jednotek je cifra 6, kterou nemůžeme na místě desítek nikdy získat.

$(10a+7)^2 = 100a^2 + 140a + 49 = 100(a^2+a) + 10(4a+4) + 9$, na místě jednotek je cifra 9, kterou nemůžeme na místě desítek nikdy získat.

$(10a+8)^2 = 100a^2 + 160a + 64 = 100(a^2+a) + 10(6a+6) + 4$, na místě jednotek je cifra 4. Abychom dostali cifru 4 i na místě desítek, muselo by $a \in \{3; 8\}$, ale $38^2 = 1\,444, 88^2 = 7\,744$.

$(10a+9)^2 = 100a^2 + 180a + 81 = 100(a^2+a) + 10(8a+8) + 1$, na místě jednotek je cifra 1, kterou nemůžeme na místě desítek nikdy získat.

Pro dvouciferná čísla zakončená cifrou 0 je situace zřejmá.

Pro čísla $3 < n < 10$ dokážeme tvrzení snadno vypsáním jednotlivých mocnin: $4^2 = 16, 5^2 = 25, 6^2 = 36, 7^2 = 49, 8^2 = 64, 9^2 = 81$. Pro čísla $n > 99$ se opřeme o konstrukci z hlavní čísti tohoto cvičení. Možnosti, u kterých nelze zajistit stejnou cifru už na místě desítek, můžeme rovnou vypustit, jelikož přidáním stovek, tisíců a dále se situace nezmění. Proto nyní uvažujeme pouze čísla $n > 99$ končící na dvojčíslí: 12, 62, 38 a 88. Utvořme si trojciferná čísla v podobném tvaru, jako jsme výše tvořili dvouciferná, a vylučme čísla, ve kterých se vytvoří různá cifra už na místě stovek.

$(100a+12)^2 = 10\,000a^2 + 2\,400a + 144 = 10\,000a^2 + 1\,000 \cdot 2a + 100(4a+1) + 44$, na místě desítek i jednotek je cifra 4, tu však na místě stovek nijak získat nemůžeme.

$(100a+62)^2 = 10\,000a^2 + 12\,400a + 3\,844 = 10\,000(a^2+a) + 1\,000(2a+3) + 100(4a+8) + 44$, na místě desítek i jednotek je cifra 4. Abychom dostali cifru 4 i na místě stovek, muselo by $a \in \{4; 9\}$, ale $462^2 = 213\,444$, $962^2 = 925\,444$.

$(100a+38)^2 = 10\,000a^2 + 7\,600a + 1\,444 = 10\,000a^2 + 1\,000(7a+1) + 100(6a+4) + 44$, na místě desítek i jednotek je cifra 4. Abychom dostali cifru 4 i na místě stovek, muselo by být $a = 5$, ale $538^2 = 289\,444$.

$(100a+88)^2 = 10\,000a^2 + 17\,600a + 7\,744 = 10\,000(a^2+a) + 1\,000(7a+7) + 100(6a+7) + 44$, na místě desítek i jednotek je cifra 4, tu však na místě stovek nijak získat nemůžeme.

Podobně pokračujme pro čtyřmístná čísla zakončená trojčíslími 462, 962 a 538.

$(1\,000a+462)^2 = 1\,000\,000a^2 + 924\,000a + 213\,444 = 1\,000\,000a^2 + 100\,000(9a+2) + 10\,000(2a+1) + 1\,000(4a+3) + 444$, na místě tisíců však 4 nijak získat nemůžeme.

$(1\,000a+962)^2 = 1\,000\,000a^2 + 1\,924\,000a + 925\,444 = 1\,000\,000(a^2+a) + 100\,000(9a+9) + 10\,000(2a+2) + 1\,000(4a+5) + 444$, na místě tisíců však 4 nijak získat nemůžeme.

$(1\,000a+538)^2 = 1\,000\,000a^2 + 1\,076\,000a + 289\,444 = 1\,000\,000(a^2+a) + 100\,000 \cdot 2 + 10\,000(7a+8) + 1\,000(6a+9) + 444$, na místě tisíců však 4 nijak získat nemůžeme.

Dokázali jsme, že pro každé přirozené číslo $n > 3$ obsahuje dekadický zápis čísla n^2 alespoň dvě různé cifry.

Cvičení 7.7 *Najděte takové prvočíslo p, že i čísla $2p+1, 4p+1$ jsou prvočísla. (*) Najděte všechna taková prvočísla p.*

Řešení:

Sepišme si tabulku hodnot $p, 2p+1, 4p+1$ pro několik nejmenších prvočísel.

p	$2p+1$	$4p+1$
2	5	9
3	7	13
5	11	21
7	15	29
11	23	45

Mohli bychom pokračovat dál, ale už nyní je vidět jedno řešení $p = 3$. U dalších prvočísel je vždy jeden z výrazů $2p+1, 4p+1$ dělitelný třemi. Podívejme se tedy na prvočísla dávající různý zbytek po dělení třemi.

Začněme prvočísly tvaru $p = 3k, k \in \mathbb{N}$, takové je zřejmě pouze prvočíslo $p = 3$, které, jak už víme, je vyhovující.

Pro prvočísla tvaru $p = 3k+1, k \in \mathbb{N}_0$ platí: $2(3k+1)+1 = 6k+3 = 3(2k+1)$, $4(3k+1)+1 = 12k+5$. Výraz $2p+1$ je dělitelný třemi, proto nikdy nemůže být prvočíselný.

Pro prvočísla tvaru $p = 3k+2, k \in \mathbb{N}_0$ platí: $2(3k+2)+1 = 6k+5$, $4(3k+2)+1 = 12k+9 = 3(4k+3)$. Výraz $4p+1$ je dělitelný třemi, proto nikdy nemůže být prvočíselný.

Jediným vyhovujícím prvočíslem je $p = 3$.

Cvičení 7.8 *Určete alespoň jedno přirozené číslo n, pro něž je číslo $46^n + 296 \cdot 13^n$ dělitelné číslem 1 947. (*) Určete všechna taková n.*

Řešení:

$$
\begin{aligned}
1\,947 &\mid 46^n + 296 \cdot 13^n \\
3 \cdot 11 \cdot 59 &\mid 2^n \cdot 23^n + 2^3 \cdot 37 \cdot 13^n
\end{aligned}
$$

Protože jsou čísla 3, 11 a 59 nesoudělná, stačí nalézt taková n, po která je výraz dělitelný čísly 3, 11 i 59. Přitom využijeme skutečnosti, že můžeme libovolné číslo ve výrazu nahradit jiným číslem, které dává stejný zbytek po dělení postupně čísly 3, 11 a 59.

$$
\begin{aligned}
3 &\mid 46^n + 296 \cdot 13^n \\
3 &\mid 1^n + 2 \cdot 1^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
11 &\mid 46^n + 296 \cdot 13^n \\
11 &\mid 2^n + 10 \cdot 2^n \\
11 &\mid 2^n(1+10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
59 &\mid 46^n + 296 \cdot 13^n \\
59 &\mid (-13)^n + 1 \cdot 13^n \\
59 &\mid (-1)^n 13^n + 13^n \\
59 &\mid 13^n((-1)^n + 1)
\end{aligned}
$$

Vidíme, že výraz je dělitelný čísly 3 a 11 pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Číslem 59 je výraz dělitelný pouze v případě, že bude závorka $((-1)^n + 1)$ rovna nule, tedy pouze pro lichá n.

Pro všechna lichá přirozená čísla n je výraz $46^n + 296 \cdot 13^n$ dělitelný číslem 1 947.

Cvičení 7.9 *Dokažte, že pro všechna přirozená n platí:* $9|(10^n(9n-1)+1)$.
(*) Dokažte, že pro všechna přirozená n platí: $81|(10^n(9n-1)+1)$.

Řešení:

$$
\begin{array}{lcl}
9 & | & 10^n(9n-1)+1 \\
9 & | & (9+1)^n(9n-1)+1 \\
9 & | & \left(9^n + \binom{n}{1}9^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}9 + 1\right)(9n-1)+1 \\
9 & | & \left(9^n + \binom{n}{1}9^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-2}9^2\right)(9n-1) + \left(\binom{n}{n-1}9 + 1\right)(9n-1)+1 \\
9 & | & 81\left(9^{n-2} + \binom{n}{1}9^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-2}1\right)(9n-1) + (9n+1)(9n-1)+1 \\
9 & | & 81\left(9^{n-2} + \binom{n}{1}9^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-2}1\right)(9n-1) + 81n^2 - 1 + 1 \\
9 & | & 81\left(9^{n-2} + \binom{n}{1}9^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-2}1\right)(9n-1) + 81n^2 \\
9 & | & 81\left[\left(9^{n-2} + \binom{n}{1}9^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-2}1\right)(9n-1) + n^2\right]
\end{array}
$$

Výraz na pravé straně je dělitelný nejen číslem 9, ale i číslem 81.

Cvičení 7.10 *Dokažte, že pro všechna přirozená n platí:* $36|(2n^6 - n^4 - n^2)$.

Řešení:

$$
\begin{array}{lcl}
36 & | & 2n^6 - n^4 - n^2 \\
36 & | & n^2(2n^4 - n^2 - 1) \\
36 & | & n^2(n^2-1)(2n^2+1) \\
36 & | & (n-1)n^2(n+1)(2n^2+1)
\end{array}
$$

Opět se nám objevuje součin tří po sobě jdoucích čísel $(n-1)n(n+1)$, z nichž je právě jedno dělitelné třemi a alespoň jedno dělitelné dvěma.

Je-li n dělitelné třemi, pak je celá pravá strana dělitelná devíti a zbývá pouze ověřit dělitelnost čtyřmi. Pokud je dělitelné třemi jedno z čísel $(n-1)$, $(n+1)$, musíme ověřit, že je dělitelný třemi i výraz $2n^2 + 1$.
$n-1 = 3k, k \in \mathbb{N} : n = 3k+1, 2(3k+1)^2+1 = 18k^2+12k+3 = 3(6k^2+4k+1)$
$n+1 = 3k, k \in \mathbb{N} : n = 3k-1, 2(3k-1)^2+1 = 18k^2-12k+3 = 3(6k^2-4k+1)$
Výraz $(2n^6 - n^4 - n^2)$ je dělitelný číslem 9.

Jsou-li dvě z čísel $(n-1)n(n+1)$ sudá, je jejich součin dělitelný čtyřmi. Je-li ovšem sudé pouze jedno z těchto čísel, musí se jednat o číslo n. To se ve výrazu vyskytuje ve druhé mocnině, proto je jistě celý výraz $(2n^6 - n^4 - n^2)$ dělitelný číslem 4.

Dokázali jsme, že výraz $(2n^6 - n^4 - n^2)$ je dělitelný číslem 36.