MA0002 Diskrétní matematika — písemka T

Každý příklad je hodnocen nejvýše tolika body, kolik je uvedeno v závorce.
Pro připuštění k ústní zkoušce je třeba získat nejméně 12 bodů.

Své myšlenkové postupy přiměřeně komentujte pomocí slov (českého, slovenského nebo jiného) přirozeného jazyka.

1. [3 b.] Vyjádřete pomocí faktoriálů a kombinačních čísel:
   (a) Kolika způsoby lze přeskládat písmena slova ACONCAGUA?
   (b) V kolika případech z úlohy (a) nestojí dvě "A"vedle sebe?
   (c) V kolika případech z úlohy (a) nestojí dvě "C"vedle sebe?

2. [2 b.] Dokažte, že výraz
$$n^3 + 11n + 6$$
   je dělitelný 6 pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

3. [2 b.] Určete a zdůvodněte, pro která $n \in \mathbb{N}$ je výraz $3n^2$ dělitelný 21.

4. [3 b.] Vypočtěte:
$$S = 18 + 6 + 2 + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n}$$

5. [2 b.] Vyřešte v oboru $\mathbb{N}$ rovnici:
$$\frac{(x)!}{(x-2)!} - 2\frac{(x-2)!}{(x-4)!} - 36 = 0$$

6. [2 b.] Najděte celočíselné kořeny polynomu
$$x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 20x - 24$$

7. [3 b.] V rovině je dáno n přímek, z nichž každé dvě se protínají, ale žádné tři se neprotínají v jednom bodě.
   (a) Na kolik částí rozdělí rovinu $n = 7$ přímek?
   (b) Uveďte obecný nebo rekurentní vzorec pro n přímek, kde $n \in \mathbb{N}$.

8. [3 b.] Najděte největšího společného dělitele
   (a) dvou čísel: 455 a 665;
   (b) polynomu $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ a polynomu $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

9. [2 b.] Vymyslete slovní úlohu, aby výsledek byl:
$$\frac{6!}{2!2!} - 2\frac{5!}{2!} + 4!$$