Pracovní list (MA005, cvičení 6)

Násobení matic

Instrukce: Níže popsané úkoly můžete řešit ve skupinách 2 až 4 lidí. Své finální odpovědi zapisujte přímo pod zadání.

1. Jsou dány matice A, B, C:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro každou dvojici matic $X, Y \in \{A, B, C\}$ proveďte jejich součin $X \cdot Y,\ Y \cdot X$. Diskutujte situace, kdy součin není možné provést.

2. Jsou dány matice X typu $m \times n$ a matice Y typu $k \times l$, kde $k, l, m, n \in \mathbb{N}$. Určete podmínky nutné pro to, aby bylo možné provést násobení matic X, Y.

3. Jsou dány matice X typu $m \times n$ a Y typu $k \times l$, kde $k, l, m, n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že je možné provést součin matic $C = X \cdot Y$. Stanovte výraz, kterému se obecně rovná prvek c_{ij} matice C na i-tém řádku a j-tém sloupci. (Prvky matice X označujte x_{ij}, prvky matice Y označujte y_{ij}.)

$c_{ij} =$

Jaký je typ výsledné matice C?

4. Je násobení matic asociativní? Je komutativní?

Pracovní list (MA005, cvičení 6)

Gauss-Jordanova metoda

Instrukce: Níže popsané úkoly můžete řešit ve skupinách 2 až 4 lidí. Své finální odpovědi zapisujte přímo pod zadání.

1. Je dána matice A a demonstrovány elementární řádkové úpravy, které vedly k nalezení inverzní matice A^{-1}. Nalezněte matice, jejichž vynásobením zleva reprezentujeme danou úpravu. (*Nápověda:* zkuste použít mírně obměněnou jednotkovou matici.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 13 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1. úprava u_1: $r_2 := r_2 - 13 \cdot r_1$ (od druhého řádku odečteme 13-násobek 1. řádku):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 13 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 13 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

2. úprava u_2: $r_3 := r_3 - 6 \cdot r_1$ (od třetího řádku odečteme 6-násobek 1. řádku):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. úprava u_3: prohození 2. a 3. řádku:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

4. úprava u_4: $r_3 := r_3 - 3 \cdot r_2$ (od třetího řádku odečteme 3-násobek 2. řádku):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. úprava u_5: $r_2 := r_2 + 2 \cdot r_3$ (k druhému řádku přičteme 2-násobek 3. řádku):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. úprava u_6: $r_1 := r_1 - r_3 + r_2$ (od 1. řádku odečteme 3. řádek a přičteme 2. řádek):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. úprava u_7: $r_2 := (-1) \cdot r_2$ (2. řádek vynásobíme -1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Nechť symbol U_i odpovídá Vámi nalezené matici v úpravě u_i ($i = 1, 2, \ldots, 7$). Pak platí $U_7 \cdot U_6 \cdot U_5 \cdot U_4 \cdot U_3 \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot A = E$. Vysvětlete, proč funguje Gauss-Jordanova metoda. Jak musí vypadat „vstup“ pro její aplikaci?