MA0005 Algebra 2, 10. seminář

7. 12. 2020

Náplň cvičení

1. Maticové operace
   - Sčítání matic
   - Násobení matic

2. Gauss-Jordanova metoda
   - SLR pomocí inverzní matice

Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
- Kovár, M.: *Maticový a tenzorový počet*. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav matematiky.

Motivace

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

Motivace

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

Soustavu lze zapsat maticově:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Motivace

Systém

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

lze zapsat symbolicky takto: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, kde A je čtvercová matice řádu n.

Motivace

Systém

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

lze zapsat symbolicky takto: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, kde A je čtvercová matice řádu n.

Existence inverzní matice A^{-1} vzhledem k násobení by zajistila přímý výpočet řešení systému:

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= \vec{b} \\ A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Sčítání matic

Sčítání matic

Pro matice A, B stejného typu $m \times n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ definujeme jejich součet $A + B$ jako matici, která vznikne sčítáním po složkách:

$$
\begin{aligned}
A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Sčítání matic

Sčítání matic

Pro matice A, B stejného typu $m \times n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ definujeme jejich součet $A + B$ jako matici, která vznikne sčítáním po složkách:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Poznámka: $(M_{m \times n}, +)$ je komutativní grupa.

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B. Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B. Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B. Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B. Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 2 & \\ & \end{pmatrix}$$

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B. Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 7 \cdot 3 \\ & \end{pmatrix}$$

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B. Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 7 \cdot 3 \\ -8 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & \end{pmatrix}$$

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B. Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 7 \cdot 3 \\ -8 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & -8 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B. Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 7 \cdot 3 \\ -8 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & -8 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 9 & 22 \\ -14 & -1 \end{pmatrix}$$

Násobení matic – pracovní list

1. Jsou dány matice A, B, C:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro každou dvojici matic $X, Y \in \{A, B, C\}$ proveďte jejich součin $X \cdot Y$, $Y \cdot X$. Diskutujte situace, kdy součin není možné provést.

2. Jsou dány matice X typu $m \times n$ a matice Y typu $k \times l$, kde $k, l, m, n \in \mathbb{N}$. Určete podmínky nutné pro to, aby bylo možné provést násobení matic $X \cdot Y$.

3. Jsou dány matice X typu $m \times n$ a Y typu $k \times l$, kde $k, l, m, n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že je možné provést součin matic $C = X \cdot Y$. Stanovte výraz, kterému se obecně rovná prvek c_{ij} matice C na i-tém řádku a j-tém sloupci. (Prvky matice X označujte x_{ij}, prvky matice Y označujte y_{ij}.) Jaký je typ výsledné matice C?

4. Je násobení matic asociativní? Je komutativní?

Násobení matic – definice

Násobení matic

Jsou dány matice A typu $m \times k$ a matice B typu $k \times n$. Součin matic $C = A \cdot B$ definujeme jako matici typu $m \times n$, jehož prvky získáme dle vzorce

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj}$$

Poznámka: Násobení matic je asociativní, nicméně není komutativní.

Čtvercová matice

Regulární vs. singulární matice

Čtvercovou matici A řádu $n \times n$ (kde $n \in \mathbb{N}$) nazveme

- **regulární**, právě když $h(A) = n$;
- **singulární**, právě když $h(A) < n$.

Čtvercová matice

Regulární vs. singulární matice

Čtvercovou matici A řádu $n \times n$ (kde $n \in \mathbb{N}$) nazveme

- **regulární**, právě když $h(A) = n$;
- **singulární**, právě když $h(A) < n$.

Poznámka: Množina čtvercových matic $(M_{n,n}, +, \cdot)$ je nekomutativní okruh obsahující netriviální dělitele nuly.

- Vynásobením čtvercových matic dostaneme opět čtvercovou matici.
- Násobení matic je asociativní, ne však komutativní.
- Neutrálním prvkem je jednotková matice E.
- Pouze k regulární matici A existuje inverzní matice A^{-1} tak, že $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$.
- Dokážeme najít dvě netriviální čtvercové matice, jejichž vynásobením vznikne nulová matice.

Výpočet inverzní matice Gauss-Jordanovou metodou

Gauss-Jordanova metoda pro výpočet inverzní matice

Mějme regulární čtvercovou matici A.

1. Zapišme si matice $(A|E)$, kde E je jednotková matice.
2. Elementárními řádkovými úpravami se snažíme z matice A nalevo "vyrobit" jednotkovou matici.
   - Nejprve matici nalevo převádíme na schodový tvar.
   - Následně nulujeme prvky nad hlavní diagonálou.
   - Na závěr případně násobíme jednotlivé řádky tak, aby se nalevo objevila jednotková matice.
3. Matice napravo je po všech výše uvedených úpravách maticí inverzní k původní matici A.

Inverzní matice – příklady

K následujícím maticím nalezněte inverzní matice.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 13 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Inverzní matice – příklady

K následujícím maticím nalezněte inverzní matice.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 13 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledky:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

Inverzní matice – příklady

K následujícím maticím nalezněte inverzní matice.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 13 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledky:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

Inverzní matice – příklady

K následujícím maticím nalezněte inverzní matice.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 13 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledky:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

C^{-1} neexistuje.

Pracovní list – Gauss-Jordanova metoda

Vysvětlete, proč funguje Gauss-Jordanova metoda.

SLR pomocí inverzní matice

Pomocí inverzní matice řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ 3x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

SLR pomocí inverzní matice

Pomocí inverzní matice řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ 3x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Výsledky: a) $(x, y, z) = (1, 2, -2)$,

SLR pomocí inverzní matice

Pomocí inverzní matice řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ 3x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Výsledky: a) $(x, y, z) = (1, 2, -2)$, b) $(x, y, z) = (1, 2, -2)$,

SLR pomocí inverzní matice

Pomocí inverzní matice řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ 3x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Výsledky: a) $(x, y, z) = (1, 2, -2)$, b) $(x, y, z) = (1, 2, -2)$, c) $(x, y, z) = (-1, -4, 5)$.