MA0005 Algebra 2, 11. seminář

4. 1. 2021

Náplň cvičení

1. Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory
   - Reprezentace lineárního zobrazení
   - Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení
   - Skládání lineárních zobrazení

Literatura a zdroje

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
- Isibalo.com: *Matematika – Lineární algebra*. Dostupné z: `https://isibalo.com/matematika/linearni-algebra`.
- Čadek, M.: Sbírka úloh z lineární algebry. 2002. Dostupné z: `http://www.math.muni.cz/~cadek/LA/sbirka.pdf`.
- Sobotíková, V. Řešené úlohy z Úvodu do algebry. Dostupné z: `http://www.vrstevnice.com/akce/grandaction/vskola/1semestr/lingebra/resPriklady.pdf`.

Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory

Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory

Jsou dány dva vektorové prostory $(V, +, \cdot)$ dimenze $n \in \mathbb{N}$ a $(V', +, \cdot)$ dimenze $m \in \mathbb{N}$ nad číselným tělesem $(T, +, \cdot)$. Lineárním zobrazením mezi prostory V, V' rozumíme zobrazení $\varphi : V \to V'$ splňující tyto dvě podmínky:

1. $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$,
2. $\varphi(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u})$

pro $\vec{u}, \vec{v} \in V, \alpha \in T$.

Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory

Jsou dány dva vektorové prostory $(V, +, \cdot)$ dimenze $n \in \mathbb{N}$ a $(V', +, \cdot)$ dimenze $m \in \mathbb{N}$ nad číselným tělesem $(T, +, \cdot)$. Lineárním zobrazením mezi prostory V, V' rozumíme zobrazení $\varphi : V \to V'$ splňující tyto dvě podmínky:

1. $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$,
2. $\varphi(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u})$

pro $\vec{u}, \vec{v} \in V, \alpha \in T$.

Poznámka: Lineární zobrazení lze zadat třemi způsoby:

- pomocí předpisu mezi souřadnicemi vektoru $\vec{u} \in V$ a $\varphi(\vec{u}) \in V'$,
- pomocí matice A typu $m \times n$, tj. $\varphi(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$,
- pomocí obrazů $\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \ldots, \varphi(\vec{e_n})$ bázových vektorů prostoru V.

Reprezentace lineárního zobrazení

Příklad 1

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ je zadáno předpisem pro vektor $\vec{x} \in V$.

- Najděte matici A zobrazení φ a obrazy standardní báze prostoru V.
- Najděte $\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})$.

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \varphi(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1), \vec{u} = (2, 3), \vec{v} = (-2, 1)$.
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1)$,
   $\vec{u} = (4, -1, 0), \vec{v} = (-3, 0, 5)$.
3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$,
   $\vec{u} = (0, 2, -3), \vec{v} = (-1, 1, 2)$.

Výsledky příkladu 1

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\varphi(1,0) = (2,0,-1), \varphi(0,1) = (1,1,1),$
$\varphi(2,3) = (7,3,1), \varphi(-2,1) = (-3,1,3).$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\varphi(1,0,0) = (1,0,1,1), \varphi(0,1,0) = (1,1,0,0), \varphi(0,0,1) = (0,1,1,0),$
$\varphi(4,-1,0) = (3,-1,4,4), \varphi(-3,0,5) = (-3,5,2,-3).$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\varphi(1,0,0) = (1,0), \varphi(0,1,0) = (1,1), \varphi(0,0,1) = (0,1),$
$\varphi(0,2,-3) = (2,-1), \varphi(-1,1,2) = (0,3).$

Reprezentace lineárního zobrazení

Příklad 2

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ je zadáno obrazy bázových vektorů V.

- Najděte matici A zobrazení φ.
- Najděte $\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})$.

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
   $\varphi(1,0,2) = (1,3), \varphi(-3,4,-2) = (2,-1), \varphi(0,2,1) = (-3,5)$,
   $\vec{u} = (1,4,2), \vec{v} = (-1,0,4)$.
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
   $\varphi(1,2,-3) = (-2,1), \varphi(2,1,-2) = (1,1), \varphi(1,-4,5) = (8,-1)$,
   $\vec{u} = (3,6,-1), \vec{v} = (0,3,2)$.
3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,
   $\varphi(1,0,1) = (1,0,1,0), \varphi(1,1,0) = (0,0,0,0), \varphi(0,1,1) = (0,1,0,1)$,
   $\vec{u} = (2,4,6), \vec{v} = (-4,0,2)$.

Výsledky příkladu 2

1. $A = \begin{pmatrix} -10 & -\frac{17}{4} & \frac{11}{2} \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$,

$\varphi(1,4,2) = (-16,15), \varphi(-1,0,4) = (32,-9)$.

2. zadané vektory netvoří bázi prostoru $V = \mathbb{R}^3$.

3. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\varphi(2,4,6) = (2,4,2,4), \varphi(-4,0,2) = (-1,3,-1,3)$.

Zobrazení přímky a roviny

Příklad 3

Je dána přímka p a rovina ϱ:

$p = \{[1 + t, 2 - t, 1 - t]; t \in \mathbb{R}\}$

$\varrho : 2x - 3y + z + 1 = 0$

Zjistěte, na jakou množinu bodů se přímka p a rovina ϱ zobrazí pomocí lineárního zobrazení:

- $\varphi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které je zadáno maticí
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$
- $\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které je zadáno maticí
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Výsledky příkladu 3

1. $\varphi_1(p) = \{[8, 4 - 3t, 2 + 2t]; t \in \mathbb{R}\}$
$\varphi_1(\varrho) : 3x - 2y - z - 10 = 0$

2. $\varphi_2(p) = \{[4 + t, 3, 2 + t]; t \in \mathbb{R}\}$
$\varphi_2(\varrho) : 8x - 7y - 10z + 3 = 0$

Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

Je dáno lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ mezi vektorovými prostory V (dimenze n) a V' (dimenze m).

1. Jádrem $\operatorname{Ker}\varphi$ zobrazení φ rozumíme množinu vektorů $\vec{u} \in V$, které se zobrazí na nulový vektor, tj.
   $\operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{u} \in V \mid \varphi(\vec{u}) = \vec{o}_{V'}\}$.
2. Oborem hodnot $\operatorname{Im}\varphi$ zobrazení φ rozumíme množinu vektorů $\vec{v} \in V'$, pro které existuje nějaký vzor, tj.
   $\operatorname{Im}\varphi = \{\vec{v} \in V' \mid \exists \vec{u} \in V : \varphi(\vec{u}) = \vec{v}\}$.

Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

Je dáno lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ mezi vektorovými prostory V (dimenze n) a V' (dimenze m).

1. Jádrem $\operatorname{Ker}\varphi$ zobrazení φ rozumíme množinu vektorů $\vec{u} \in V$, které se zobrazí na nulový vektor, tj. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{u} \in V \mid \varphi(\vec{u}) = \vec{o}_{V'}\}$.
2. Oborem hodnot $\operatorname{Im}\varphi$ zobrazení φ rozumíme množinu vektorů $\vec{v} \in V'$, pro které existuje nějaký vzor, tj. $\operatorname{Im}\varphi = \{\vec{v} \in V' \mid \exists \vec{u} \in V : \varphi(\vec{u}) = \vec{v}\}$.

Poznámka:

- $\operatorname{Ker}\varphi$ a $\operatorname{Im}\varphi$ jsou vektorové podprostory.
- $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = n - h(A) = \dim V - h(A)$, kde A je matice lineárního zobrazení φ.
- $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = h(A)$.
- $\dim V = \dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi)$.

Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

Příklad 4

Nalezněte jádro a obor hodnot lineárního zobrazení φ a určete jejich dimenze.

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1)$
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$
3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ \varphi(1, 2, 1) = (-1, 1, 1, 1),$
   $\varphi(0, 1, 2) = (1, 0, 0, 1), \varphi(1, 0, -1) = (0, 1, 1, 2).$
4. $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi$ je dáno maticí

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Výsledky příkladu 4

1. $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 0, \operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0,0)\}$,
   $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 3, \operatorname{Im}\varphi = \langle\{(1,0,1,1),(1,1,0,0),(0,1,1,0)\}\rangle$.
2. $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 1, \operatorname{Ker}\varphi = \langle\{(1,-1,1)\}\rangle$,
   $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2, \operatorname{Im}\varphi = \langle\{(1,0),(0,1)\}\rangle$.
3. $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 1, \operatorname{Ker}\varphi = \langle\{(0,3,4)\}\rangle$,
   $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2, \operatorname{Im}\varphi = \langle\{(-1,1,1,1),(1,0,0,1)\}\rangle$.
4. $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 2, \operatorname{Ker}\varphi = \langle\{(-3,-2,1,0),(-1,-1,0,1)\}\rangle$,
   $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2, \operatorname{Im}\varphi = \langle\{(1,2,-3),(0,-1,5)\}\rangle$.

Skládání lineárních zobrazení

Skládání lineárních zobrazení

Je dáno lineární zobrazení

- $\varphi : U \to V$ mezi vektorovými prostory U (dimenze n) a V (dimenze m) s maticí A typu $m \times n$,
- $\psi : V \to W$ mezi vektorovými prostory V (dimenze m) a W (dimenze k) s maticí B typu $k \times m$.

Složením lineárních zobrazení ψ “po” φ rozumíme zobrazení $\psi \circ \varphi(\vec{u}) = \psi(\varphi(\vec{u}))$ pro libovolný vektor $\vec{u} \in U$, které má matici $B \cdot A$.

Skládání lineárních zobrazení

Je dáno lineární zobrazení

- $\varphi : U \to V$ mezi vektorovými prostory U (dimenze n) a V (dimenze m) s maticí A typu $m \times n$,
- $\psi : V \to W$ mezi vektorovými prostory V (dimenze m) a W (dimenze k) s maticí B typu $k \times m$.

Složením lineárních zobrazení ψ "po" φ rozumíme zobrazení $\psi \circ \varphi(\vec{u}) = \psi(\varphi(\vec{u}))$ pro libovolný vektor $\vec{u} \in U$, které má matici $B \cdot A$.

Poznámka: Matice $B \cdot A$ složeného lineárního zobrazení je typu $k \times n$.

Skládání lineárních zobrazení

Je dáno lineární zobrazení

- $\varphi : U \to V$ mezi vektorovými prostory U (dimenze n) a V (dimenze m) s maticí A typu $m \times n$,
- $\psi : V \to W$ mezi vektorovými prostory V (dimenze m) a W (dimenze k) s maticí B typu $k \times m$.

Složením lineárních zobrazení ψ "po" φ rozumíme zobrazení $\psi \circ \varphi(\vec{u}) = \psi(\varphi(\vec{u}))$ pro libovolný vektor $\vec{u} \in U$, které má matici $B \cdot A$.

Poznámka: Matice $B \cdot A$ složeného lineárního zobrazení je typu $k \times n$.

Příklad: Lineární zobrazení (rotace o 90°) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je zadané maticí
$A_S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Najděte matici $\varphi \circ \varphi$ a ověřte na několika vektorech $\vec{u}$ úhel rotace $\varphi \circ \varphi(\vec{u})$.