MA0005 Algebra 2, 2. seminář

12. 10. 2020

Náplň cvičení

1. Analytická geometrie v rovině II
   - Rovnice přímky
   - Vzájemná poloha dvou přímek v rovině
   - Písemkové příklady ze semestru podzim 2019

Literatura

- Petáková, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7.

Rovnice přímky

Způsoby zadání přímek

Přímku p lze v rovině zadat mnoha způsoby. Uvedeme si čtyři nejznámější:

Rovnice přímky

Způsoby zadání přímek

Přímku p lze v rovině zadat mnoha způsoby. Uvedeme si čtyři nejznámější:

1. pomocí parametrických rovnic, k čemuž potřebujeme bod $A[a_1, a_2] \in p$ a **směrový vektor** přímky $\vec{u} = (u_1, u_2)$:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1, \\ y &= a_2 + t \cdot u_2, \end{aligned}$$

kde $t \in \mathbb{R}$.

Rovnice přímky

Způsoby zadání přímek

Přímku p lze v rovině zadat mnoha způsoby. Uvedeme si čtyři nejznámější:

1. pomocí parametrických rovnic, k čemuž potřebujeme bod $A[a_1, a_2] \in p$ a **směrový vektor** přímky $\vec{u} = (u_1, u_2)$:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1, \\ y &= a_2 + t \cdot u_2, \end{aligned}$$

   kde $t \in \mathbb{R}$.

2. pomocí obecné rovnice: $ax + by + c = 0$, kde $\vec{n} = (a, b)$ je **normálový vektor** přímky p.

Rovnice přímky

Způsoby zadání přímek

Přímku p lze v rovině zadat mnoha způsoby. Uvedeme si čtyři nejznámější:

1. pomocí parametrických rovnic, k čemuž potřebujeme bod $A[a_1, a_2] \in p$ a **směrový vektor** přímky $\vec{u} = (u_1, u_2)$:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1, \\ y &= a_2 + t \cdot u_2, \end{aligned}$$

   kde $t \in \mathbb{R}$.
2. pomocí obecné rovnice: $ax + by + c = 0$, kde $\vec{n} = (a, b)$ je **normálový vektor** přímky p.
3. ve směrnicovém tvaru: $y = kx + q$, kde k je **směrnice** přímky.

Rovnice přímky

Způsoby zadání přímek

Přímku p lze v rovině zadat mnoha způsoby. Uvedeme si čtyři nejznámější:

1. pomocí parametrických rovnic, k čemuž potřebujeme bod $A[a_1, a_2] \in p$ a **směrový vektor** přímky $\vec{u} = (u_1, u_2)$:
$$\begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1, \\ y &= a_2 + t \cdot u_2, \end{aligned}$$
kde $t \in \mathbb{R}$.
2. pomocí obecné rovnice: $ax + by + c = 0$, kde $\vec{n} = (a, b)$ je **normálový vektor** přímky p.
3. ve směrnicovém tvaru: $y = kx + q$, kde k je **směrnice** přímky.
4. v úsekovém tvaru: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, kde p je **úsek** na ose x, q je **úsek** na ose y a platí, že body $P[p, 0]$, $Q[0, q]$ jsou průsečíky přímky p s osou x, resp. y.

Rovnice přímky

Skalární součin vektorů v rovině

Skalárním součinem vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ rozumíme reálné číslo $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$.

Skalární součin vektorů v rovině

Skalárním součinem vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ rozumíme reálné číslo $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$.

Platí vztah

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha,$$

kde $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ je velikost vektoru a α je velikost úhlu vektorů $\vec{u}, \vec{v}$.

Rovnice přímky

Skalární součin vektorů v rovině

Skalárním součinem vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ rozumíme reálné číslo $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$.

Platí vztah

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha,$$

kde $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ je velikost vektoru a α je velikost úhlu vektorů $\vec{u}, \vec{v}$.

Poznámky k předchozímu

1. Dva nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou na sebe kolmé, je-li $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
2. Normálový vektor $\vec{n}$ přímky je kolmý na směrový vektor $\vec{u}$ téže přímky, tj. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.
3. Směrovým úhlem přímky p rozumíme úhel, který p svírá s kladnou poloosou x. Pro $p : y = kx + q$ platí, že $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Rovnice přímky

Příklad 14.1.1: Přímka p je dána v jednotlivých případech různými způsoby. Nakreslete přímku p v soustavě souřadnic pomocí daných prvků. Potom sestavte parametrické rovnice, obecnou rovnici, zapište přímku p ve směrnicovém tvaru, ve tvaru úsekovém (pokud tyto tvary existují).

a) Přímka p je dána bodem $A[4; 2]$ a směrovým vektorem $\vec{s} = (2, -1)$.

b) Přímka p je dána bodem $A[2; 0]$ a normálovým vektorem $\vec{n} = (-3, 2)$.

c) Přímka p je dána dvěma body $A[2; 3]$, $B[-2; 5]$.

d) Přímka p prochází bodem $A[-3; -1]$ a počátkem soustavy souřadnic.

e) Přímka p prochází bodem $A[3; -2]$ kolmo k ose x.

f) Přímka p je dána bodem $A[1; 2\sqrt{3}]$ a směrovým úhlem $\varphi = 120°$.

g) Přímka p prochází bodem $A[-2; 4]$ a má směrnici $k = 2$.

d) Přímka p protíná souřadnicové osy v bodech $X[3; 0]$, $Y[0; -2]$.

Výsledky: viz následující slajd.

Výsledky příkladu 14.1.1

14.1 Rovnice přímky

parametrická rovnice	obecná rovnice	směrnicový tvar	úsekový tvar
a) $x = 4 + 2t,\ y = 2 - t,\ t \in \mathsf{R}$	$x + 2y - 8 = 0$	$y = -\frac{1}{2}x + 4$	$\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$
b) $x = 2 + 2t,\ y = 3t,\ t \in \mathsf{R}$	$3x - 2y - 6 = 0$	$y = \frac{3}{2}x - 3$	$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$
c) $x = 2 + t,\ y = 3 + 2t,\ t \in \mathsf{R}$	$2x - y - 1 = 0$	$y = 2x - 1$	$\frac{x}{0{,}5} + \frac{y}{-1} = 1$
d) $x = 3t,\ y = t,\ t \in \mathsf{R}$	$x - 3y = 0$	$y = \frac{1}{3}x$	neexistuje
e) $x = 3,\ y = -2 + t,\ t \in \mathsf{R}$	$x - 3 = 0$	neexistuje	neexistuje
f) $x = 1 + t,\ y = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}t,\ t \in \mathsf{R}$	$\sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} = 0$	$y = -\sqrt{3}\,x + 3\sqrt{3}$	$\frac{x}{3} + \frac{y}{3\sqrt{3}} = 1$
g) $x = -2 + t,\ y = 4 + 2t,\ t \in \mathsf{R}$	$2x - y + 8 = 0$	$y = 2x + 8$	$\frac{x}{-4} + \frac{y}{8} = 1$
h) $x = 3 + 3t,\ y = 2t,\ t \in \mathsf{R}$	$2x - 3y - 6 = 0$	$y = \frac{2}{3}x - 2$	$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$

Rovnice přímky

Příklad 14.1.2: Přímka p je dána obecnou rovnicí $2x + 5y - 6 = 0$.

(a) Vyjádřete přímku p parametrickými rovnicemi.

(b) Napište rovnici přímky p ve směrnicovém tvaru.

Rovnice přímky

Příklad 14.1.2: Přímka p je dána obecnou rovnicí $2x + 5y - 6 = 0$.

(a) Vyjádřete přímku p parametrickými rovnicemi.

(b) Napište rovnici přímky p ve směrnicovém tvaru.

Příklad 14.1.3: Vypočítejte směrnici a směrový úhel přímky, která je dána body $A[0 + 2]$, $B[-2; 4]$.

Příklad 14.1.2: Přímka p je dána obecnou rovnicí $2x + 5y - 6 = 0$.

(a) Vyjádřete přímku p parametrickými rovnicemi.

(b) Napište rovnici přímky p ve směrnicovém tvaru.

Příklad 14.1.3: Vypočítejte směrnici a směrový úhel přímky, která je dána body $A[0+2]$, $B[-2;4]$.

Příklad 14.1.4: Napište v parametrickém tvaru rovnici přímky p, která prochází počátkem a je rovnoběžná s přímkou $q: 4x - y + 3 = 0$.

Rovnice přímky

Příklad 14.1.2: Přímka p je dána obecnou rovnicí $2x + 5y - 6 = 0$.

(a) Vyjádřete přímku p parametrickými rovnicemi.

(b) Napište rovnici přímky p ve směrnicovém tvaru.

Příklad 14.1.3: Vypočítejte směrnici a směrový úhel přímky, která je dána body $A[0 + 2]$, $B[-2; 4]$.

Příklad 14.1.4: Napište v parametrickém tvaru rovnici přímky p, která prochází počátkem a je rovnoběžná s přímkou $q : 4x - y + 3 = 0$.

Příklad 14.1.5: Určete obecnou rovnici přímky p, která je kolmá k přímce $q : 2x - y + 7 = 0$ a prochází počátkem soustavy souřadnic.

Rovnice přímky

Příklad 14.1.2: Přímka p je dána obecnou rovnicí $2x + 5y - 6 = 0$.

(a) Vyjádřete přímku p parametrickými rovnicemi.

(b) Napište rovnici přímky p ve směrnicovém tvaru.

Příklad 14.1.3: Vypočítejte směrnici a směrový úhel přímky, která je dána body $A[0 + 2]$, $B[-2; 4]$.

Příklad 14.1.4: Napište v parametrickém tvaru rovnici přímky p, která prochází počátkem a je rovnoběžná s přímkou $q : 4x - y + 3 = 0$.

Příklad 14.1.5: Určete obecnou rovnici přímky p, která je kolmá k přímce $q : 2x - y + 7 = 0$ a prochází počátkem soustavy souřadnic.

Výsledky:
2.(a) $p = \{[3 + 5t; -2t],\ t \in \mathbb{R}\}$, (b) $y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$.
3. $k = -1 \wedge \varphi = 135^\circ$.
4. $p : x = t,\ y = 4t,\ t \in \mathbb{R}$.
5. $x + 2y = 0$.

Příklad 14.3.30: Vyšetřete vzájemnou polohu přímek p, q. V případě různoběžných přímek vypočítejte souřadnice průsečíku přímek p, q.

a) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[-1 + 2k; 7 - 3k], k \in \mathbb{R}\}$
b) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[1 + 4k; 5 - 2k], k \in \mathbb{R}\}$
c) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[17 + 4k; -6 - 2k], k \in \mathbb{R}\}$
d) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[5 + 4k; -4 - 6k], k \in \mathbb{R}\}$
e) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q : 2x + y - 1 = 0$
f) $p : 2x + y - 1 = 0$, $q : x - 2y - 8 = 0$
g) $p : 2x + y - 1 = 0$, $q : 4x + 2y - 2 = 0$
h) $p : 2x + y - 1 = 0$, $q : 2x + y - 3 = 0$

Vzájemná poloha dvou přímek v rovině

Příklad 14.3.30: Vyšetřete vzájemnou polohu přímek p, q. V případě různoběžných přímek vypočítejte souřadnice průsečíku přímek p, q.

a) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[-1 + 2k; 7 - 3k], k \in \mathbb{R}\}$
b) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[1 + 4k; 5 - 2k], k \in \mathbb{R}\}$
c) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[17 + 4k; -6 - 2k], k \in \mathbb{R}\}$
d) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[5 + 4k; -4 - 6k], k \in \mathbb{R}\}$
e) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q : 2x + y - 1 = 0$
f) $p : 2x + y - 1 = 0$, $q : x - 2y - 8 = 0$
g) $p : 2x + y - 1 = 0$, $q : 4x + 2y - 2 = 0$
h) $p : 2x + y - 1 = 0$, $q : 2x + y - 3 = 0$

Příklad 14.3.31: Vyšetřete vzájemnou polohu přímek AB a CD, znáte-li souřadnice bodů, které dané přímky určují;
$A[-1; -2]$, $B[-1; 1]$, $C[1; 1]$, $D[2; 3]$.

Vzájemná poloha dvou přímek v rovině

Příklad 14.3.30: Vyšetřete vzájemnou polohu přímek p, q. V případě různoběžných přímek vypočítejte souřadnice průsečíku přímek p, q.

a) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[-1 + 2k; 7 - 3k], k \in \mathbb{R}\}$
b) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[1 + 4k; 5 - 2k], k \in \mathbb{R}\}$
c) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[17 + 4k; -6 - 2k], k \in \mathbb{R}\}$
d) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[5 + 4k; -4 - 6k], k \in \mathbb{R}\}$
e) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q : 2x + y - 1 = 0$
f) $p : 2x + y - 1 = 0$, $q : x - 2y - 8 = 0$
g) $p : 2x + y - 1 = 0$, $q : 4x + 2y - 2 = 0$
h) $p : 2x + y - 1 = 0$, $q : 2x + y - 3 = 0$

Příklad 14.3.31: Vyšetřete vzájemnou polohu přímek AB a CD, znáte-li souřadnice bodů, které dané přímky určují;
$A[-1; -2]$, $B[-1; 1]$, $C[1; 1]$, $D[2; 3]$.

Příklad 14.3.32: Průsečíkem přímek $p : 3x + y - 2 = 0$, $q : x - y - 6 = 0$ veďte rovnoběžku s přímkou $r : 2x - y + 4 = 0$. Určete její obecnou rovnici.

Výsledky příkladů

Příklad 14.3.30:

a) $p \parallel q \wedge p \neq q$

b) $P[-2; \frac{13}{2}]$

c) $P[1; 2]$

d) $p = q$

e) $P[-5; 11]$

f) $P[2; -3]$

g) $p = q$

h) $p \parallel q \wedge p \neq q$

Příklad 14.3.31: $P[-1; -3]$

Příklad 14.3.32: $2x - y - 8 = 0$

Příklad 14.6.80: Určete souřadnice bodu A', který je obrazem bodu $A[3; -2]$ v osové souměrnosti dané osou $o : 2x - y + 7 = 0$.

Příklad 14.6.80: Určete souřadnice bodu A', který je obrazem bodu $A[3; -2]$ v osové souměrnosti dané osou $o : 2x - y + 7 = 0$.

Příklad 14.6.81: Určete souřadnice bodu C', který je s bodem $C[3; 6]$ souměrný podle přímky AB, kde $A[-2; 1], B[-1; -2]$.

Zobrazení v analytické geometrii

Příklad 14.6.80: Určete souřadnice bodu A', který je obrazem bodu $A[3; -2]$ v osové souměrnosti dané osou $o : 2x - y + 7 = 0$.

Příklad 14.6.81: Určete souřadnice bodu C', který je s bodem $C[3; 6]$ souměrný podle přímky AB, kde $A[-2; 1], B[-1; -2]$.

Příklad 14.6.82: Určete obecnou rovnici přímky p', která je s přímkou $p : 2x + y - 5 = 0$ středově souměrná.

Příklad 14.6.80: Určete souřadnice bodu A', který je obrazem bodu $A[3; -2]$ v osové souměrnosti dané osou $o : 2x - y + 7 = 0$.

Příklad 14.6.81: Určete souřadnice bodu C', který je s bodem $C[3; 6]$ souměrný podle přímky AB, kde $A[-2; 1], B[-1; -2]$.

Příklad 14.6.82: Určete obecnou rovnici přímky p', která je s přímkou $p : 2x + y - 5 = 0$ středově souměrná.

Příklad 14.6.83: Určete obecnou rovnici přímky p', která je s přímkou $p : 3x - y + 6 = 0$ souměrná

a) podle osy x,
b) podle osy y,
c) podle osy $o : x + y + 1 = 0$,
d) podle osy $o : x = 4$.

Příklad 14.6.85: Světelný paprsek vychází z bodu $A[3;4]$ a odráží se od přímky $p: x+y-5=0$ do bodu $B[-4;12]$. Určete souřadnice bodu odrazu.

Příklad 14.6.85: Světelný paprsek vychází z bodu $A[3;4]$ a odráží se od přímky $p : x + y - 5 = 0$ do bodu $B[-4;12]$. Určete souřadnice bodu odrazu.

Příklad 14.6.86: Po přímce $2x - y = 0$ dopadá světelný paprsek na přímku $p : x - 3y + 5 = 0$, od které se odráží. Určete souřadnice bodu odrazu a napište rovnici přímky, na které leží paprsek odražený.

Příklad 14.6.85: Světelný paprsek vychází z bodu $A[3;4]$ a odráží se od přímky $p: x + y - 5 = 0$ do bodu $B[-4;12]$. Určete souřadnice bodu odrazu.

Příklad 14.6.86: Po přímce $2x - y = 0$ dopadá světelný paprsek na přímku $p: x - 3y + 5 = 0$, od které se odráží. Určete souřadnice bodu odrazu a napište rovnici přímky, na které leží paprsek odražený.

Výsledky příkladů 14.6:

80. $A'[-9;4]$
81. $C'[-9;2]$
82. a) $p': 2x + y + 5 = 0$; b) $p': 2x + y + 13 = 0$
83. a) $3x + y + 6 = 0$; b) $3x + y - 6 = 0$; c) $x - 3y + 4 = 0$; d) $3x + y - 30 = 0$
85. $O[-1;6]$
86. $O[1;2]$, $x + 2y - 5 = 0$

Vybrané příklady z písemek

Úloha 2.1: Určete souřadnice bodu A', který je obrazem bodu $A[3; -2]$ v osové souměrnosti dané osou $o: 2x - y + 7 = 0$ (určitě tušíte, že budete potřebovat najít jistou přímku kolmou na osu o).

Úloha 2.2: Určete souřadnice bodu C', který je s bodem $C[3; 6]$ souměrný podle přímky AB, kde $A[-2; 1], B[-1; -2]$ (určitě tušíte, že budete potřebovat najít jistou přímku kolmou na osu).

Úloha 2.3: Je dána přímka $p: 5x - 2y - 3 = 0$ a bod $M = [0, 4]$. Napište

1. parametrické rovnice přímky p;
2. parametrické rovnice přímky q kolmé na přímku p a procházející bodem M;
3. obecnou rovnici přímky r rovnoběžné s přímkou p a procházející bodem M.

Vybrané příklady z písemek

Úloha 2.4: Jsou dány body $A[x; -2], B[6; 4]$.

a) Určete souřadnici x bodu A tak, aby střed úsečky AB měl souřadnice $S[4; 1]$ (za 1 bod).

b) Napište parametrické rovnice přímky p dané body A, B (za 1 bod).

c) Zjistěte, v jakých bodech protíná přímka p osu x a osu y (za 2 body).

Úloha 2.5: Jsou dány body $A[-1; 1], B[2; 0], C[1, 3]$.

a) Ověřte početně, že body A, B, C tvoří trojúhelník (za 1 bod).

b) Napište obecnou rovnici přímky p dané body A, B (za 1 bod).

c) Napište parametrické rovnice těžnice t_c vycházející z bodu C (za 2 body).