MA0005 Algebra 2, 7. seminář

16. a 23. 11. 2020

Náplň cvičení

1. Soustavy lineárních rovnic
   - Maticový zápis SLR
   - Hodnost matice, elementární řádkové úpravy
   - Schodový tvar matice
   - Soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých
   - Gaussova eliminační metoda, Frobeniova věta
2. Vektorový prostor a jeho podprostory
   - Podprostor vektorového prostoru
   - Lineární obal množiny vektorů
   - Dimenze a báze vektorového prostoru
   - Součet a průnik vektorových podprostorů

Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

Maticový zápis SLR

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Maticový zápis SLR

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Maticový zápis soustavy

Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme maticí systému SLR.

Maticový zápis SLR

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Rozšířená matice SLR

Matici

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)$$

nazýváme rozšířenou maticí systému SLR.

Hodnost matice

Hodností matice A (typu $m \times n$) rozumíme počet lineárně nezávislých řádků matice A. Píšeme $h(A)$.

Hodnost matice, elementární řádkové úpravy

Hodnost matice

Hodností matice A (typu $m \times n$) rozumíme počet lineárně nezávislých řádků matice A. Píšeme $h(A)$.

Elementární řádkové úpravy

Elementárními řádkovými úpravami matice, resp. samotného SLR jsou:

1. vynásobení řádku (rovnice) nenulovým reálným číslem,
2. výměna pořadí dvou řádků (rovnic),
3. přičtení násobku jiného řádku (rovnice) k danému řádku (rovnici).

Hodnost matice, elementární řádkové úpravy

Hodnost matice

Hodností matice A (typu $m \times n$) rozumíme počet lineárně nezávislých řádků matice A. Píšeme $h(A)$.

Elementární řádkové úpravy

Elementárními řádkovými úpravami matice, resp. samotného SLR jsou:

1. vynásobení řádku (rovnice) nenulovým reálným číslem,
2. výměna pořadí dvou řádků (rovnic),
3. přičtení násobku jiného řádku (rovnice) k danému řádku (rovnici).

Důležitá poznámka: Elementární řádkové úpravy nezmění hodnot matice, resp. nezpůsobí změnu řešení SLR.

Schodový tvar matice

Schodový tvar matice

V každém dalším řádku je zleva více nul než v tom předchozím, případně je celý další řádek nulový.

Schodový tvar matice

Schodový tvar matice

V každém dalším řádku je zleva více nul než v tom předchozím, případně je celý další řádek nulový.

Poznámka: převodem na schodový tvar pomocí elementárních řádkových úprav zjistíme hodnost zadané matice. Hodnost matice je počet nenulových řádků ve schodovém tvaru, který vznikne ze zadané matice elementárními řádkovými úpravami.

Schodový tvar matice

V každém dalším řádku je zleva více nul než v tom předchozím, případně je celý další řádek nulový.

Poznámka: převodem na schodový tvar pomocí elementárních řádkových úprav zjistíme hodnost zadané matice. Hodnost matice je počet nenulových řádků ve schodovém tvaru, který vznikne ze zadané matice elementárními řádkovými úpravami.

Příklad 1: rozhodněte, zda jsou následující matice ve schodovém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (a) $h(A) = 2$,

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (a) $h(A) = 2$, (b) $h(A) = 3$.

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (c) $h(A) = 2$,

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (c) $h(A) = 2$, (d) $h(A) = 2$.

Soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

Mějme následující soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Rovnice definují tři roviny, u nichž řešením SLR určíme vzájemnou polohu.

Soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

Mějme následující soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Rovnice definují tři roviny, u nichž řešením SLR určíme vzájemnou polohu.

Počet řešení soustavy

Soustava lineárních rovnic (SLR) o 3 neznámých

(a) má právě jedno řešení, je-li $h(A) = h(A|b) = 3$ (roviny se protínají v jednom bodu);

(b) má nekonečně mnoho řešení, je-li $h(A) = h(A|b) < 3$ (roviny se protínají buď v jedné přímce, když $h(A) = h(A|b) = 2$, nebo splývají v jednu rovinu, je-li $h(A) = h(A|b) = 1$);

(c) nemá řešení, je-li $h(A) \neq h(A|b)$ (geometricky to může vyjít různě).

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\Longleftrightarrow h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\Longleftrightarrow h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.
   - Je-li $n - h(A|b) = 0$, pak má SLR právě jedno řešení.

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.
   - Je-li $n - h(A|b) = 0$, pak má SLR právě jedno řešení.
   - Je-li $n - h(A|b) > 0$, pak $n - h(A|b)$ neznámým "uvážlivě" přiřadíme parametr, ostatní neznámé vyjádříme pomocí těchto parametrů ze zbývajících rovnic.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.
   - Je-li $n - h(A|b) = 0$, pak má SLR právě jedno řešení.
   - Je-li $n - h(A|b) > 0$, pak $n - h(A|b)$ neznámým "uvážlivě" přiřadíme parametr, ostatní neznámé vyjádříme pomocí těchto parametrů ze zbývajících rovnic.
   - V obou případech postupujeme tzv. zpětným chodem, tj. bereme rovnice zdola a volíme za parametry počet neznámých v dané rovnici MINUS jedna, abychom poslední neznámou v každé rovnici mohli dopočítat pomocí ostatních neznámých – parametrů.

Příklad 5.1.B1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

Příklad 5.1.B1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

Výsledky: (a) $(2, -2, 3)$,

Příklad 5.1.B1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

Výsledky: (a) $(2, -2, 3)$, (c) $(-1, -1, 0, 1)$.

Příklad 5.1.B2

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20 \end{array}$$

Příklad 5.1.B2

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20 \end{array}$$

Výsledky: (a) SLR nemá řešení,

Příklad 5.1.B2

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20 \end{array}$$

Výsledky: (a) SLR nemá řešení, (c) SLR nemá řešení.

Příklad 5.1.B3

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Příklad 5.1.B3

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Výsledky: (a) $\{(2-t, 1, t),\ t \in \mathbb{R}\}$,

Příklad 5.1.B3

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Výsledky: (a) $\{(2-t,1,t),\ t \in \mathbb{R}\}$,
(c) $\{(1+t,\frac{3}{2},t,-\frac{1}{2}),\ t \in \mathbb{R}\}$.

Dodatečný příklad

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\
3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\
3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\
x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1
\end{array}
$$

Dodatečný příklad

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Výsledek: $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{20}; -\frac{1}{2}\right)$

Vektorový prostor

Axiomy pro vektorový prostor

V nazveme vektorovým (lineárním) prostorem nad tělesem T s operacemi $+, \cdot$, jestliže

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{v} \in V$ (uzavřenost na operaci $+$)
2. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V : (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (asociativita operace $+$)
3. $\exists \vec{o}.\ \forall \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{o} = \vec{u} = \vec{o} + \vec{u}$ (neutrální prvek pro operaci $+$)
4. $\forall \vec{u} \in V.\ \exists (-\vec{u}) \in V : \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$ (inverze vzhledem k operaci $+$)
5. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (komutativita operace $+$)

"1" $\forall \vec{u} \in V, \forall t \in T : t \cdot \vec{u} \in V$ (uzavřenost na součin skaláru a vektoru)

"2" $\forall \vec{u} \in V, \forall s, t \in T : s \cdot (t \cdot \vec{u}) = (s \cdot t) \cdot \vec{u}$ (asociativita operace $\cdot$)

"3" $\exists 1 \in T.\ \forall \vec{u} \in V : 1 \cdot \vec{u} = \vec{u} = \vec{u} \cdot 1$(neutrální prvek pro operaci $\cdot$)

"6a" $\forall \vec{u} \in V, \forall s, t \in T : (s + t) \cdot \vec{u} = s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{u}$ (distributivita operací)

"6b" $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall s \in T : s \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = s \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ (distributivita operací)

Vektorový prostor

Definice vektorového podprostoru

Vektorový podprostor prostoru $(V, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ je taková podmnožina W prostoru V, která je uzavřená vzhledem k operaci $+$ (sčítání vektorů) a $\cdot$ (násobení vektoru skalárem):

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W : \vec{u} + \vec{v} \in W$

"1" $\forall \vec{u} \in W, \forall t \in T : t \cdot \vec{u} \in W$

Poznámka: Vektorový podprostor je tedy uzavřený na lineární kombinaci svých vektorů.

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $W = \{(0,0,0,0),\ (1,1,1,1),\ (-1,-1,-1,-1)\}$

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$

(c) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$

(d) $W = \{(2s + t, s - t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné}\}$

Podprostor vektorového prostoru

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $W = \{(0,0,0,0),\ (1,1,1,1),\ (-1,-1,-1,-1)\}$
(b) $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$
(c) $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$
(d) $W = \{(2s+t, s-t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné}\}$

Příklad z písemky: Rozhodněte, zda rovina ϱ je vektorovým podprostorem aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li:

(a) $\varrho : 2x + y - 3z + 6 = 0$
(b) $\varrho : 2x + y - z = 0$
(c) $\varrho : x - 2y + 3z - 6 = 0$
(d) $\varrho : x + 4y - 2z = 0$

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $W = \{(0,0,0,0),\ (1,1,1,1),\ (-1,-1,-1,-1)\}$

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$

(c) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$

(d) $W = \{(2s + t, s - t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné}\}$

Příklad z písemky: Rozhodněte, zda rovina ϱ je vektorovým podprostorem aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li:

(a) $\varrho : 2x + y - 3z + 6 = 0$

(b) $\varrho : 2x + y - z = 0$

(c) $\varrho : x - 2y + 3z - 6 = 0$

(d) $\varrho : x + 4y - 2z = 0$

Výsledky: 3.2.B3.(a) ne, (b) ne, (c) ano, (d) ano.

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $W = \{(0,0,0,0),\ (1,1,1,1),\ (-1,-1,-1,-1)\}$
(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$
(c) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$
(d) $W = \{(2s + t, s - t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné}\}$

Příklad z písemky: Rozhodněte, zda rovina ϱ je vektorovým podprostorem aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li:

(a) $\varrho : 2x + y - 3z + 6 = 0$
(b) $\varrho : 2x + y - z = 0$
(c) $\varrho : x - 2y + 3z - 6 = 0$
(d) $\varrho : x + 4y - 2z = 0$

Výsledky: 3.2.B3.(a) ne, (b) ne, (c) ano, (d) ano.
Příklad z písemky: (a) ne, (b) ano, (c) ne, (d) ano.

Lineární obal množiny vektorů

Lineární obal množiny vektorů

Lineárním obalem množiny (ne nutně nezávislých) vektorů $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\}$ z vektorového prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme množinu $\{\alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \vec{v_k} \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k \in T\}$ vzniklou jakoukoli lineární kombinací vektorů $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\}$.

Značíme jej $L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k})$ nebo $\langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\}\rangle$.

Alternativně říkáme, že $L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k})$ je podprostor generovaný vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$.

Báze a dimenze vektorového prostoru

Posloupnost vektorů $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k})$ nazveme **bází** (množinou generátorů) vektorového prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$, jestliže

1. je lineárně nezávislá,
2. každý vektor $\vec{u} \in V$ lze vyjádřit lineární kombinací $\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \vec{v_k}$ pro nějaké $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in T$ (tj. vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ generují celý prostor V).

Dimenzí vektorového prostoru V rozumíme počet vektorů nějaké jeho báze. Značíme $\dim V$.

Čísla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ z vyjádření vektoru $\vec{u}$ nazýváme **souřadnicemi vektoru $\vec{u}$ v bázi** $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k})$.

Poznámka: Standardní bází vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ je $S = ((1;0),(0;1))$, $\mathbb{R}^3$ má standardní bázi $S = ((1;0;0),(0;1;0),(0;0;1))$.

Vektory generující vektorový prostor

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory:

$$\vec{u_1} = (1; -2; 3),\ \vec{u_2} = (2; -1; 0),\ \vec{u_3} = (1; 1; -3),\ \vec{u_4} = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Vektory generující vektorový prostor

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory:

$$\vec{u_1} = (1; -2; 3),\ \vec{u_2} = (2; -1; 0),\ \vec{u_3} = (1; 1; -3),\ \vec{u_4} = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Příklad 3.3.B2: Rozhodněte, zda vektory $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_5}$ generují vektorový prostor $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $\vec{u_1} = (1; 2; 1; 2),\ \vec{u_2} = (2; 1; 2; 1),\ \vec{u_3} = (1; 1; 1; 1),$
$\vec{u_4} = (-2; 0; -1; -3),\ \vec{u_5} = (-1; 1; 0; -2)$

(b) $\vec{u_1} = (-1; 1; 0; -1),\ \vec{u_2} = (2; 0; 1; 3),\ \vec{u_3} = (1; 2; 3; 4),$
$\vec{u_4} = (2; 3; 4; 6),\ \vec{u_5} = (1; -3; 5; -7)$

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory:

$$\vec{u_1} = (1; -2; 3),\ \vec{u_2} = (2; -1; 0),\ \vec{u_3} = (1; 1; -3),\ \vec{u_4} = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Příklad 3.3.B2: Rozhodněte, zda vektory $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_5}$ generují vektorový prostor $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $\vec{u_1} = (1; 2; 1; 2),\ \vec{u_2} = (2; 1; 2; 1),\ \vec{u_3} = (1; 1; 1; 1),$
$\vec{u_4} = (-2; 0; -1; -3),\ \vec{u_5} = (-1; 1; 0; -2)$

(b) $\vec{u_1} = (-1; 1; 0; -1),\ \vec{u_2} = (2; 0; 1; 3),\ \vec{u_3} = (1; 2; 3; 4),$
$\vec{u_4} = (2; 3; 4; 6),\ \vec{u_5} = (1; -3; 5; -7)$

Výsledky: 16. ne,

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory:

$$\vec{u_1} = (1; -2; 3),\ \vec{u_2} = (2; -1; 0),\ \vec{u_3} = (1; 1; -3),\ \vec{u_4} = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Příklad 3.3.B2: Rozhodněte, zda vektory $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_5}$ generují vektorový prostor $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $\vec{u_1} = (1; 2; 1; 2),\ \vec{u_2} = (2; 1; 2; 1),\ \vec{u_3} = (1; 1; 1; 1),$
$\vec{u_4} = (-2; 0; -1; -3),\ \vec{u_5} = (-1; 1; 0; -2)$

(b) $\vec{u_1} = (-1; 1; 0; -1),\ \vec{u_2} = (2; 0; 1; 3),\ \vec{u_3} = (1; 2; 3; 4),$
$\vec{u_4} = (2; 3; 4; 6),\ \vec{u_5} = (1; -3; 5; -7)$

Výsledky: 16. ne,
3.3.B2.(a) ne, (b) ano.

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\vec{u} = (0; 2; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$. Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1; -1; 3), \vec{y} = (-2; 4; -1), \vec{z} = (-1; 3; 2)$;

(b) $\vec{x} = (2; -3; 0), \vec{y} = (-1; 5; -2), \vec{z} = (0; -4; 1)$;

(c) $\vec{x} = (3; 5; -2), \vec{y} = (2; 3; -3)$.

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\vec{u} = (0; 2; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$. Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1; -1; 3), \vec{y} = (-2; 4; -1), \vec{z} = (-1; 3; 2)$;

(b) $\vec{x} = (2; -3; 0), \vec{y} = (-1; 5; -2), \vec{z} = (0; -4; 1)$;

(c) $\vec{x} = (3; 5; -2), \vec{y} = (2; 3; -3)$.

Výsledky:

(a). $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \notin W$;

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\vec{u} = (0; 2; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$. Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1; -1; 3), \vec{y} = (-2; 4; -1), \vec{z} = (-1; 3; 2)$;

(b) $\vec{x} = (2; -3; 0), \vec{y} = (-1; 5; -2), \vec{z} = (0; -4; 1)$;

(c) $\vec{x} = (3; 5; -2), \vec{y} = (2; 3; -3)$.

Výsledky:

(a). $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \notin W$;

(b) $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \in W$;

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\vec{u} = (0;2;5)$, $\vec{v} = (1;2;1)$. Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1;-1;3), \vec{y} = (-2;4;-1), \vec{z} = (-1;3;2)$;

(b) $\vec{x} = (2;-3;0), \vec{y} = (-1;5;-2), \vec{z} = (0;-4;1)$;

(c) $\vec{x} = (3;5;-2), \vec{y} = (2;3;-3)$.

Výsledky:

(a). $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \notin W$;

(b) $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \in W$;

(c) $\vec{u} \notin W$, $\vec{v} \in W$.

Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

(a) $\vec{u_1} = (1; -1; 0; 2), \vec{u_2} = (2; 2; -1; 3), \vec{u_3} = (0; 1; 1; 0), \vec{u_4} = (3; 2; 0; 5)$;

(b) $\vec{u_1} = (1; 2; 3; 4), \vec{u_2} = (-2; -3; -4; -5), \vec{u_3} = (3; 4; 5; 6)$, $\vec{u_4} = (-4; -5; -6; -7), \vec{u_5} = (5; 6; 7; 8)$;

(c) $\vec{u_1} = (1; 2; -1; 0), \vec{u_2} = (0; 1; -1; -7), \vec{u_3} = (-8; 0; 0; -5)$, $\vec{u_4} = (3; -4; 1; -2), \vec{u_5} = (2; 1; 0; -3)$;

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

(a) $\vec{u_1} = (1; -1; 0; 2), \vec{u_2} = (2; 2; -1; 3), \vec{u_3} = (0; 1; 1; 0), \vec{u_4} = (3; 2; 0; 5)$;

(b) $\vec{u_1} = (1; 2; 3; 4), \vec{u_2} = (-2; -3; -4; -5), \vec{u_3} = (3; 4; 5; 6)$,
$\vec{u_4} = (-4; -5; -6; -7), \vec{u_5} = (5; 6; 7; 8)$;

(c) $\vec{u_1} = (1; 2; -1; 0), \vec{u_2} = (0; 1; -1; -7), \vec{u_3} = (-8; 0; 0; -5)$,
$\vec{u_4} = (3; -4; 1; -2), \vec{u_5} = (2; 1; 0; -3)$;

Výsledky:

(a). $\dim W = 3$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$;

Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

(a) $\vec{u_1} = (1; -1; 0; 2), \vec{u_2} = (2; 2; -1; 3), \vec{u_3} = (0; 1; 1; 0), \vec{u_4} = (3; 2; 0; 5)$;

(b) $\vec{u_1} = (1; 2; 3; 4), \vec{u_2} = (-2; -3; -4; -5), \vec{u_3} = (3; 4; 5; 6)$,
$\vec{u_4} = (-4; -5; -6; -7), \vec{u_5} = (5; 6; 7; 8)$;

(c) $\vec{u_1} = (1; 2; -1; 0), \vec{u_2} = (0; 1; -1; -7), \vec{u_3} = (-8; 0; 0; -5)$,
$\vec{u_4} = (3; -4; 1; -2), \vec{u_5} = (2; 1; 0; -3)$;

Výsledky:

(a). $\dim W = 3$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$;

(b) $\dim W = 2$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$;

Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

(a) $\vec{u_1} = (1; -1; 0; 2), \vec{u_2} = (2; 2; -1; 3), \vec{u_3} = (0; 1; 1; 0), \vec{u_4} = (3; 2; 0; 5)$;

(b) $\vec{u_1} = (1; 2; 3; 4), \vec{u_2} = (-2; -3; -4; -5), \vec{u_3} = (3; 4; 5; 6)$,
$\vec{u_4} = (-4; -5; -6; -7), \vec{u_5} = (5; 6; 7; 8)$;

(c) $\vec{u_1} = (1; 2; -1; 0), \vec{u_2} = (0; 1; -1; -7), \vec{u_3} = (-8; 0; 0; -5)$,
$\vec{u_4} = (3; -4; 1; -2), \vec{u_5} = (2; 1; 0; -3)$;

Výsledky:

(a). $\dim W = 3$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$;

(b) $\dim W = 2$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$;

(c) $\dim W = 4$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_5})$.

Vyjádření vektoru v jiné bázi

Příklad 3.3.B5: Ověřte, zda zadané vektory tvoří bázi α vekt. prostoru $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, najděte souřadnice vektoru $\vec{w} = (0; 1; 2)_S$ v bázi α.

a) $\alpha = ((1; 2; -1), (1; 1; 0), (2; -1; 3))$

b) $\alpha = ((1; 2; -1), (2; -1; 1), (-1; 1; 2))$

c) $\alpha = ((1; 2; -2), (1; 1; -1), (-2; -1; 2))$

Vyjádření vektoru v jiné bázi

Příklad 3.3.B5: Ověřte, zda zadané vektory tvoří bázi α vekt. prostoru $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, najděte souřadnice vektoru $\vec{w} = (0; 1; 2)_S$ v bázi α.

a) $\alpha = ((1; 2; -1), (1; 1; 0), (2; -1; 3))$

b) $\alpha = ((1; 2; -1), (2; -1; 1), (-1; 1; 2))$

c) $\alpha = ((1; 2; -2), (1; 1; -1), (-2; -1; 2))$

Příklad 3.4.B23: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány lineárně nezávislé vektory $\vec{u_1} = (1; 1; 1; 1), \vec{u_2} = (0; 1; 1; 1), \vec{u_3} = (0; 0; 1; 1), \vec{u_4} = (0; 0; 0; 1)$. Vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{w} = (2; 1; 1; 4)$

a) v bázi $\alpha = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})$;

b) v bázi $\beta = (\vec{u_3}, \vec{u_2}, \vec{u_4}, \vec{u_1})$.

Výsledky: 3.3.B5.a) vektory netvoří bázi, b) $(\frac{3}{14}; \frac{5}{14}; \frac{13}{14})_\alpha$, c) $(-1; 5; 2)_\alpha$.

Vyjádření vektoru v jiné bázi

Příklad 3.3.B5: Ověřte, zda zadané vektory tvoří bázi α vekt. prostoru $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, najděte souřadnice vektoru $\vec{w} = (0;1;2)_S$ v bázi α.

a) $\alpha = ((1;2;-1),(1;1;0),(2;-1;3))$

b) $\alpha = ((1;2;-1),(2;-1;1),(-1;1;2))$

c) $\alpha = ((1;2;-2),(1;1;-1),(-2;-1;2))$

Příklad 3.4.B23: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány lineárně nezávislé vektory $\vec{u_1} = (1;1;1;1)$, $\vec{u_2} = (0;1;1;1)$, $\vec{u_3} = (0;0;1;1)$, $\vec{u_4} = (0;0;0;1)$. Vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{w} = (2;1;1;4)$

a) v bázi $\alpha = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})$;

b) v bázi $\beta = (\vec{u_3}, \vec{u_2}, \vec{u_4}, \vec{u_1})$.

Výsledky: 3.3.B5.a) vektory netvoří bázi, b) $(\frac{3}{14}; \frac{5}{14}; \frac{13}{14})_\alpha$, c) $(-1;5;2)_\alpha$.
3.4.B23.a) $(2;-1;0;3)_\alpha$, b) $(0;-1;3;2)_\beta$.

Součet a průnik vektorových podprostorů

Součet a průnik vektorových podprostorů

Součtem $W_1 + W_2$ vektorových **podprostorů** W_1, W_2 prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme lineární obal jejich sjednocení, tj.

$$W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2) = \{\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \mid \alpha, \beta \in T, \vec{u} \in W_1, \vec{v} \in W_2\}$$

Průnikem $W_1 + W_2$ vektorových **podprostorů** W_1, W_2 prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme množinu vektorů, které leží ve W_1 i W_2 zároveň, tj.

$$W_1 \cap W_2 = \{\vec{u} \in V \mid \vec{u} \in W_1 \wedge \vec{u} \in W_2\}$$

Věta: Jsou-li W_1, W_2 podprostory s konečnou dimenzí, pak platí

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Dimenze a báze součtu a průniku podprostorů

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$,
$\vec{u_1} = (1; 1; -3), \vec{u_2} = (1; 2; 2)$,
$\vec{v_1} = (1; 1; -1), \vec{v_2} = (1; 2; 1), \vec{v_3} = (1; 3; 3)$;

(b) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = \langle\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}\rangle, W_2 = \langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}\rangle$,
$\vec{u_1} = (1; 2; 0; 2), \vec{u_2} = (1; 2; 1; 2), \vec{u_3} = (3; 1; 3; 1)$,
$\vec{v_1} = (1; 1; 1; 1), \vec{v_2} = (1; -1; 1; -1), \vec{v_3} = (1; 3; 1; 3)$;

(c) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2})$,
$\vec{u_1} = (1; 1; 1; 1), \vec{u_2} = (1; 0; 1; 0), \vec{v_1} = (1; 1; 1; 0), \vec{v_2} = (1; 2; 0; 1)$.

Dimenze a báze součtu a průniku podprostorů

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$,
$\vec{u_1} = (1; 1; -3), \vec{u_2} = (1; 2; 2)$,
$\vec{v_1} = (1; 1; -1), \vec{v_2} = (1; 2; 1), \vec{v_3} = (1; 3; 3)$;

(b) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = \langle\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}\rangle, W_2 = \langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}\rangle$,
$\vec{u_1} = (1; 2; 0; 2), \vec{u_2} = (1; 2; 1; 2), \vec{u_3} = (3; 1; 3; 1)$,
$\vec{v_1} = (1; 1; 1; 1), \vec{v_2} = (1; -1; 1; -1), \vec{v_3} = (1; 3; 1; 3)$;

(c) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2})$,
$\vec{u_1} = (1; 1; 1; 1), \vec{u_2} = (1; 0; 1; 0), \vec{v_1} = (1; 1; 1; 0), \vec{v_2} = (1; 2; 0; 1)$.

Výsledky:

(a). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = ((3; 5; 1))$;

Dimenze a báze součtu a průniku podprostorů

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}),$
$\vec{u_1} = (1; 1; -3), \vec{u_2} = (1; 2; 2),$
$\vec{v_1} = (1; 1; -1), \vec{v_2} = (1; 2; 1), \vec{v_3} = (1; 3; 3);$

(b) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = \langle\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}\rangle, W_2 = \langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}\rangle,$
$\vec{u_1} = (1; 2; 0; 2), \vec{u_2} = (1; 2; 1; 2), \vec{u_3} = (3; 1; 3; 1),$
$\vec{v_1} = (1; 1; 1; 1), \vec{v_2} = (1; -1; 1; -1), \vec{v_3} = (1; 3; 1; 3);$

(c) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}),$
$\vec{u_1} = (1; 1; 1; 1), \vec{u_2} = (1; 0; 1; 0), \vec{v_1} = (1; 1; 1; 0), \vec{v_2} = (1; 2; 0; 1).$

Výsledky:

(a). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = ((3; 5; 1))$;
(b). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 2$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = (\vec{u_2}; \vec{u_3})$;

Dimenze a báze součtu a průniku podprostorů

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}),$
$\vec{u_1} = (1; 1; -3), \vec{u_2} = (1; 2; 2),$
$\vec{v_1} = (1; 1; -1), \vec{v_2} = (1; 2; 1), \vec{v_3} = (1; 3; 3);$

(b) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = \langle\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}\rangle, W_2 = \langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}\rangle,$
$\vec{u_1} = (1; 2; 0; 2), \vec{u_2} = (1; 2; 1; 2), \vec{u_3} = (3; 1; 3; 1),$
$\vec{v_1} = (1; 1; 1; 1), \vec{v_2} = (1; -1; 1; -1), \vec{v_3} = (1; 3; 1; 3);$

(c) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}),$
$\vec{u_1} = (1; 1; 1; 1), \vec{u_2} = (1; 0; 1; 0), \vec{v_1} = (1; 1; 1; 0), \vec{v_2} = (1; 2; 0; 1).$

Výsledky:

(a). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = ((3; 5; 1))$;
(b). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 2$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = (\vec{u_2}; \vec{u_3})$;
(c). $\dim(W_1 + W_2) = 4$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, báze tedy neexistuje.