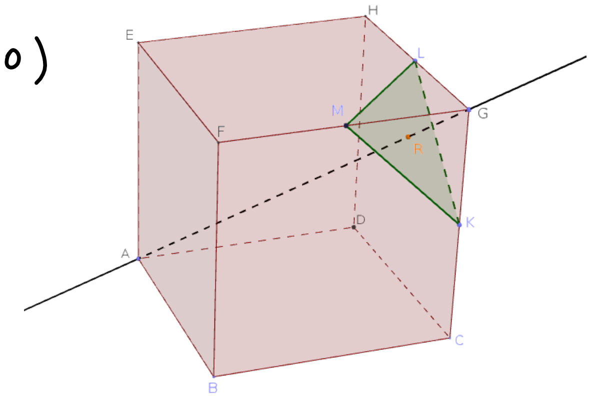
ÚVODNÍ PŘÍKLAD

(0)



A až H ... vrcholy krychle

α ... rovina KLM,
kde K, L, M jsou např. středy stran..

p ... přímka PQ,
kde P, Q jsou např. vrcholy A, G

URČETE NAPŘ.

- průnik (resp. vzájemnou polohu) p a α
- odchylku p a α, p a CG, ...
- vzdálenost G a α, C a p, ...
- těžiště $\triangle$KLM, KLMG, ...
- obsah $\triangle$KLM, objem KLMG, ...
- obrazy vrcholů krychle vzhledem k nějaké její symetrii s osou p,
- apod.

ŘEŠTE PŘEDCHOZÍ ÚLOHY

- bez souřadnic
- pomocí $\boxed{\quad\quad}$ souřadnic
- pomocí jiných $\boxed{\quad\quad}$ souřadnic

kartézských / afinních / barycentrických

AFINNÍ STRUKTURA

(1) Mají následující objekty strukturu AFINNÍHO PROSTORU?

- Dva navzájem různé body v nějakém af. prostoru,
- interval ve stand. af. prostoru $\mathbb{R}^1$,
- podmnožina $\{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq x_1\}$ ve stand. af. prostoru $\mathbb{R}^2$,
- podmnožina $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 1 + x_1 + x_2\}$ ve stand. af. prostoru $\mathbb{R}^3$,

- komplexní čísla $\mathbb{C}$ uvažovaná nad tělesem $\mathbb{R}$,

- reálná/racionální/celočíselná řešení soustavy rovnic

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3 \\ 4x_2 - 5x_4 &= 1 \end{aligned}}$$

pro neznámé x_1, x_2, x_3, x_4,

- komplexní/reálná/... řešení soustavy rovnic

$$\boxed{\begin{aligned} (x_1)^2 + 2x_2 &= -3 \\ 4x_2 - 5x_4 &= 1 \end{aligned}}$$

pro neznámé x_1, x_2, x_3, x_4,

- všechna/polynomiální/konstantní řešení dif. rovnice

$$\boxed{y'' - 4y' + 5y = 10}$$

s neznámou funkcí $y = f(x)$.

(2) Najděte/vymyslete další příklady af. struktur.

AFINNÍ SOUŘADNICE

(3) Pro následující soustavu rovnic s neznámými $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3 \\ 4x_2 - 5x_4 &= 1 \end{aligned}}$$

- najděte dvě různé parametrizace množiny všech řešení,
- vyjádřete řešení $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$ vzhledem k těmto parametrizacím,
- určete obecný vztah mezi těmito dvěma parametrizacemi.

(4) V úloze (0) ...

- zvolte nějak souř. soustavu a určete souřadnice pár bodů,
- zvolte jinak souř. soustavu a určete souřadnice týchž bodů,
- určete obecný vztah mezi těmito dvěma vyjádřeními.

(5) V afinní souřadné soustavě na mapě jistého města je několik význačných míst určeno souřadnicemi

$A = [1, -1]$, $B = [1, 1]$, $C = [3, 0]$, $D = [5, 2]$, $E = [4, 4]$.

Dva kolegové sledují dění ve městě tak, že kolega K. zaznamenává údaje vzhledem k souřadné soustavě s počátkem v místě A, kde má základnu, a bází $(\vec{AB}, \vec{AC})$; kolega L. pracuje se souřadnou soustavou s počátkem v D a bází $(\vec{DC}, \vec{DE})$. Přesně v poledne začíná K. zaznamenávat rovnoměrný přímočarý pohyb podezřelé tramvaje a jeho zápis (v závislosti na čase t) vypadá takto:

$$[\,5/4 + 1/4\, t,\; 1/2 - 1/2\, t\,]$$

V tomtéž čase také L. zaznamenává pohyb tramvaje jako:

$$[\,1 - 1/4\, t,\; 1 - 1/4\, t\,]$$

- Rozhodněte, zda oba kolegové pozorují tutéž tramvaj a zda je náhodou tramvaj neohrožuje.

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

(6) Rozhodněte, zda následující zobr. jsou AFINNÍ:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadané předpisem $f(x) = x^k + 1$, kde $k = 0, 1, 2, \dots$
- stejnolehlosti, resp. jejich složení,
- symetrie krychle, resp. jejich složení,

(7) Pokud je odpověď v předchozí úloze kladná,

- určete analytické vyjádření zobrazení vzhledem k nějaké souřadné soustavě.

(8) Afinní zobrazení v rovině je dáno obrazy bodů

$$A = [0,0] \longmapsto [5,1] = A'$$
$$B = [2,0] \longmapsto [5,-1] = B'$$
$$C = [0,2] \longmapsto [7,1] = C'$$

- Určete obraz obecného bodu $X = [x_1, x_2]$,
- popište (geometricky) toto zobrazení,
- vzhledem ke ztotožnění $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ vyjádřete pomocí operací v $\mathbb{C}$.

(9) Najděte/vymyslete další příklady afinních zobrazení.

VYJÁDŘENÍ AF. PODPR.

(10) Vzhledem k volbám v úloze (4)
vyjádřete přímku p, rovinu α apod., a to

- parametricky,
- rovnicově,
- jinak.

(11) Ve 4-dim af. prostoru ...
ozn. $\mathcal{B}$ nejmenší podpr. obsahující body

$$A = [1, -1, 0, 2], \quad B = [4, 1, 0, 2], \quad C = [2, -1, 1, 1].$$

Určete:

- dimenzi $\mathcal{B}$,
- parametrické vyjádření $\mathcal{B}$,
- rovnicové vyjádření $\mathcal{B}$,
- totéž nějak jinak.

(12) V předchozí úloze přidejte další bod ...

- a řešte znovu.

VZÁJEMNÉ POLOHY

(13) Vzhledem k volbám v úloze (4)

určete průnik, resp. vzájemnou polohu

- přímky p a roviny α,
- jiných podprostorů.

(14) V 3-dim af. prostoru ...

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- V závislosti na hodnotě $a \in \mathbb{R}$ určete vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
- Pozměňte zadání, abyste vyčerpali zbylé možnosti.

(15) Ve 4-dim af. prostoru ...

$$\mathcal{B} = \left\{ \boxed{\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 &= 10 \\ 2x_2 + x_4 &= 11 \end{aligned}} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Určete vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
- Pozměňte zadání, abyste vyčerpali zbylé možnosti.

(16) Vymyslete konkrétní příklad

- třech navzájem mimoběžných podpr.,
- mimoběžných podpr. se společnými směry.

PŘÍČKY

(17) V úloze (0) ...

- Určete příčku přímek AB a DH,
  - která prochází středem krychle,
  - která je rovnoběžná s přímkou LM.
- Určete dvojici přímek,
  - které mají ∞ mnoho příček proch. středem krychle,
  - pro které neex. příčka rovnoběžná s přímkou LM.

(18) V 3-dim af. prostoru, pro

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\},$$

- určete příčku, která proch. bodem $M = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,
  resp. má směr $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(19) Ve 4-dim af. prostoru, pro

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{aligned} x_2 - x_4 &= 2 \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \right\}, \qquad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\},$$

- určete příčku, která má směr $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

OMEZENÉ PODPROSTORY, TĚŽIŠTĚ

(20) Vzhledem k volbám v úloze (4) ukažte, že

- body A a G leží v opačných poloprostorech vzhledem k α,
- průsečík $p \cap \alpha$ je těžištěm trojúhelníku KLM,
- střed krychle neleží v konvexním obalu bodů K, L, M, G.

(21) Pro lichoběžník se základnami AB a CD v poměru $1:3$

- určete těžiště hmotné soustavy tvořené body A, B, C, D se stejnými vahami,
- určete těžiště lichoběžníku $ABCD$,
- vymyslete konkrétní provedení v af. souřadnicích.

(22) Ve 4-dim af. prostoru ...

$A_1 = [1,-1,0,2]$, $A_2 = [3,-1,2,4]$, $A_3 = [3,1,0,0]$,
$A_4 = [5,1,2,2]$, $A_5 = [3,0,1,2]$, $A_6 = [4,-1,0,2]$.

- Pro $k = 2,3,\dots$, určete barycentrické souř. A_k vzhledem k bodům $A_1, \dots, A_{k-1}$ (pokud to je možné),
- rozhodněte, zda A_k leží v konvex. obalu $\{A_1, \dots, A_{k-1}\}$.

VZDÁLENOSTI

(23) V úloze (0) ...

- zvolte KARTÉZSKOU souř. soustavu.

(24) Vzhledem k předch. volbám určete vzdálenost

- bodů A a L
- bodu L a přímky $p = AG$
- bodu G a roviny $\alpha = KLM$
- přímek $p = AG$ a $q = BC$

(25) Mezi nápady řešení předch. úlohy rozlište

- obecné (a zobecněte)
- specifické (a pojmenujte specifičnost)

(26) V úloze (18) ...

- určete všechny příčky délky ≤ 4
- vyberte tu nejkratší

(27) V úloze (19) ...

- určete vzdálenost a vzájemnou polohu podprostorů.

OBSAHY A OBJEMY

(28) **V úloze (o) určete objemy** všech

- rovnoběžnostěnů, jejichž 4 z 8 vrcholů jsou K, L, M, G,
- čtyřstěnů, jejichž 3 ze 4 vrcholů jsou K, L, M a zbylý vrchol je vrcholem krychle.

(29) **V 3-dim prostoru**, pro

$A = [0,0,1]$, $B = [2,1,1]$, $C = [1,2,1]$, $D = [1,1,2]$,

- určete bod E na přímce AD tak, aby simplex $ABCE$ měl objem 1.

(30) **Ujistěte se**, že jste se v předchozích úlohách seznámili se všemi dostupnými nápady:

- elementární úvahy
- kolmý průmět vektoru
- vnější a vektorový součin
- Gramův determinant

(31) **Užijte některý z nových nápadů** k řešení některých starších úloh, např.

- rovnice nadroviny,
- vzájemná poloha podprostorů, ...

ODCHYLKY

(32) V úloze (10) určete odchylky

- přímek BM a AG
- přímky AG a roviny BGE
- rovin BGE a KLM
- apod.

(33) V úloze (19) ...

- určete odchylku podprostorů.

(34) Vymyslete (pokud to je možné) konkrétní příklad podpr.:

- $\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = 90^\circ$
- $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{E}}^{\perp}$
- $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{E}}^{\perp}$ a $\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{E}) \neq 90^\circ$
- $\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = 90^\circ$ a $\vec{\mathcal{B}} \not\subseteq \vec{\mathcal{E}}^{\perp}$ a $\vec{\mathcal{B}} \not\supseteq \vec{\mathcal{E}}^{\perp}$

BONUSY

(A) DOPLŇTE některý z předchozích výpočtů
- konstrukcí (pravítko a kružítko),
- jiným výpočtem (af. souřadnice vs. af. kombinace bodů),
- geogebrou (či jinou pomůckou).

(B) Popište množinu SPOLEČNÝCH příček tří mimoběžek (např. doplňte zadání **(18)** o $m = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \dots$).

(C) Rozpoznejte (a upřesněte) mezi body v úloze **(22)** jistý dobře ZNÁMÝ ÚTVAR.

(D) Řešte úlohu s ODCHYLKOU rovin bez spol. vektorů.

(E) Prozkoumejte (pomocí vektorů) nějaký PRAVIDELNÝ mnohoúhelník či mnohostěn.

(F) Vymyslete VLASTNÍ úlohu, při jejímž řešení uplatníte co nejvíc z právě nabytých dovedností!