

---

## Předmluva

---

*Omnia sponte fluant, absit violentia rebus*

J.A.K.

Toto je osnova k přednášce z Geometrie 2 a 3 (MA0009 a 13). Stručný přehled, hlavní cíle a předpoklady k uspokojivému studiu jsou výtčeny v úvodní kapitole I. Dělení látky do jednotlivých kurzů vypadá zhruba takto: afinní a eukleidovská geometrie (kapitoly II a III), projektivní rozšíření a geometrická zobrazení (kapitoly IV a V).

Z dostupných učebnic geometrie nejčastěji používáme [HoJa] a [Sek]. Pro souvislosti, zajímavosti a ilustrace otevíráme [Be, Ha] a další. Velmi často odkazujeme na poznatky z loňského kurzu konstrukční geometrie [Ž], které většinou nějak doplňujeme, resp. zobecňujeme. Hlavním pracovním nástrojem v tomto předmětu je **lineární algebra**; z mnoha dostupných učebnic doporučujeme např. (vybrané pasáže z) [Zl]. Z citované literatury ještě upozorňujeme na povedené závěrečné práce [Po] a [El]. Další odkazy a materiály, staré písemky apod. lze najít ve studijních materiálech v IS.<sup>1</sup>

Tento materiál se průběžně vyvíjí, a to i na základě studentských připomínek. Zatím největší zásluhy v tomto směru patří Lucii Krézkové. Za všechny poznámky a připomínky děkuji a povzbuzuji čtenáře, aby formulovali svoje vlastní.

Brno, 4. října 2020

Vojtěch Žádník

---

<sup>1</sup><http://is.muni.cz/e1/1441/podzim2020/MA0009/index.qwarp>



<b>I Úvod</b>	<b>5</b>
1 Základy . . . . .	5
2 Shrnutí a výhledy . . . . .	7
3 Předpoklady a cíle . . . . .	9
<b>II Afinity geometrie</b>	<b>11</b>
4 Afinity prostory, podprostory a zobrazení . . . . .	11
5 Afinity souřadnice a vyjádření afinity podprostorů . . . . .	20
6 Vzájemné polohy podprostorů a některé polohové úlohy . . . . .	27
7 Uspořádání na přímce, konvexní množiny, barycentrické souřadnice a další . . . . .	34
<b>III Eukleidovská geometrie</b>	<b>45</b>
8 Eukleidovské prostory a relevantní zobrazení . . . . .	45
9 Kolmost a kolmý průmět vektoru . . . . .	55
10 Vzdálenosti a odchylky podprostorů . . . . .	59
11 Obsahy, objemy a další . . . . .	71
<b>IV Projektivní geometrie</b>	<b>81</b>
12 Projektivní rozšíření, prostory a podprostory . . . . .	81
13 Homogenní souřadnice a dvojpoměr . . . . .	87
14 Projektivní zobrazení a základní věta projektivní geometrie . . . . .	91
<b>V Geometrická zobrazení blížeji</b>	<b>99</b>
15 Analytická vyjádření a charakterizace . . . . .	99
16 Samodružné prvky . . . . .	111
17 Základní transformace . . . . .	115
18 Další klasifikace a poznámky . . . . .	122
<b>VI Dodatky</b>	<b>131</b>
19 Pseudo-eukleidovské prostory . . . . .	131
20 Další geometrická zobrazení . . . . .	132
21 Kuželosečky a kvadriky . . . . .	132

---

22	Lieova geometrie kružnic . . . . .	134
23	Kleinova geometrie přímek . . . . .	135
24	Grupové akce . . . . .	136
25	Frízové a tapetové vzory . . . . .	138
26	Třetí Hilbertův problém . . . . .	138
<b>Návody a řešení</b>		<b>141</b>
<b>Literatura</b>		<b>145</b>
<b>Seznam obrázků</b>		<b>147</b>
<b>Seznam tabulek</b>		<b>151</b>
<b>Rejstřík</b>		<b>153</b>



## 1 Základy

Základy eukleidovské geometrie lze najít — vedle mnoha jiných věcí — v Eukleidových Základech [Eu] (cca 300 př. K.). Toto dílo představuje ucelený deduktivní výklad tehdejší matematiky odvozený z několika axiómů a postulátů. Axiómy se týkají obecných veličin, postuláty jsou ryze geometrického charakteru a vymezují základní vztahy mezi základními geometrickými objekty. V této části připomínáme několik podstatných pojmů a vztahů, ke kterým se budeme často vracet. Většinu z těchto poznatků jsme diskutovali už v kurzu konstrukční geometrie [Ž].

### 1.1 Definice

Definice většiny geometrických pojmů, které známe ze školy, lze najít v téměř stejném znění v Základech; jedná se o úvodní definice zejména ke knihám I a XI. Některé z těchto definic budeme mírně zobecňovat, proto si je tady připomeneme.

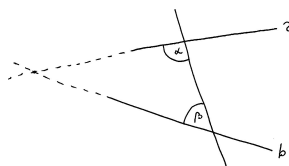
- Pokud jsou vedlejší úhly vymezené dvěma protínajícími se přímkami shodné, pak každý z těchto úhlů se nazývá *pravý* a přímky se nazývají *kolmé*.
- *Kružnice* je rovinný útvar tvořený koncovými body všech úseček, které jsou navzájem shodné a jejichž opačné koncové body splývají (a to ve *středu* kružnice).
- Přímky jsou *rovnoběžné*, pokud leží v téže rovině a nemají žádný společný bod.
- Přímka je *kolmá* k rovině, pokud je kolmá ke všem přímkám, které v ní leží.
- Dvě roviny jsou *kolmé*, pokud přímky, které leží v jedné z těchto rovin a jsou kolmé k průsečnici rovin, jsou také kolmé ke druhé rovině.
- Roviny jsou *rovnoběžné*, pokud se neprotínají.
- Apod.

Některé definice v Základech jsou poněkud vágní. Ty zde neuvádíme a dáme jim přesný význam později — postupně můžete odhadovat, které to jsou.



## 1.2 Postuláty

- (I) Každé dva různé body spojuje přímka.
- (II) Každou přímku lze na každé straně libovolně prodloužit.
- (III) Lze vytvořit kružnici s libovolným daným středem procházející libovolným jiným bodem.
- (IV) Všechny pravé úhly jsou shodné.
- (V) Když přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé, pak tyto dvě přímky (dostatečně prodlouženy) setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.



Obrázek 1.1: Eukleidův dodatečný postulát:  $\alpha + \beta < 2R \implies a$  a  $b$  se protínají, a to vlevo.

V (I) a (II) je přímku zřejmě myšlena úsečka, a to jediná. Postuláty (I)–(III) představují přípustné konstrukční nástroje, tzv. eukleidovské pravítko a kružítko.

Postulát (I) se týká **incidence**, postulát (IV) nám říká něco o základní relaci **shodnosti**. Uvědomte si, že v Eukleidově pojetí je shodnost docela abstraktní koncept: z pochopitelných důvodů nemůže zahrnovat žádné číselné vyjadřování délek úseček, velikostí úhlů apod., jak to běžně chápeme dnes!

Poněkud komplikovaný postulát (V) bývá nahrazován tzv. postulátem o **rovnoběžkách**, se kterým je ekvivalentní:

- Každým bodem ke každé přímce prochází právě jedna rovnoběžka.

## 1.3 Axiómy nevyslovené

V Základech se používá několik předpokladů, aniž by byly jakkoli formulovány. Přesný axiomatický popis, založený na tom Eukleidově, pochází od D. Hilberta [Hi] (kolem 1900). V tomto systému jsou primitivními (nedefinovanými) pojmy bod, přímka a rovina; primitivní relace jsou relace incidence (náležení), uspořádání („být mezi“) a shodnosti. Pro každou z těchto relací je formulováno několik axiomů, dále pak axiomy rovnoběžnosti a spojitosti.

Eukleidovy nevyslovené axiomy se týkají hlavně uspořádání a spojitosti. Typický axiom **uspořádání** je např.:

- Pro tři různé body ležící na jedné přímce platí, že právě jeden z nich je mezi zbylými dvěma.

Tento požadavek nám mj. říká, že přímka není uzavřená křivka, což ze samotného postulátu (II) nevyplývá. V důsledku je možné body na přímce uspořádat a toto uspořádání je úplné. Uvědomte si, že teprve po této přípravě je možné uspokojivě definovat pojem úsečky.

Axiomy **spojitosti** je možné nahradit jediným, tzv. Dedekindovým axiomem, který lze řeči uspořádání a tzv. Dedekindových řezů formulovat takto:

- *Body na přímce neobsahují (vzhledem k výše zmíněnému uspořádání) Dedekindovy řezy typu „skok“ a „mezera“.*

Jinak řečeno, body na přímce ztotožňujeme s reálnými čísly...

## 2 Shrnutí a výhledy

### 2.1 Shrnutí

*Eukleidovská* geometrie je axiomatická teorie vyhovující výše zmíněným skupinám axiómů. Axiómy eukleidovské geometrie mohou být zvoleny různě, my se odkazujeme výhradně na systém Hilbertův. Následující formulace jsou poměrně volné a tudíž nepřesné; rozumná upřesnění lze najít např. v [Co, Ha, Sek].

Pokud se pozorně probíráme základy eukleidovské geometrie, zjišťujeme, že některé definice a tvrzení jsou nezávislé na některých axiómech nebo skupinách axiómů. Např. prvních 28 tvrzení v I. knize [Eu] nezávisí na axiómu rovnoběžnosti — o těchto říkáme, že patří do tzv. *absolutní* (nebo *neutrální*) geometrie. Typickým příkladem je např. věta o vnějším úhlu v trojúhelníku.

Na druhé straně, podstatná skupina poznatků a pojmů na axiómu rovnoběžnosti závisí, ale je možné je vyvodit bez axiómů shodnosti — o těchto říkáme, že patří do geometrie *afinní*. Např. pojem středu úsečky je kupodivu afinní. Mezi známá tvrzení elementární geometrie, která jsou ve skutečnosti afinní, patří např. Menelaova věta.

Další studovanou geometrií je geometrie *projektivní*. Ta je vymezena téměř výhradně axiómy incidence — z loňska připomínáme, že v projektivní geometrii vůbec nemluvíme o shodnosti, neplatí axióm rovnoběžnosti (každé dvě přímky, které leží v jedné rovině, se protínají), ani axiómy uspořádání (projektivní přímka je uzavřená). Známa věta projektivní geometrie je např. věta Desarguesova.

V tomto kurzu se budeme věnovat především geometriím eukleidovským, afinním a projektivním. Musíme však aspoň zmínit geometrie *neeuclidovské*, jež se vyznačují tím, že v nich neplatí axióm rovnoběžnosti. To znamená, že k dané přímce daným bodem prochází buď více rovnoběžek (*hyperbolická* geometrie) nebo žádná rovnoběžka (*eliptická* geometrie). Axiómy popisující hyperbolickou geometrii jsou stejné jako pro eukleidovskou geometrii, akorát axióm rovnoběžnosti je nahrazen jeho negací. V eliptické geometrii neplatí axiómy uspořádání.

Bereme-li eukleidovskou geometrii jako výchozí, můžeme předchozí diskuzi ve velkých uvozkách shrnout takto:

- „ absolutní geometrie je eukleidovská geometrie bez rovnoběžnosti,
  - afinní geometrie je eukleidovská geometrie bez shodnosti,
  - projektivní geometrie je eukleidovská geometrie bez shodnosti, rovnoběžnosti a uspořádání,
  - eliptická geometrie je eukleidovská geometrie bez rovnoběžnosti a uspořádání,
  - hyperbolická geometrie je eukleidovská geometrie s více rovnoběžkami. “

Kromě toho můžeme v podobné zkratce říct, že

- „ absolutní geometrie je průnikem eukleidovské a hyperbolické geometrie,
  - eukleidovská geometrie je afinní geometrie se shodností,

- eliptická geometrie je projektivní geometrie se shodností,
- apod. “

Ke všem těmto reformulacím máme několik dobrých důvodů. Jednak chceme naznačit, že jedna a táž věc lze nahlížet různými způsoby, jednak si připravujeme půdu pro následující výklad.

## 2.2 Výhledy

V tomto kurzu budeme geometrii studovat tzv. analyticky, lépe řečeno algebraicko-analyticky. Počátky této metody jsou spojovány se jménem R. Descarta (kolem 1637), jehož hlavním přínosem byla aplikace **algebry** k řešení geometrických úloh. Mělo by však být zřejmé, že se nemohlo jednat o analytickou geometrii, jak ji chápeme dnes!<sup>1</sup>

S průměrnou znalostí lineární (**vektorové**) algebry budeme umět velmi pohodlně interpretovat všemožné geometrické definice a vztahy. Nejprve v příslušných kapitolách vymezíme pojmy obecného afinního, eukleidovského, resp. projektivního prostoru:

- Struktura afinního prostoru na jakékoli množině je určena zobrazením, které dvěma bodům přiřazuje vektor. Všechny tyto vektory tvoří vektorový prostor, kterému budeme přezdívat zaměření afinního prostoru. Takto se rychle dostaneme ke všem základním pojmům afinní geometrie, zejména k pojmu rovnoběžnosti.
- Obecný eukleidovský prostor je afinní prostor vybavený eukleidovskou metrikou, což je metrika kompatibilní s afinní strukturou — ta nám definuje relaci shodnosti. Eukleidovská metrika je určena skalárním součinem na zaměření.
- Projektivní prostor lze vždy chápat jako afinní prostor rozšířený o „body v nekonečnu“. Body projektivního prostoru budeme reprezentovat vektory z tzv. zastupujícího vektorového prostoru, který obsahuje zaměření afinního prostoru (a je o jednu dimenzi větší).

Výhodou této algebraizace geometrie je zejména to, že většinu věcí budeme umět formulovat jednotně pro prostory libovolné dimenze. Z pochopitelných důvodů budeme postupovat induktivně (geometrie na přímce, v rovině, v prostoru), finální definice, věty a jejich zdůvodnění však budou zpravidla univerzální.

Další výhody algebraického přístupu bychom měli pozorovat při klasifikaci geometrických zobrazení. Všechny shodnosti eukleidovského prostoru tvoří grupu, tato je podgrupou grupy (bijektivních) afinních transformací, jež je zase podgrupou grupy (bijektivních) projektivních transformací, apod. Každou z těchto grup budeme umět interpretovat jako jistou maticovou grupu tak, že právě zmíněné inkluze se stanou víc než názornými. Právě pojem **transformační grupy** a její role při organizaci geometrických informací velmi ovlivnil pohled na geometrii a její další vývoj. Hlavními propagátory tohoto přístupu byli F. Klein a S. Lie (kolem 1872). V tomto duchu je ta či ona geometrie zcela charakterizována grupou odpovídajících geometrických transformací.

## 2.3 Poznámky

Objev významu afinní geometrie (včetně tohoto pojmenování) je přisuzován L. Eulerovi (kolem 1748). Jako samostatná disciplína se začala afinní geometrie utvářet až po akceptování výše zmíněného Kleinova programu a úplně zdomácněla zejména díky vlivu H. Weyla (kolem 1923).

<sup>1</sup>V té době stále nebyla vynalezena reálná čísla...

Úplné pochopení absolutní a neeuclidovské geometrie (kolem 1830) představuje jedno z nejzajímavějších dobrodružství v historii matematiky a je zásluhou J. Bolyaie, N.I. Lobačevského a C.F. Gausse.

Několik poznatků projektivní geometrie bylo známo již ve starověku, např. Pappova věta (kolem 400). Další postřehy přidávali malíři během renesance díky studiu perspektivy a tato etapa byla završena pracemi G. Desarguese a B. Pascala (kolem 1640). K dalšímu, tentokrát bouřlivému, rozvoji projektivní geometrie došlo v 19. století díky pracím V. Ponceleta, J.D. Gergonna, J. Steinera a dalších.

Ve stejném století se vyvinuly algebraické techniky, které se ukázaly být pro geometrii velmi přínosné a které budeme používat i my (soustavy lineárních rovnic, determinanty a matice). První vícerozměrné geometrické objekty byly studovány A.F. Möbiusem, J. Plückerem a W.R. Hamiltonem (kolem 1830). Později se také zrodil pojem obecné grupy, jež F. Kleinovy dovolil klasifikovat geometrie podle odpovídajících grup transformací.

Je zajímavé, že ve stejné době (kolem 1872) se objevují první přesné definice reálných čísel, a to díky G. Cantorovi (pomocí posloupností racionálních čísel) a R. Dedekindovi (pomocí již zmiňovaných řezů).

V uvedeném přehledu vývoje geometrie jsme zdůraznili pouze několik proudů, které se týkají tohoto kurzu. Ucelenější výklad lze najít např. v poslední kapitole II. dílu [Sek]. Viz též stručné, ale výstižné, pojednání [Ha<sub>2</sub>].

## 3 Předpoklady a cíle

### 3.1 Předpoklady

Předpokládáme rozumný přehled školské a konstrukční geometrie zahrnující zejména následující témata:

- klasická konstrukční geometrie v rovině a v prostoru,
- průniky a vzájemné polohy přímek a rovin v prostoru,
- konstrukce kolmice, určení vzdáleností a odchylek,
- přehled geometrických zobrazení a jejich vlastností.

Kromě toho budeme na každém kroku potřebovat uspokojivé dovednosti z algebry, hlavně té lineární. To mj. znamená, že ovládáme následující tématické okruhy:

- grupy, podgrupy a jejich homomorfizmy,
- vektorové prostory, podprostory a lineární zobrazení,
- soustavy lineárních rovnic,
- determinanty, skalární součiny apod.

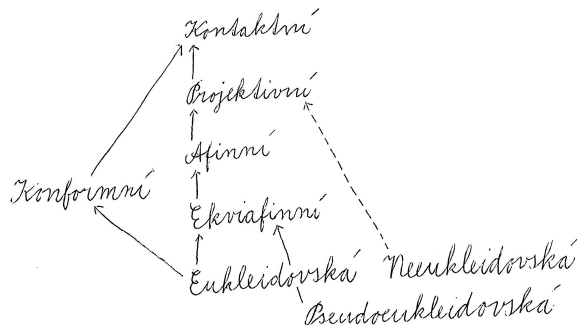
Pokud výslovně neuvádíme něco jiného, všechny vektorové prostory jsou uvažovány nad tělesem reálných čísel  $\mathbb{R}$ .

### 3.2 Cíle

Chceme co nejvíc zužitkovat nabyté algebraické znalosti na pokud možno zajímavé skupině geometrických problémů. Typické úlohy, které chceme umět (algebraicky) řešit, zahrnují např.:

- pro dva podprostory v obecném afinním, resp. projektivním prostoru určit jejich vzájemnou polohu,
- pro dva podprostory v obecném eukleidovském prostoru rozhodnout, zda jsou kolmé,
- dále určit jejich vzdálenost včetně nějaké dvojice bodů, v nichž se tato vzdálenost realizuje,
- podobně pro odchylku. . . ,
- aspoň trojím způsobem určit objem daného mnohostěnu,
- určit bod, který je souměrný k danému bodu podle daného podprostoru,
- určit transformační rovnice souměrnosti podle daného podprostoru,
- z daných transformačních rovnic rozpoznat typ, příp. určující prvky odpovídajícího zobrazení,
- složit dvě geometrická zobrazení a určit typ výsledného zobrazení,
- apod.

Kromě řešení těchto konkrétních problémů bychom se také měli umět zorientovat v geometrických zobrazeních a klasifikaci geometrií v Kleinově duchu. Jistou nápovědu lze najít v následujícím schématu (šipky naznačují inkluze odpovídajících transformačních grup).



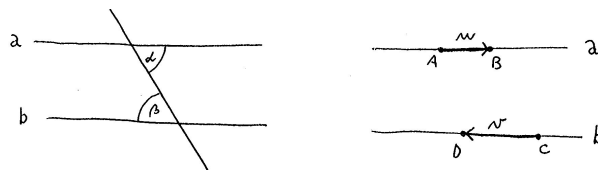
Obrázek 3.2: Hierarchie geometrií, o nichž se zmiňujeme v tomto textu.

Afinní struktura na množině je zobrazení, které dvěma prvkům dané množiny (jímž budeme říkat „body“) přiřazuje **vektor** a splňuje jisté přirozené požadavky. Toto je klíčový trik, který nám umožňuje překládat mnoho geometrických problémů do vektorové (lineární) algebry. Typickými úlohami afinní geometrie je určování vzájemné polohy podprostorů v afinním prostoru nebo konstrukce přímek. Do hájemství afinní geometrie patří také konvexní geometrie, pojem barycentrických souřadnic apod.

## 4 Afinní prostory, podprostory a zobrazení

### 4.1 Úvod a obecný afinní prostor

Ústředním pojmem afinní geometrie je **rovnoběžnost**. První kritérium rovnoběžnosti přímek je znázorněno na obr. 4.1(a). To je přímým důsledkem tvrzení I.27 a I.29 v [Eu] a rovnoběžnost je zde charakterizována pomocí shodnosti úhlů.



Obrázek 4.1: Kritérium rovnoběžnosti přímek: (a)  $a \parallel b \iff \alpha = \beta$ , (b)  $a \parallel b \iff \mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  jsou lineárně závislé.

V úvodu jsme slibovali, že afinní geometrii vybudujeme zcela bez pojmu shodnosti, a to algebraicky pomocí vektorů. V tomto duchu je rovnoběžnost přímek ekvivalentní s tím, že jejich odpovídající směrové vektory jsou lineárně závislé, viz obr. 4.1(b). Přitom si zejména všímáme, že každé dva body  $A$  a  $B$  jednoznačně určují nějaký vektor, který značíme  $\overrightarrow{AB}$ . Toto přiřazení

není jen tak ledajaké — jeho podstatné vlastnosti jsou obsaženy v následující definici afinního prostoru. . .

### Obecná definice afinního prostoru

Předchozí pozorování jsou základem k obecné definici abstraktní afinní struktury.

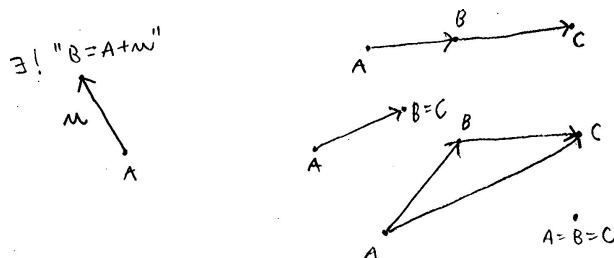
**Definice.** *Afinní prostor* je neprázdná množina  $\mathcal{A}$  spolu se zobrazením  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$  do nějakého vektorového prostoru  $V$  (dvěma *bodům*  $A$  a  $B$  se přiřazuje vektor  $\overrightarrow{AB}$ ), které má následující vlastnosti:

- (a) libovolný bod  $A$  a libovolný vektor  $\mathbf{u}$  jednoznačně určují (koncový) bod  $B$  tak, že platí  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$ ,
- (b) je kompatibilní s vektorovou strukturou  $V$ , tj. pro libovolné body  $A, B$  a  $C$  platí:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Vektorový prostor  $V$  se nazývá *zaměření* afinního prostoru  $\mathcal{A}$  a značí se  $\vec{\mathcal{A}}$ .

*Dimenze* afinního prostoru  $\mathcal{A}$  je definována jako dimenze jeho zaměření  $V = \vec{\mathcal{A}}$ .



Obrázek 4.2: Axiomy obecné afinní struktury  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow V$ : (a) pro libovolné  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{u} \in V$  existuje jediný  $B \in \mathcal{A}$  takový, že  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$ , (b) pro libovolné  $A, B, C \in \mathcal{A}$  platí:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

### Poznámky

Vlastnost (a) nám asociuje zobrazení  $\mathcal{A} \times V \rightarrow \mathcal{A}$ , které lze interpretovat jako „umístění volného vektoru“. Koncový bod  $B$  symbolicky píšeme

$$B = A + \mathbf{u}.$$

Odtud je vidno, proč se vektor  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  občas formálně zapisuje jako „ $\mathbf{u} = B - A$ “.

Všimněte si, že pro libovolný bod  $A \in \mathcal{A}$  je předpisem

$$\mathbf{u} \mapsto A + \mathbf{u}$$



určeno zobrazení  $V \rightarrow \mathcal{A}$ , které je bijektivní.<sup>1</sup> Tento postřeh ospravedlňuje výše uvedenou definici dimenze afinního prostoru. Afinní prostor dimenze 0 se nazývá triviální, afinnímu prostoru dimenze 1, resp. 2, se přezdívá afinní přímka, resp. rovina.

Zobrazení  $\mathcal{A} \times V \rightarrow \mathcal{A}$  můžeme také interpretovat jako akci (komutativní grupy)  $V$  na množině  $\mathcal{A}$ : pro libovolný vektor  $\mathbf{u} \in V$  je odpovídající transformace  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  právě „posunutí o vektor  $\mathbf{u}$ “. Vzhledem k terminologii v podkap. 24 můžeme naši původní definici zestručnit takto:

**Definice** (ekvivalentní). *Afinní prostor* se zaměřením  $V$  je neprázdňá množina  $\mathcal{A}$ , na níž  $V$  působí efektivně a tranzitivně; přitom  $V$  je vektorový prostor uvažovaný jakožto komutativní grupa.

## 4.2 Příklady a poznámky

(1) Tzv. *kanonický afinní prostor* se zaměřením  $V$  je právě  $V$ , akorát zapomeneme na význačný prvek (kterým je nulový vektor). Přesněji, uvažujeme  $\mathcal{A} := V$  spolu se zobrazením  $V \times V \rightarrow V$  daným rozdílem vektorů:  $\vec{\mathbf{u}\mathbf{v}} := \mathbf{v} - \mathbf{u}$ .

(2) Prostor řešení soustavy lineárních rovnic je buď prázdná množina nebo afinní prostor, viz např. soustavu dvou rovnic o třech neznámých  $\{2x - y = 3, 3x - z = 4\}$ .

Jaká může být dimenze prostoru řešení soustavy  $r$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých?

(3) Další přirozené netriviální příklady známe z matematické analýzy, viz např. prostor řešení lineární diferenciální rovnice  $y'' - 4y' + 5y = 10$ .

Jaká je dimenze prostoru řešení lineární diferenciální rovnice  $k$ -tého řádu?

(4) Různé podivně vyhlížející konstrukce lze najít v literatuře.

V dalším textu *standardním afinním prostorem* dimenze  $n$  míníme právě kanonický afinní prostor se zaměřením  $V = \mathbb{R}^n$ .

V předchozích příkladech jsme chtěli zdůraznit, že afinní strukturu lze najít ledaskde, tedy ne jenom v geometrii. Ať už afinní prostor vypadá jakkoli, jeho prvky jsou vždy jednoznačně popsány několika reálnými čísly (volnými parametry, integračními konstantami apod.). To jsou tzv. afinní souřadnice, o nichž si něco víc řekneme v odst. 5.1. Tímto způsobem lze každý afinní prostor dimenze  $n$  ztotožnit se standardním afinním prostorem  $\mathbb{R}^n$ !

## 4.3 Afinní podprostory, průniky, součty a obaly

### Afinní podprostor

**Definice.** Podmnožina afinního prostoru  $\mathcal{A}$ , která je sama afinním prostorem, se nazývá *afinní podprostor* prostoru  $\mathcal{A}$ .

Jak je u podobných definic zvykem, ve vedlejší přívláskové větě nevyslovujeme dodatek „vzhledem ke zděděné afinní struktuře“. Uvědomte si, co to přesně znamená.

<sup>1</sup>Bijektivnost plyne přímo z definice afinní struktury; inverzní zobrazení  $\mathcal{A} \rightarrow V$  je dáno předpisem  $B \mapsto \vec{AB}$ . Tato pozorování stojí za jinými (ekvivalentními) definicemi afinního prostoru, jež lze najít v literatuře, viz např. [Sek, str. 19 v I. díle].

Afinní podprostory dimenze 0, 1, resp. 2, nazýváme přirozeně body, přímky, resp. roviny v  $\mathcal{A}$ ; podprostory kodimenze 1 nazýváme *nadroviny* v  $\mathcal{A}$ .<sup>2</sup> (Nadrovinou v trojrozměrném prostoru je rovina, nadrovinou v rovině je přímka apod.)

Je-li  $\mathcal{B}$  afinní podprostor v  $\mathcal{A}$ , potom zaměření  $\vec{\mathcal{B}}$  je vektorovým podprostorem v zaměření  $\vec{\mathcal{A}}$ . Pro dva afinní podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v  $\mathcal{A}$  platí:

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \implies \vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}},$$

ale určitě ne obráceně! Nejjednodušší protipříklad můžeme vydedukovat z obr. 4.1: rovnoběžné přímky mají stejná zaměření. Toto pozorování motivuje obecnou definici **rovnoběžnosti**, viz podkap. 6.

Afinní podprostor je jednoznačně určen svým zaměřením a nějakým bodem, jímž prochází; píšeme

$$\mathcal{B} = B + U := \{B + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U\}, \quad (4.1)$$

kde  $B$  je nějaký bod a  $U = \vec{\mathcal{B}}$  je vektorový podprostor v  $\vec{\mathcal{A}}$ . Ke způsobům vyjádření afinních podprostorů se vrátíme v podkap. 5.

☞ Z definic, předchozích pozorování a špetky samostatného uvažování vyplývá, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- Podmnožina  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  je afinním podprostorem  $\iff$
- podmnožina  $\{\overrightarrow{XY} \mid X, Y \in \mathcal{B}\} \subseteq \vec{\mathcal{A}}$  je vektorovým podprostorem  $\iff$
- existuje bod  $B \in \mathcal{A}$  a vektorový podprostor  $U \subseteq \vec{\mathcal{A}}$  tak, že  $\mathcal{B} = B + U$   $\iff$
- pro libovolné různé body  $B, C \in \mathcal{B}$  platí, že také celá přímka  $B + C$  patří do  $\mathcal{B}$ .

Přímka  $B + C$  je nejmenší afinní podprostor obsahující body  $B$  a  $C$ . To je nejjednodušší příklad součtu afinních podprostorů, o kterém si hned něco řekneme obecně. . .

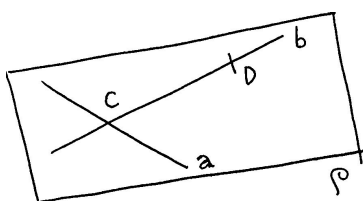
### Průnik a součet podprostorů, afinní obal

Pokud je průnik afinních podprostorů  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  neprázdný, pak je to opět afinní podprostor a zřejmě platí

$$\overrightarrow{(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})} = \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}.$$

Sjednocení afinních podprostorů však nemusí být podprostorem (viz např. množinu sestávající ze dvou různých bodů). Nejmenší afinní podprostor, který obsahuje  $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ , se nazývá *součtem* a značí se  $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ .

<sup>2</sup>Dimenze nadroviny v  $\mathcal{A}$  je o 1 menší než dimenze  $\mathcal{A}$ .

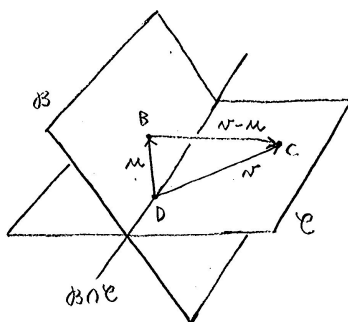


Obrázek 4.3: Průnik a součet afinních podprostorů:  $a \cap b = C$ ,  $C + D = b$ ,  $a + C = a$ ,  $a + D = \rho$ ,  $a + \rho = \rho$ ,  $a \cap \rho = a$ , ...

Pro zaměření součtu afinních podprostorů platí

$$\overrightarrow{\langle B + C \rangle} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} + \langle \overrightarrow{BC} \rangle, \quad (4.2)$$

kde  $B \in \mathcal{B}$  a  $C \in \mathcal{C}$  jsou libovolné body a součet na pravé straně je součtem vektorových podprostorů. Sčítanec  $\langle \overrightarrow{BC} \rangle$  v (4.2) nelze obecně vynechávat! V některých případech je však jistě nadbytečný, tj. v některých případech platí  $\overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$ . Pokud začneme zkoumat, kdy je tento sčítanec nadbytečný a kdy nikoli, zjistíme, že odpověď úzce souvisí s průnikem podprostorů, viz obr. 4.4:



Obrázek 4.4:  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \iff \overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$ .

**Věta.** Uvažme afinní podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq A$  a libovolné body  $B \in \mathcal{B}$  a  $C \in \mathcal{C}$ . Potom podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  mají **neprázdný** průnik právě tehdy, když vektor  $\overrightarrow{BC}$  patří do součtu zaměření  $\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$ .

*Důkaz.* Pokud je průnik neprázdný a  $D \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$  je nějaký společný bod, pak  $B = D + \mathbf{u}$  a  $C = D + \mathbf{v}$  pro nějaké vektory  $\mathbf{u} \in \overrightarrow{B}$  a  $\mathbf{v} \in \overrightarrow{C}$ . Odtud  $\overrightarrow{BC} = \mathbf{v} - \mathbf{u} \in \overrightarrow{C} + \overrightarrow{B}$ .

Naopak, je-li  $\overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$ , lze vektor  $\overrightarrow{BC}$  napsat jako  $\overrightarrow{BC} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$  pro nějaké  $\mathbf{u} \in \overrightarrow{B}$  a  $\mathbf{v} \in \overrightarrow{C}$ . Odtud plyne  $C - \mathbf{v} = B - \mathbf{u}$ , tzn. bod  $B - \mathbf{u} \in \mathcal{B}$  je roven bodu  $C - \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ , tudíž  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ .  $\square$

Definice součtu podprostorů je speciálním případem tzv. afinního obalu:

**Definice.** *Afinní obal* neprázdné podmnožiny  $M \subseteq \mathcal{A}$  je nejmenší afinní podprostor v  $\mathcal{A}$ , který obsahuje  $M$ .

Často se budeme odkazovat na body v tzv. obecné poloze — dva body v obecné poloze určují přímku, body tři body v obecné poloze určují rovinu apod. Jinak řečeno, afinním obalem dvou bodů v obecné poloze je přímka atd. Obecně:

**Definice.** O  $k$  bodech  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$  říkáme, že jsou v *obecné poloze*, pokud afinní obal množiny  $\{A_1, \dots, A_k\}$  má dimenzi  $k - 1$ , neboli vektory  $\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_k} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$  jsou lineárně nezávislé.



#### 4.4 Cvičení

Rozhodněte, zda následující podmnožiny jsou afinní podprostory; pokud nejsou, určete jejich afinní obaly:

- (1) nějaký interval v  $\mathbb{R}^1$ , dva body v  $\mathbb{R}^2$ , koloběžka v  $\mathbb{R}^3$ , dvě mimoběžné přímky v  $\mathbb{R}^4$ , sjednocení všech příček dvou mimoběžek v  $\mathbb{R}^4$  apod.,
- (2) všechna řešení rovnice  $x + y + z = 5$  v prostoru  $\{(x, y, z)\} = \mathbb{R}^3$ ,
- (3) celočíselná řešení rovnice  $x + y + z = 5$  (o třech neznámých) v prostoru všech jejích řešení,
- (4) všechna řešení diferenciální rovnice  $y'' - 4y' + 5y = 10$  v prostoru všech analytických funkcí,
- (5) konstantní řešení v prostoru všech řešení diferenciální rovnice  $y'' - 4y' + 5y = 10$ .

#### 4.5 Afinní zobrazení

Na tomto místě připomeneme geometrickou definici afinního zobrazení a najdeme její ekvivalentní algebraické vyjádření. K afinním (stejně jako ke všem později zmiňovaným) zobrazením se ještě vrátíme v kapitole V.

##### Úvod


Dobře známé (a v jistém smyslu základní) afinní zobrazení je osová afinita nebo rovnoběžné promítání. Obecná geometrická definice afinního zobrazení, kterou známe z konstrukční geometrie, vypadá takto:

**Definice.** Zobrazení mezi afinními prostory se nazývá *afinní*, pokud

- (a) zobrazuje kolineární body na kolineární body,
- (b) zachovává rovnoběžnost přímek,
- (c) zachovává dělicí poměry trojic bodů na přímce.

Bijektivní afinní zobrazení se jmenuje *afinita*.

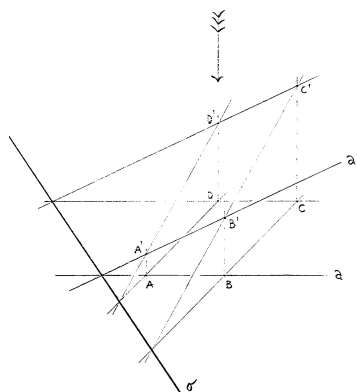
Kolineární body jsou body, které leží na jedné přímce, tedy také body splývající. Podmínka (b), resp. (c) tedy má smysl pouze v případě, kdy se různé kolineární body nezobrazí do jednoho bodu. Z (a) a (c) plyne, že afinní zobrazení zobrazuje přímky na přímky, resp. na body (tedy nikoli např. na úsečky či jiné části přímek).

Uvedené podmínky nejsou úplně nezávislé — pro zobrazení afinního prostoru dimenze aspoň 2 platí, že za předpokladu (a) jsou podmínky (b) a (c) ekvivalentní. Pro afinní zobrazení mezi  prostory dimenze 1 je podmínka (a), resp. (b) splněna automaticky, resp. triviálně — afinní zobrazení jsou v takových případech zcela charakterizovány podmínkou (c).

Uvědomte si, že všechny pojmy zmiňované v definici jsou srozumitelné v jakémkoli afinním prostoru  $\mathcal{A}$ :

- (a) *přímka* je jednorozměrný afinní podprostor v  $\mathcal{A}$ ,  
 (b) přímky jsou *rovnoběžné*, pokud jejich zaměření splývají,  
 (c) *dělicí poměr* trojice různých kolineárních bodů  $(A, B, C)$  (v tomto pořadí) je reálné číslo  $d$  takové, že platí  $\overrightarrow{AC} = d \cdot \overrightarrow{BC}$ , což většinou zapisujeme symbolicky jako

$$d = (ABC) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}. \quad (4.3)$$



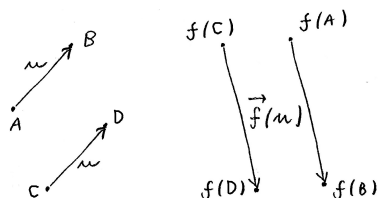
Obrázek 4.5: Osová afinita.

### Algebraická definice afinního zobrazení

Nyní chceme sloučit naše dosavadní představy s abstraktními definicemi z odst. 4.1. V každém konkrétním příkladě afinního zobrazení  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ , který známe, si můžeme povšimnout, že  $f$  indukuje zobrazení mezi zaměřeními  $\vec{f} : \vec{\mathcal{A}} \rightarrow \vec{\mathcal{A}'}$ , a to tak, že obraz vektoru  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  je určen obrazy bodů  $A$  a  $B$ :

$$\vec{f}(\mathbf{u}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}.$$

Uvědomte si, že vektor  $\mathbf{u}$  může být reprezentován nekonečně mnoha dvojicemi bodů  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \dots$ . To, že je tímto předpisem vůbec definováno zobrazení, je přímým důsledkem vlastností (a)–(c) z definice 4.5. Odtud také plyne, že indukované zobrazení  $\vec{f}$  není jen tak ledajaké, ale je **lineární**. Právě tato pozorování vysvětlují, proč je následující definice ekvivalentní s definicí 4.5.



Obrázek 4.6: Afinní zobrazení indukuje lineární zobrazení mezi zaměřenými.

**Definice** (ekvivalentní). Zobrazení mezi afinními prostory  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  se nazývá *afinní*, pokud existuje **lineární** zobrazení mezi zaměřenými  $\vec{f} : \vec{\mathcal{A}} \rightarrow \vec{\mathcal{A}'}$  tak, že pro libovolné body  $A, B \in \mathcal{A}$  platí

$$\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}. \quad (4.4)$$

Jako je lineární zobrazení homomorfismem vektorových prostorů, je afinní zobrazení homomorfismem afinních prostorů. Afinní zobrazení je tedy zobrazení mezi afinními prostory, které zachovává afinní strukturu. Uvedená definice pouze vysvětluje, co to přesně znamená. . .

$$\begin{array}{ccc} a \times a & \xrightarrow{f \times f} & a' \times a' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vec{a} & \xrightarrow{\vec{f}} & \vec{a}' \end{array}$$

Obrázek 4.7: Zobrazení  $f$  je afinní, pokud  $\vec{f}$  existuje, je lineární a diagram komutuje.

Afinní zobrazení  $f$  jednoznačně určuje lineární zobrazení  $\vec{f}$ , avšak tato korespondence není vzájemně jednoznačná — stačí si uvědomit, že indukované lineární zobrazení ke každému posunutí

$$A \mapsto A + \mathbf{u}$$

☞ je identické zobrazení. Obecněji dvě afinní zobrazení indukují jedno a to samé lineární zobrazení právě tehdy, když se liší o nějaké posunutí. Afinní zobrazení  $f$  je tedy zcela určeno indukovaným lineárním zobrazením  $\vec{f}$  a obrazem jednoho (libovolného) bodu. Pokud takový bod označíme např.  $A$ , potom obraz libovolného bodu  $B \in \mathcal{A}$  je určen právě rovností (4.4), neboli:


$$f(B) = \vec{f}(\overrightarrow{AB}) + f(A). \quad (4.5)$$

Analytickému vyjádření afinních (a dalších) zobrazení se věnujeme v samostatné podkap. 15. Tato vyjádření závisí na volbě souřadné soustavy, o čemž si něco řekneme v odst. 5.1. . .

Protože lineární zobrazení  $n$ -rozměrného vektorového prostoru je určeno obrazem nějaké báze, tj. obrazy  $n$  lineárně nezávislých vektorů, vidíme, že obecně platí:

**Věta** (o určenosti afinního zobrazení). *Afinní zobrazení afinního prostoru dimenze  $n$  je určeno obrazy  $n + 1$  bodů v obecné poloze.*

### Afinní invarianty a základní věta afinní geometrie

V Kleinově duchu je afinní geometrie studiem vlastností, které jsou invariantní vůči afinním zobrazením. V definici 4.5 jsme vyjmenovali tři základní invarianty; na tomto místě můžeme doplnit jeden další, jehož zdůvodnění plyne přímo z definicí a ekvivalentních algebraických reformulací: 

*Vzor a obraz afinního podprostoru vzhledem k afinnímu zobrazení jsou afinní podprostory.*

V následujícím textu budeme postupně potkávat další afinní invarianty, na které budeme průběžně upozorňovat. Automaticky mezi ně patří všechny pojmy, které je možné definovat v obecném afinním prostoru, tzn. že k jejich vymezení není nutné mluvit o vzdálenostech bodů apod., i když to je možné a někdy dokonce výhodné. Typickou ukázkou je pojem úsečky a další odvozené věci, viz odst. 7.4. . .

Výše jsme si uvědomili, že základní afinní invarianty z definice 4.5 nejsou úplně nezávislé. Ve skutečnosti jsou navzájem svázány víc, než by jeden čekal:

**Věta** (Základní věta afinní geometrie). *Každé **bijektivní** zobrazení mezi afinními prostory dimenze alespoň 2, které zobrazuje přímky na přímky, je afinní.*

Toto je skutečně zajímavý výsledek, jehož důkaz rozhodně není triviální; hlavní myšlenky jsou představeny např. v [Be, část 2.6]. Obsah tvrzení, a tedy i jeho důkaz, je velmi podobný tomu ve větě 14.2 na str. 93. . .

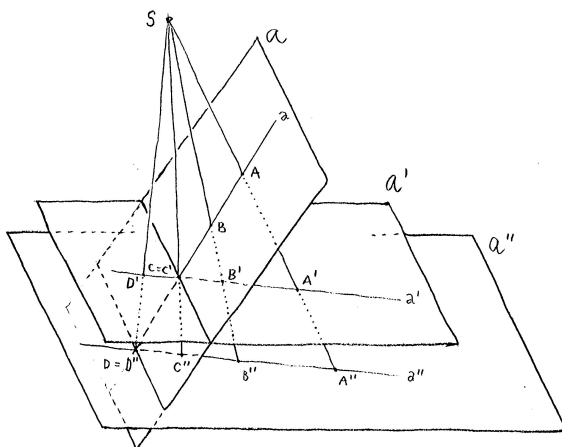
Všimněte si, že o zobrazení nepředpokládáme žádnou spojitost ani nic podobného. Podstatná je právě a jenom jeho bijektivnost. Jinými slovy, bijektivní zobrazení splňující (a) v definici 4.5 splňuje také (b) a (c).

### 4.6 Cvičení

(1) Rozhodněte, zda následující zobrazení jsou afinní:

- středové promítání mezi rovinami  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{A}'$ , příp.  $\mathcal{A}'$  a  $\mathcal{A}''$  naznačenými na obr. 4.8,
- kruhová inverze, stejnoolehlost, příp. osová kolineace v rovině,
- transformace afinní přímky  $\mathcal{A} = \mathbb{R}$  zadaná předpisem  $f(x) = x^n + 1$ , kde  $n = 0, 1, 2, \dots$

(2) Vzpomeňte si na konstrukční zdůvodnění věty 4.5 na str. 19.



Obrázek 4.8: Středové promítání mezi rovinami.

## 5 Afinní souřadnice a vyjádření afinních podprostorů

### 5.1 Afinní repér a afinní souřadnice

Souřadnicové vyjádření bodu v afinním prostoru je relativní — závisí na souřadné soustavě. Obvyklou souřadnou soustavu v afinním prostoru je tzv. afinní souřadná soustava, jež je určena souřadnými osami a „jednotkami“ na osách. Společný bod souřadných os je tzv. počátek a „jednotkové“ vektory na osách tvoří bázi  $\vec{A}$ . Afinní souřadná soustava je určena tzv. afinním repérem a naopak:

**Definice.** *Afinní repér* v afinním prostoru  $\mathcal{A}$  je určen *počátkem*  $O \in \mathcal{A}$  a bází  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  zaměření  $\vec{A}$ . *Souřadné osy* jsou přímky  $x_i = O + \langle \mathbf{e}_i \rangle$ .

*Afinní souřadnice bodu*  $A$  vzhledem k afinnímu repéru  $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  jsou právě souřadnice vektoru  $\mathbf{u} = \vec{OA}$  v bázi  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$ .

Souřadnice bodu  $A$  v uvedeném repéru obvykle píšeme

$$A = [a_1, a_2, \dots];$$

podle definice  $a_i$  jsou taková jednoznačně určená reálná čísla, že platí

$$A = O + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \dots$$

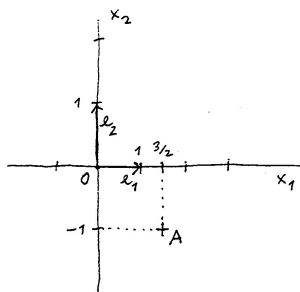
Pokud potřebujeme rozlišovat mezi body (prvky  $\mathcal{A}$ ) a souřadnicemi (prvky  $\mathbb{R}^n$ ), budeme tyto rozlišovat tloušťkou písma. Uvědomte si, že pro libovolný afinní repér v  $\mathcal{A}$ , je přiřazením

$$\text{bod } A \mapsto \mathbf{A} = \text{souřadnice bodu } A \text{ vzhledem k danému repéru}$$

definováno **bijektivní** afinní zobrazení mezi afinním prostorem  $\mathcal{A}$  a standardním afinním prostorem  $\mathbb{R}^n$ . Platí tedy:



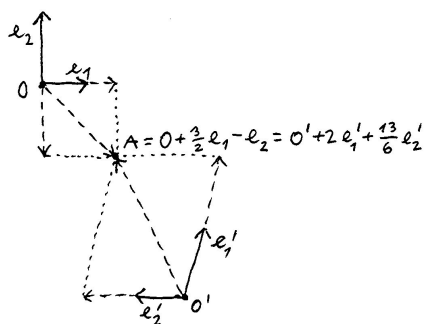
Všechny afinní prostory stejné dimenze jsou navzájem **izomorfní** (nikoli však kanonicky).



Obrázek 5.9: Souřadnice vzhledem k afinnímu repéru  $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ :  $A = [\frac{3}{2}, -1] \iff A = O + \frac{3}{2}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ .

### Přechod mezi souřadnými systémy

Jeden bod může (ale nemusí) mít v různých afinních repérech různé souřadnice. Pokud známe souřadnicové vyjádření bodu  $A$  vzhledem k jednomu repéru a současně známe vyjádření tohoto repéru vzhledem k jinému repéru, pak by mělo být jednoduchým cvičením vyjádřit souřadnice bodu  $A$  vzhledem k onomu jinému repéru. Konkrétní příklad tohoto přechodu je na obr. 5.10.



Obrázek 5.10: Přechod mezi dvěma afinními repéry:  $A = O + \frac{3}{2}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$  a současně  $O = O' + 3\mathbf{e}'_1 + 4\mathbf{e}'_2$ ,  $\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}'_2$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}'_2$ . Odtud po dosazení plyne  $A = O' + 2\mathbf{e}'_1 + \frac{13}{6}\mathbf{e}'_2$ .

Zobecnění těchto pozorování je následující:



**Věta.** Uvažme dva afinní repéry  $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  a  $(O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots)$  v  $\mathcal{A}$ . Souřadnice libovolného bodu  $A \in \mathcal{A}$  vzhledem k prvnímu repéru označíme  $[a_1, a_2, \dots] = \mathbf{A}$ , vzhledem ke druhému  $[a'_1, a'_2, \dots] = \mathbf{A}'$ . Souřadnice  $O$  vzhledem k druhému repéru označíme  $[q_1, q_2, \dots] = \mathbf{Q}$  a matici přechodu od báze  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  k bázi  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots)$  označíme  $\mathbf{P}$ . Potom platí, že

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{A},$$

neboli

$$\begin{aligned} a'_1 &= q_1 + p_{11}a_1 + p_{12}a_2 + \dots, \\ a'_2 &= q_2 + p_{21}a_1 + p_{22}a_2 + \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

kde  $p_{ij}$  je koeficient v matici  $\mathbf{P}$  na  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci.



## 5.2 Cvičení

V jisté afinní souřadné soustavě na mapě jistého města jsou jistá význačná místa určena souřadnicemi  $A = [1, -1]$ ,  $B = [1, 1]$ ,  $C = [3, 0]$ ,  $D = [5, 2]$ ,  $E = [4, 4]$ . Jistí dva kolegové sledují dění ve městě tak, že kolega K. zaznamenává údaje vzhledem k souřadné soustavě s počátkem v místě  $A$ , kde má základnu, a bází  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ; kolega L. pracuje se souřadnou soustavou s počátkem v  $D$  a bází  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE})$ . Přesně v poledne začíná K. zaznamenávat rovnoměrný přímočarý pohyb podezřelé tramvaje a jeho zápis (v závislosti na čase  $t$ ) vypadá takto:

$$\left[ \frac{5}{4} + \frac{1}{4}t, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \right].$$

V tomtéž čase také L. zaznamenává pohyb tramvaje jako:

$$\left[ 1 - \frac{1}{4}t, 1 - \frac{1}{4}t \right].$$

Rozhodněte, zda oba kolegové pozorují tutéž tramvaj a zda je náhodou tramvaj neohrožuje.

## 5.3 Parametrické vyjádření podprostoru

Dráha tramvaje v předchozím cvičení je parametrizována parametrem  $t \in \mathbb{R}$ . Obecněji, přímku  $p = K + L$  určenou dvěma body v obecném afinním prostoru můžeme podle (4.1) zapsat jako

$$p = K + \langle \overrightarrow{KL} \rangle = \{K + t\overrightarrow{KL} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

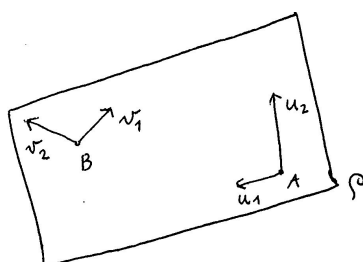
Ještě obecněji, afinní podprostor  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  určený bodem  $B$  a zaměřením  $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \rangle$  je parametrizován následovně:

$$\mathcal{B} = B + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \rangle = \{B + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \dots \mid t_1, t_2, \dots \in \mathbb{R}\}.$$

Bod  $X \in \mathcal{A}$  leží v podprostoru  $\mathcal{B}$  právě tehdy, když

$$X = B + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \dots \tag{5.6}$$

pro nějaká reálná čísla  $t_1, t_2, \dots$ . Toto je tzv. *parametrické vyjádření* podprostoru  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ . Obvykle, nikoli však samozřejmě, jsou vektory  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$  lineárně nezávislé. Je jasné, že jeden a týž podprostor může být parametrizován tisícerým způsobem.

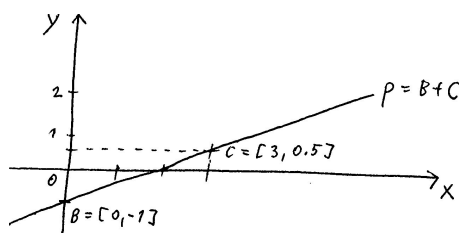


Obrázek 5.11: Dvojitě vyjádření téže roviny:  $\rho = A + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = B + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ .

#### 5.4 Vyjádření podprostoru rovnicemi

Každý si umí poradit s vyjádřením přímky v rovině, roviny v prostoru apod. Chceme zjistit, jak je to s rovnicovým vyjádřením obecného afinního podprostoru v obecném afinním prostoru — myšleno vzhledem k nějakému vybranému afinnímu repéru.

Už v příkladu 4.2(2) jsme si uvědomili, že pokud má soustava lineárních rovnic řešení, pak tato řešení tvoří afinní prostor, jehož dimenze závisí na počtu (nezávislých) rovnic a počtu neznámých. Máme-li soustavu s  $n$  neznámými, řešení soustavy jsou uspořádané  $n$ -tice čísel a prostor všech řešení je podprostorem v afinním prostoru všech možných uspořádaných  $n$ -tic, tj. ve standardním  $\mathbb{R}^n$ . Nyní se ujistíme, že každý afinní podprostor lze vyjádřit tímto způsobem. Nejprve představíme rychlé a abstraktní řešení tohoto problému, konkrétní návody najdete v odst. 5.5 a ve cvičení.



Obrázek 5.12: Přímka  $p$  má vzhledem k naznačené souřadné soustavě parametrické vyjádření  $[3t, -1 + 1.5t]$  a obecnou rovnicí  $x - 2y = 2$ .

Uvažujme libovolný afinní podprostor  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ , určený bodem  $B$  a zaměřením  $U = \vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{A}}$ ,

$$\mathcal{B} = B + U.$$

Z lineární algebry víme, že souřadnice vektorů patřících do libovolného vektorového podprostoru  $U$  tvoří řešení nějaké soustavy **homogenních** lineárních rovnic: ◀

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

kde matice soustavy  $\mathbf{M}$  je typu  $r \times n$ , přičemž  $r$  je počet rovnic a  $n = \dim \mathcal{A}$  je počet neznámých.

Máme-li takto vyjádřeno zaměření  $U = \vec{\mathcal{B}}$ , potom *rovnicové* (příp. *obecné* nebo *neparametrické*) *vyjádření* podprostoru  $\mathcal{B}$  vypadá následovně:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n}\},$$

kde sloupec  $\mathbf{n}$  dostaneme dosazením souřadnic libovolného bodu  $B \in \mathcal{B}$ , tj.

$$\mathbf{n} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}.$$

Tak máme garantováno, že  $B$  je řešením této soustavy, a proto taky každý jiný bod  $B + \mathbf{u} \in B + U = \mathcal{B}$  je jejím řešením. Tato soustava rozepsaná podrobněji vypadá nějak takto

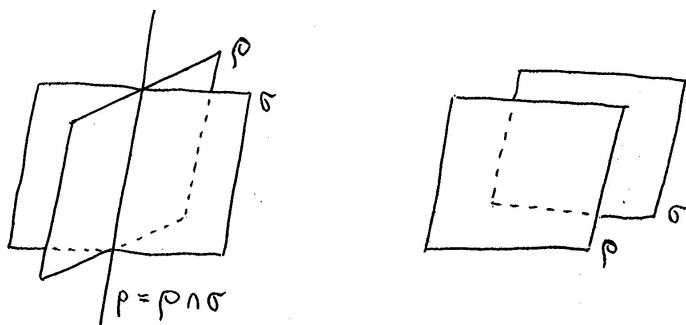
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} m_{11}x_1 + \cdots + m_{1n}x_n = n_1 \\ \vdots \\ m_{r1}x_1 + \cdots + m_{rn}x_n = n_r \end{array} \right\}, \quad (5.7)$$

kde  $m_{ij}$  jsou koeficienty v matici  $\mathbf{M}$ .

Je jasné, že jeden a týž podprostor může být vyjádřen mnoha různými (vždy však ekvivalentními) soustavami rovnic. Obvykle, nikoli však samozřejmě, jsou rovnice lineárně nezávislé. V takovém případě potřebujeme k explicitnímu vyjádření všech řešení soustavy  $n - r$  volných parametrů, tzn.  $\dim \mathcal{B} = n - r$ . Celkem tak dostáváme následující tvrzení:

**Věta.** Podmnožina  $\mathcal{B}$  v afinním podprostoru  $\mathcal{A}$  dimenze  $n$  je afinním podprostorem dimenze  $k$  právě tehdy, když souřadnice všech bodů patřících do  $\mathcal{B}$  tvoří množinu všech řešení nějaké soustavy  $n - k$  lineárně nezávislých lineárních rovnic o  $n$  neznámých.

Speciálně, k vyjádření bodu je potřeba  $n$  nezávislých rovnic a jednou rovnicí je popsána nadrovina. Podprostor dimenze  $k$  lze vždy chápat jako průnik  $n - k$  nadrovin...



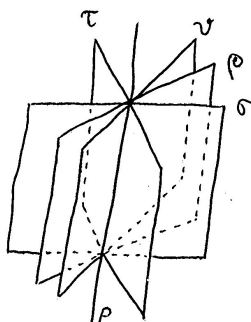
Obrázek 5.13: Afinní podprostor dimenze  $k$  je průnikem  $n - k$  nadrovin (avšak průnikem  $n - k$  nadrovin nemusí být podprostor dimenze  $k$ ).

## 5.5 Jak určit rovnicové vyjádření z parametrického?

V celém tomto odstavci uvažujeme afinní podprostor  $\mathcal{B}$  dimenze  $k$  v prostoru dimenze  $n$  s parametrickým vyjádřením (5.6). Hledáme  $n - k$  nezávislých rovnic, jejichž prostor řešení by odpovídal právě  $\mathcal{B}$ . Nejrychlejší je samozřejmě výsledek uhodnout:

- (1) Rozepíšeme po složkách parametrické vyjádření  $\mathcal{B}$  a pídíme se po takové lineární kombinaci neznámých  $x_1, x_2, \dots$ , která by **současně** eliminovala všechny parametry  $t_1, t_2, \dots$ . Výsledkem takové kombinace je nějaká konstanta — a máme první rovnici.

Tento krok potřebujeme opakovat  $(n - k)$ -krát, ovšem nezávisle na předchozích krocích!



Obrázek 5.14: Několikeré vyjádření téže přímky:  $p = \rho \cap \sigma = \rho \cap \tau = \tau \cap \nu \dots$


Uvedený postup se dá považovat za použitelný pouze pro málorozměrné podprostory, zejména pro přímky (eliminovat jeden parametr  $n - 1$  nezávislymi způsoby je vždy možné a snadné). V obecnějších případech si můžeme všimnout, že každá nula v souřadnicovém vyjádření (5.7) pomáhá.

Takové užitečné nuly si však umíme podle potřeby vyrobit. Univerzálním a systematickým návodem, jak si za každých okolností poradit, je **Gaussova eliminační metoda**:

- (2) Rozepíšeme po složkách parametrické vyjádření  $\mathcal{B}$  a elementárními řádkovými úpravami postupně eliminujeme parametry  $t_1, t_2, \dots$ , dokud nedosáhneme schodovitého tvaru. Na levé straně nám postupně vznikají lineární kombinace  $x_1, x_2, \dots$ . Všechny řádky neobsahující žádný z parametrů  $t_i$  jsou hledané rovnice, a ty jsou přirozeně nezávislé.

Parametrické vyjádření (5.6) podprostoru  $\mathcal{B}$ , můžeme psát také jako

$$\overrightarrow{BX} = t_1 \mathbf{u}_1 + \dots + t_k \mathbf{u}_k,$$

kde předpokládáme, že směrové vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  jsou lineárně **nezávislé**. To, že bod  $X$  patří do podprostoru  $\mathcal{B}$  lze potom vyjádřit mnoha různými — navzájem ekvivalentními — způsoby: 

- Bod  $X$  patří do  $\mathcal{B}$   $\iff$
- vektor  $\overrightarrow{BX}$  je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$   $\iff$
- vektory  $\overrightarrow{BX}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  jsou lineárně závislé  $\iff$
- mezi vektory  $\overrightarrow{BX}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  je právě  $k$  nezávislých  $\iff$
- hodnota matice tvořené souřadnicemi vektorů  $\overrightarrow{BX}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  vzhledem k nějaké (libovolné) bázi je právě  $k$   $\iff$
- všechny subdeterminanty řádu  $k + 1$  vybrané z této matice jsou nulové.

Poslední z předchozích ekvivalencí motivuje následující návod:

- (3) Vytvoříme po sloupcích matici ze souřadnic vektorů  $\overrightarrow{BX}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  (matice má  $n$  řádků a  $k + 1$  sloupců a neznámé se objevují jenom v prvním sloupci). Z této matice vybíráme

submatice řádu  $k + 1$ , spočítáme jejich determinanty a tyto položíme rovny 0. Dostáváme soustavu lineárních rovnic, z nichž podle libosti vybereme  $n - k$  nezávislých.

Tento postup je vhodný hlavně v případech podprostorů malé kodimenze. Zejména, je-li  $\mathcal{B}$  nadrovinou, tj.  $k = n - 1$ , je matice zmiňovaná v (3) čtvercová řádu  $n = k + 1$ . Rovnice nadroviny je tedy určena determinantem celé této matice.

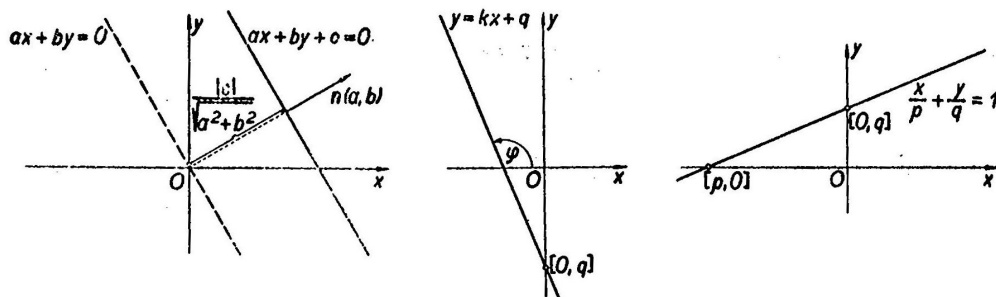
Předchozí myšlenky lze realizovat různými způsoby, což může vést k dalším, zdánlivě novým, metodám. Např. v (2) můžeme pracovat s maticí stejně jako v (3) a nepřepisovat neustále parametry  $t_1, t_2, \dots$ . Pokud někde narazíte na jiné návody, nejprve se zamyslete, zda se nejedná jen o jiný zápis některého z výše uvedených.

## 5.6 Různá další vyjádření

Často lze potkat vyjádření afinních podprostorů, jež vypadají odlišně od výše uvedených. Ať už vypadají jakkoli, vždy jsou ekvivalentní některému z dříve diskutovaných popisů. Různá vyjádření mají různé výhody, pro představu uvádíme běžně používaná rovnicová vyjádření přímky v rovině (viz obr. 5.15):

- obecná rovnice:  $ax + by + c = 0$ ,
- směrnicová rovnice:  $y = kx + q$ ,
- úseková rovnice:  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ .

⇒ Směrnicovou ani úsekovou rovnicí nelze popsat všechny přímky v rovině; konkretizujte tato omezení. Uvedená vyjádření a jejich interpretace mají zřejmé analogie pro roviny v prostoru, příp. nadroviny v prostoru obecné dimenze...



Obrázek 5.15: [Rek] Interpretace konstant z různých rovnicových vyjádření přímky v rovině; ke druhému obrázku je třeba doplnit  $k = \tan \varphi$ .

## 5.7 Cvičení

- (1) Vzhledem k nějakému afinnímu repéru v nějakém trojrozměrném afinním prostoru jsou dány body:

$$A = [1, 1, 0], \quad B = [4, 1, 3], \quad C = [1, 0, 1].$$

Určete dimenzi a rovnicové vyjádření afinního obalu množiny  $\{A\}$ ,  $\{A, B\}$ , resp.  $\{A, B, C\}$ .

- (2) Je dáno parametrické vyjádření afinního podprostoru  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^4$ :

$$x_1 = 3t_1 - 5t_2 - 2t_3, \quad x_2 = 1 + t_2 + t_3, \quad x_3 = 4 - t_1 + t_2, \quad x_4 = 5,$$

kde  $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ . Určete dimenzi  $\mathcal{B}$  a najděte nějaké jiné parametrické vyjádření tohoto podprostoru. Dále ukažte, že soustavou lineárních rovnic

$$\{x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \quad x_4 = 0\}$$

je popsáno zaměření  $\vec{\mathcal{B}}$  a najděte aspoň tři různá rovnicová vyjádření podprostoru  $\mathcal{B}$ .

- (3) Vyzkoušejte všechny návody určení rovnicového vyjádření, jež jsou uvedeny v odst. 5.5, např. na podprostorech z předchozích úloh. Porovnejte výsledná vyjádření.
- (4) Všimněte si, že nikde neklademe otázku

„Jak najít parametrické vyjádření z rovnicového?“

Zformulujte nějakou vlastní odpověď a doplňte vhodný příklad.

- (5) Ukažte, že přímka v prostoru obecné dimenze procházející body  $A = [a_1, a_2, \dots]$  a  $B = [b_1, b_2, \dots]$  má rovnicové vyjádření

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \dots$$

## 6 Vzájemné polohy podprostorů a některé polohové úlohy

Před tím, než se začneme zabývat vzájemnými polohami afinních podprostorů, zformulujeme několik jednoduchých, ale užitečných tvrzení, na která se budeme opakovaně odkazovat.

### 6.1 Pomocná tvrzení

- (1) Jak pro afinní podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ , tak pro jejich zaměření  $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{A}}$ , přímo s definicí vyplývá, že:

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \iff \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{B} \iff \mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathcal{C}, \quad \text{resp.} \quad \vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}} \iff \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} \iff \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{C}}.$$

- (2) V odst. 4.3 jsme si uvědomili, že platí

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \implies \vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}, \quad \text{ale nikoli obráceně.}$$

- (3) V tomtéž odstavci jsme diskutovali zaměření průniku, resp. součtu afinních podprostorů, a to s následujícím závěrem:

$$\overline{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}, \quad \text{resp.} \quad \overline{\mathcal{B} + \mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} + \langle \overline{\mathcal{B}\mathcal{C}} \rangle.$$

- (4) Poté jsme ukázali, že algebraická charakterizace průniku afinních podprostorů vypadá takto:

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \iff \overline{\mathcal{B}\mathcal{C}} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}.$$

- (5) Z lineární algebry připomínáme, že dimenze průniku a součtu vektorových podprostorů jsou spolu úzce svázány, a to následujícím způsobem:

$$\dim(\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}) + \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}) = \dim \vec{\mathcal{B}} + \dim \vec{\mathcal{C}}. \quad (6.8)$$



## 6.2 Vzájemné polohy afinních podprostorů

Incidence a různoběžnost jsou množinové pojmy, afinní strukturu potřebujeme zejména k pojmu **rovnoběžnosti**. První postřehy k obecné definici rovnoběžnosti jsme měli již v odst. 4.3.

**Definice.** Afinní podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v afinním prostoru  $\mathcal{A}$  jsou:

- *incidentní*, pokud jeden je podmnožinou druhého, tj.  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$  nebo  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ ,
- *různoběžné*, pokud nejsou incidentní a mají neprázdný průnik,
- *rovnoběžné*, pokud nejsou incidentní a jejich zaměření incidentní jsou, tj.  $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}$  nebo  $\vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{B}}$ ,
- *mimoběžné*, pokud nejsou incidentní, ani různoběžné, ani rovnoběžné.

Takto definované pojmy jsou zcela komplementární. V definici rovnoběžnosti není nutno vylučovat různoběžnost: pokud by podprostory s incidentními zaměřeními měly neprázdný průnik, pak by nutně byly samy incidentní.<sup>3</sup>

Mimoběžné podprostory, jejichž zaměření mají netriviální průnik, se někdy nazývají *částečně rovnoběžné*. V afinních prostorech dimenze  $\leq 3$  částečně rovnoběžné prostory nejsou.

Jako obvykle, s každým zobecněním se objevují jisté podivnosti. Přímo z definice např. plyne, že libovolný bod (triviální podprostor dimenze 0) je rovnoběžný s libovolným jiným podprostorem, který jej neobsahuje. Tento poznatek nás zpravidla příliš vzrušovat nebude, ale měli bychom si ho být dobře vědomi.

Vzájemná poloha afinních podprostorů „nezávisí“ na okolním prostoru  $\mathcal{A}$ . Tím myslíme, že pokud jsou podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$  v nějaké vzájemné poloze a  $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$  je libovolný nadprostor, potom je vzájemná poloha podprostorů  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}'$  tatáž. Trošičku obecněji můžeme prohlásit:

*Vzájemná poloha afinních podprostorů se nemění při injektivních afinních zobrazeních.*

### Další obecná pozorování

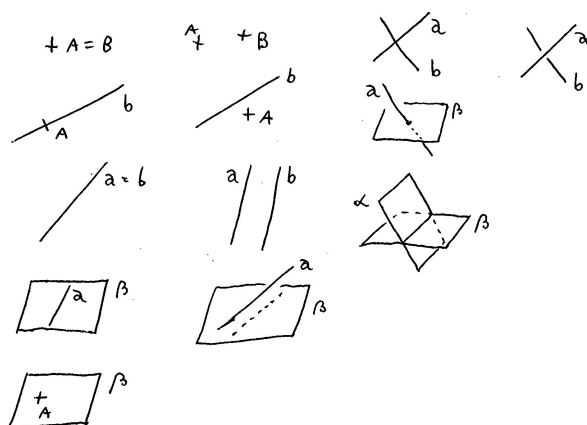
Mimoběžné podprostory v afinním prostoru dimenze  $\leq 2$  nejsou; v trojrozměrném prostoru to mohou být jediné přímky, tedy podprostory kodimenze 2. Toto pozorování je zobecněno v části (2) následující věty.

Odtud plyne, že nadroviny v obecném afinním prostoru nejsou nikdy mimoběžné s žádným jiným podprostorem. Pokud jsou zrovna různoběžné, okamžitě víme, jaká musí být dimenze průniku, viz část (3).

Do série ještě zařazujeme poznatek (1); afinní podprostory, jejichž zaměření jsou komplementární nazýváme taky *komplementární*, příp. říkáme, že jeden je *doplňkem* druhého.

<sup>3</sup>V některých zdrojích je incidence uvažována jako speciální případ rovnoběžnosti; naše vymezení je pak jmenováno „rovnoběžné různé“.





Obrázek 6.16: Vzájemné polohy afinních podprostorů.

**Věta.** Pro libovolné afinní podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$  platí:

- (1) Pokud jsou vektorové podprostory  $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{A}}$  **komplementární**, pak  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  se protínají v bodě.
- (2) Pokud jsou podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  **mimoběžné**, pak každý z nich má dimenzi menší nebo rovnou  $\dim \mathcal{A} - 2$  (a větší nebo rovnou 1).
- (3) Pokud je  $\mathcal{C}$  **nadrovina** a  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  jsou různoběžné, pak  $\dim(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = \dim \mathcal{B} - 1$ .

Všechna tři tvrzení plynou přímo z definic, rovnosti (6.8) a věty 4.3 — najděte si nějaká jejich zdůvodnění...<sup>4</sup>



### 6.3 Jak určit vzájemnou polohu podprostorů?

Optimální odpověď závisí na konkrétním zadání úlohy. Nejpřirozenější je asi rovnou začít s hledáním společných bodů, resp. směrů daných podprostorů, tzn. s vyjádřením průniku, resp. průniku zaměření. Odtud lze vždy rozhodnout, jaká je jejich vzájemná poloha. Dále si všimneme, že k určení vzájemné polohy stačí znát pouze **dimenze** vhodných podprostorů a nikoli podprostory jako takové. Pro úplnost ještě doplníme charakterizaci pomocí součtů.

#### Průnik

Vzájemnou polohu podprostorů  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$  je vždy možné jednoznačně určit podle jejich průniku  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$  a průniku zaměření  $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$  (uvědomte si, že pokud  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ , pak např.  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$  je ekvivalentní s  $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}$ ):

- $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ :
  - $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = (\vec{\mathcal{B}} \text{ nebo } \vec{\mathcal{C}}) \iff$  incidentní,

<sup>4</sup>Viz např. str. 141 pro inspiraci.

–  $\vec{B} \cap \vec{C} \neq \vec{B}$  ani  $\vec{C} \iff$  různoběžné,

•  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ :

–  $\vec{B} \cap \vec{C} = \vec{B}$  nebo  $\vec{C} \iff$  rovnoběžné,

–  $\vec{B} \cap \vec{C} \neq \vec{B}$  ani  $\vec{C} \iff$  mimoběžné.

Bez ohledu na způsob vyjádření daných podprostorů (parametricky/rovnícemi) většinou potřebujeme k určení jejich průniku, resp. průniku jejich zaměření, řešit soustavu lineárních rovnic. Po obvyklých úpravách (myslíme ekvivalentní úpravy vedoucí ke schodovitému tvaru) postupně pozorujeme:

- (1) zda je soustava řešitelná nebo ne (tj. zda je průnik neprázdný nebo prázdný),
- (2) pokud je řešitelná, tak podle počtu nezávislých rovnic a počtu neznámých usuzujeme, kolik budeme potřebovat volných parametrů k explicitnímu vyjádření řešení (tj. jaká bude dimenze průniku),
- (3) pokud je soustava řešitelná, tak ji dořešíme a vyjádříme řešení (tj. popíšeme explicitně průnik).

Uvědomte si, že počítání průniku  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$  a průniku zaměření  $\vec{B} \cap \vec{C}$  lze vždy realizovat **současně**: máme-li soustavu lineárních rovnic odpovídající  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ , pak soustava popisující  $\vec{B} \cap \vec{C}$  je právě předchozí soustava, akorát homogenizovaná (tzn. na pravé straně jsou nuly)!

Z uvedeného je také patrné, že k určení vzájemné polohy podprostorů úplně stačí absolvovat krok (2), kdy známe dimenzi průniku, resp. průniku zaměření. Krok (3) je nutné dopočítat v případě, že nás kromě vzájemné polohy zajímají také společné body/směry daných podprostorů.

### Součet

Vzhledem k úvodním rozbahám může být předchozí charakterizace vzájemných poloh podprostorů přepsána také následovně:

•  $\overrightarrow{BC} \in \vec{B} + \vec{C}$ :

–  $\vec{B} + \vec{C} = \vec{C}$  nebo  $\vec{B} \iff$  incidentní,

–  $\vec{B} + \vec{C} \neq \vec{C}$  ani  $\vec{B} \iff$  různoběžné,

•  $\overrightarrow{BC} \notin \vec{B} + \vec{C}$ :

–  $\vec{B} + \vec{C} = \vec{C}$  nebo  $\vec{B} \iff$  rovnoběžné,

–  $\vec{B} + \vec{C} \neq \vec{C}$  ani  $\vec{B} \iff$  mimoběžné.

Odtud plyne následující způsob určení vzájemné polohy podprostorů, který je vhodný asi hlavně v případě, kdy jsou oba podprostory zadány parametricky:

$$\mathcal{B} = B + \langle \mathbf{u}_1, \dots \rangle \quad \text{a} \quad \mathcal{C} = C + \langle \mathbf{v}_1, \dots \rangle.$$

Sestavíme matici ze souřadnic generujících vektorů  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{v}_1, \dots$ , kterou ještě rozšíříme o vektor  $\overrightarrow{BC}$ . Po obvyklých úpravách — při kterých ovšem **nesmíme** míchat se sloupcem/řádkem, který původně obsahoval  $\overrightarrow{BC}$  — postupně určíme:

- (1) jaká je hodnota matice sestavené z generujících vektorů (tj. jaká je dimenze součtu  $\vec{B} + \vec{C}$ ),
- (2) zda je hodnota matice rozšířené stejná nebo větší (tj. zda se affinní podprostory protínají či nikoli).

### Poznámky

Uvědomte si, že právě uvedený návod je pouze jinou interpretací návodu předchozího: Matice, se kterou tady pracujeme, je (až na formu zápisu a nějaká znaménka) totožná s maticí soustavy pro počítání průniku, již jsme zmiňovali výše. Přitom pojem hodnoty matice nezávisí na tom, zda matici čteme po sloupcích nebo po řádcích! Navíc, porovnáme-li krok (2) u tohoto návodu z krokem (1) návodu předchozího, nemůžeme si nevzpomenout na **Frobeniovu větu** o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic. Tato naše pozorování představují alternativní (souřadnicový) důkaz věty 4.3.

Na rozdíl od předchozího návodu, nemusí být na první pohled patrné, jaké jsou společné body/směry daných podprostorů. Tyto lze sice vždycky z jednotlivých úprav zrekonstruovat, ale nemusí se jednat o nejpříjemnější počítání. V případě, že se ptáme na společné body/směry, je proto asi vhodnější rovnou začít počítat průniky.

### Závěr

V obou uvedených metodách jsme si všimli, že k určení vzájemné polohy nám stačí pracovat toliko s dimenzemi (příp. hodnotami odpovídajících matic) a nikoli podprostory jako takovými. Obecně platí

$$\dim(\overline{\mathcal{B} + \mathcal{C}}) = \dim(\overline{\mathcal{B}} + \overline{\mathcal{C}} + \overline{BC}) \geq \dim(\overline{\mathcal{B}} + \overline{\mathcal{C}}) \geq \max\{\dim \overline{\mathcal{B}}, \dim \overline{\mathcal{C}}\}.$$

Pokud kvůli stručnosti označíme tato tři čísla tak, že  $o \geq n \geq m$ , pak předchozí charakterizace vzájemných poloh afinních podprostorů vypadá následovně:

**Věta.** *Afinní podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  jsou*

- *incidentní*  $\iff o = n = m$ ,
- *různoběžné*  $\iff o = n > m$ ,
- *rovnoběžné různé*  $\iff o > n = m$ ,
- *mimoběžné*  $\iff o > n > m$ .

*Důkaz.* První nerovnost je rovností, právě když  $\overline{BC} \in \overline{\mathcal{B}} + \overline{\mathcal{C}}$ , neboli  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ . Druhá nerovnost je rovností, právě když  $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \overline{\mathcal{C}}$  nebo  $\overline{\mathcal{C}} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$ , tj. právě když  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  jsou rovnoběžné. Postupným rozбором všech možností vyčerpáme všechny možné vzájemné polohy. . .  $\square$

Pro podprostory eukleidovského prostoru odvodíme ještě jinou charakterizaci vzájemných poloh (souvisějící s jejich vzdáleností), viz větu 10.3 na str. 64.

## 6.4 Příčky

Pokud jsme kdy mluvili o příčkách, pak výhradně o příčkách mimoběžných přímek. Obecně se *příčkou* dvou afinních podprostorů  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$  myslí jakákoli přímka, která je s  $\mathcal{B}$  i  $\mathcal{C}$  různoběžná. Pro netriviální podprostory existuje vždy nekonečně hodně příček, viz obr. 6.17. Příčka bývá (ale nemusí být!) jednoznačně určena nějakou dodatečnou podmínkou, např.

- aby procházela daným bodem,

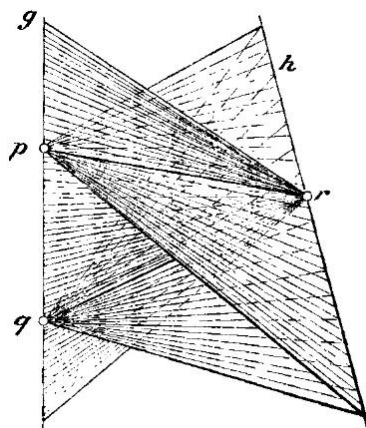


Fig. 47.

Obrázek 6.17: [LiSch] Ke dvěma mimoběžkám existuje  $\infty^2$  různých příček.

- aby měla daný směr,
- apod.

To jestli taková příčka existuje, příp. zda je určena jednoznačně, závisí na vzájemných polohách zadaných podprostorů a oné dodatečné podmínky. . .

Umění konstrukce příček má velmi užitečné uplatnění v technické praxi, viz např. přímkovou plochu na obr. 6.18 nebo [Ma].

### Jak určit příčku dvou podprostorů?

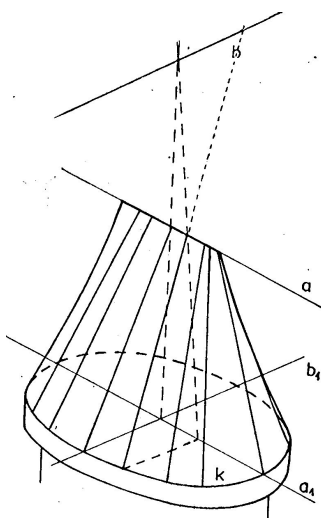
Pro dané podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$  a danou dodatečnou podmínku je možné příčku určit nejméně dvojnám způsobem:

- Uvážíme nejmenší afinní podprostor  $\mathcal{B}'$ , resp.  $\mathcal{C}'$ , určený podprostorem  $\mathcal{B}$ , resp.  $\mathcal{C}$ , a danou podmínkou; hledaná příčka je potom obsažena v průniku  $\mathcal{B}' \cap \mathcal{C}'$ .  
Příčka existuje, pokud je průnik  $\mathcal{B}' \cap \mathcal{C}'$  neprázdný a jeho dimenze je aspoň 1; příčka je jediná, pokud je dimenze  $\mathcal{B}' \cap \mathcal{C}'$  právě 1.
- Uvážíme obecné body  $B \in \mathcal{B}$  a  $C \in \mathcal{C}$  a jimi určenou přímkou  $B + C$ ; ptáme se, pro které  $B$  a  $C$  je splněna daná dodatečná podmínka, což nás přivádí k soustavě rovnic, kterou následně řešíme.  
Příčka existuje, pokud je tato soustava řešitelná; příčka je jediná, pokud má soustava jediné řešení.

Konkrétní provedení obou těchto postupů lze najít v [Sek, HoJa], viz též následující cvičení. . .

### Poznámky

V eukleidovských prostorech budeme hledat příčky, které jsou nejkratší možné. Takové příčky se jmenují *osy* a — na rozdíl od obecných příček — libovolné dva podprostory mají (aspoň jednu) osu. Umění určení osy má velmi užitečné uplatnění při měření vzdáleností podprostorů, viz odst. 10.1.



Obrázek 6.18: [Ma] Krov hradní věže ve Štramberku: krokve krovu jsou příčky mimoběžných přímek  $a$  a  $b$  sestrojené z několika bodů na kruhové podezdívce  $k$ .

## 6.5 Cvičení

- (1) Určete vzájemnou polohu afinních podprostorů  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^4$ ,

$$\mathcal{B} = \{[1, 2, 0, 0] + t(0, 0, 1, 1)\}, \quad \mathcal{C} = \{[-1, 0, 2, 0] + s_1(-1, 0, 2, 1) + s_2(1, 0, -1, 0)\},$$

kde  $t, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ , příp. určete jejich společné body a směry.

- (2) Pozměňte vhodně zadání v předchozích úlohách tak, abyste vyčerpali zbývající možné vzájemné polohy.
- (3) Uvažte tři přímky v  $\mathbb{R}^3$ :

$$p_1 = \{[1 + t_1, 1, t_1]\}, \quad p_2 = \{[1 + t_2, -1, -t_2]\}, \quad p_3 = \{[0, t_3, t_3]\}.$$

Ukažte, že tyto přímky jsou navzájem mimoběžné, a řešte následující úlohy:

- určete příčku  $p_1$  a  $p_2$ , která prochází bodem  $B = [0, 0, 0]$ ,
- určete příčku  $p_1$  a  $p_2$ , která prochází obecným bodem na  $p_3$ ,
- představte si všechny společné příčky těchto tří mimoběžek.

- (4) Pro tutěž trojici přímek řešte následující:

- určete příčku  $p_1$  a  $p_2$ , která má směr  $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ ,
- určete jinou příčku  $p_1$  a  $p_2$ , která je rovnoběžná s rovinou  $\rho = \{x - y = 0\}$ ,
- představte si všechny příčky  $p_1$  a  $p_2$ , které jsou rovnoběžné s touto rovinou.

## 7 Uspořádání na přímce, konvexní množiny, barycentrické souřadnice a další

Body na afinní přímce  $p = A + B$  jsou jednoznačně určeny hodnotami  $t \in \mathbb{R}$  z parametrického vyjádření

$$\text{přímka } AB = \{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}. \quad (7.9)$$

V této řeči je velmi snadné vymezit ledajaké podmnožiny přímky  $AB$  jako např.

$$\begin{aligned} \text{polopřímka } AB &= \{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \geq 0\}, \\ \text{úsečka } AB &= \{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in [0, 1]\}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

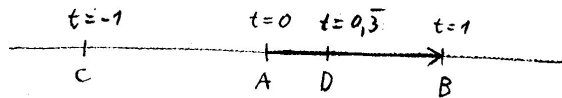
V následujících odstavcích tyto postřehy trochu rozvineme a zobecníme...

### 7.1 Relace uspořádání a mezi, úsečka

Úvodní bijekci mezi body na přímce  $p = A + B$  a reálnými čísly  $t \in \mathbb{R}$  jsme v odst. 5.1 interpretovali jako souřadnice bodu  $X \in p$  vzhledem k afinnímu repéru  $(A; \mathbf{u} = \overrightarrow{AB})$  na  $p$ . Přirozené uspořádání reálných čísel nyní indukuje relaci uspořádání pro body na přímce  $p$ :

**Definice.** Pro body na afinní přímce  $C, D \in p$  a jejich souřadnice  $c, d \in \mathbb{R}$  — vzhledem k nějakému afinnímu repéru na  $p$  — definujeme „ $C \leq D$ “, pokud  $c \leq d$ .

Uvědomte si, že toto uspořádání závisí pouze na **orientaci** bázového vektoru  $\mathbf{u}$  a nikoli na vektoru jako takovém.



Obrázek 7.19:  $B = A + \overrightarrow{AB}$ ,  $C = A - \overrightarrow{AB}$ ,  $D = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ , ...

Nezávisle na jakýchkoli volbách umíme definovat relaci „mezi“ pro trojice bodů na afinní přímce; prvním odvozeným pojmem je pojem úsečky:

**Definice.** Bod  $E$  leží mezi body  $C$  a  $D$ , pokud  $E$  leží na přímce  $p = C + D$  a „ $C < E < D$ “ vzhledem k nějakému afinnímu repéru na  $p$ .

Úsečka  $CD$  je množina všech bodů, které leží mezi  $C$  a  $D$ , doplněná o krajní body  $C$  a  $D$ .

Pro porovnání uvádíme několik ekvivalentních formulací:

- Bod  $E$  leží mezi body  $C$  a  $D$   $\iff$
- vektory  $\overrightarrow{CE}$  a  $\overrightarrow{DE}$  jsou opačně orientované  $\iff$
- dělicí poměr trojice bodů  $(C, D, E)$  je záporný.

V posledním tvrzení odkazujeme na definici (4.3) na str. 17.

V eukleidovských prostorech umíme doplnit ještě charakterizaci pomocí vzdáleností bodů, viz (8.7) na str. 48.

Pojem úsečky hraje klíčovou roli v definicích mnoha dalších geometrických objektů, z nichž některé představujeme v následujících odstavcích. . .

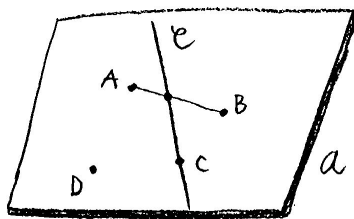
## 7.2 Poloprostory, úhly, konvexní množiny

Dalším důležitým souvisejícím pojmem je pojem poloprostoru: Bod rozděluje přímku na dvě polopřímky, přímka rozděluje rovinu na dvě poloroviny a rovina rozděluje trojrozměrný prostor na dva poloprostory. Podobně, nadrovina rozděluje obecný afinní prostor na dva poloprostory:

**Definice.** Dva body  $A$  a  $B$  v afinním prostoru  $\mathcal{A}$  jsou *oddělovány* nadrovinou  $\mathcal{C}$ , pokud  $A$  ani  $B$  neleží v  $\mathcal{C}$  a úsečka  $AB$  má s nadrovinou  $\mathcal{C}$  společný právě jeden vnitřní bod.

(Afinní) *poloprostor* v  $\mathcal{A}$  vymezený nadrovinou  $\mathcal{C}$  je charakterizován tím, že žádné dva jeho body nejsou nadrovinou  $\mathcal{C}$  oddělovány.

Poloprostory vymezené nadrovinou  $\mathcal{C}$  jsou dva a jejich průnikem je právě  $\mathcal{C}$ .



Obrázek 7.20: Body  $A, B$  jsou oddělovány nadrovinou  $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ , body  $A, C$  nikoli; body  $B, C$  patří do jednoho poloprostoru, body  $A, C, D$  do druhého.

Průnikem dvou polorovin v afinní rovině (takových, že jejich hraniční přímky jsou různoběžné), je *úhel*. Pokud uvažujeme více polorovin, pak jejich průnikem může vzniknout ledacos (např. mnohoúhelník), v každém případě to však bude konvexní množina:

**Definice.** Podmnožina  $M$  v afinním prostoru  $\mathcal{A}$  je *konvexní*, pokud pro libovolné různé body  $B, C \in M$  platí, že také celá úsečka  $BC$  patří do  $M$ .

Konvexní množiny v  $\mathcal{A}$  jistě jsou: celé  $\mathcal{A}$ , všechny afinní podprostory (tzn. i body), úsečky, poloprostory a mnoho dalších. . .<sup>5</sup>

Průnikem konvexních podmnožin v  $\mathcal{A}$  je opět konvexní množina; sjednocení samozřejmě nikoli:

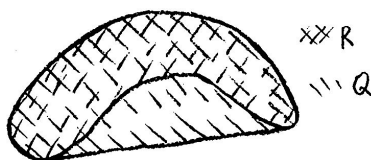
<sup>5</sup>Mimo jiné také prázdná množina je podle definice konvexní.

Obrázek 7.21: Množina  $K$  je konvexní, množina  $R$  nikoli.

**Definice.** *Konvexní obal* podmnožiny  $M \subseteq \mathcal{A}$  je nejmenší konvexní množina, která obsahuje  $M$ .

Konvexní obal  $k + 1$  bodů v obecné poloze se nazývá  $k$ -rozměrný *simplex*.

Konvexním obalem konečné množiny bodů (v libovolné poloze) může být *konvexní mnohostěn*, příp. konvexní mnohoúhelník, úsečka nebo bod. Bod, resp. úsečka je 0-, resp. 1-rozměrným simplexem; 2-rozměrný simplex není nic jiného než trojúhelník, 3-rozměrný simplex je čtyřstěn, neboli trojboký jehlan.

Obrázek 7.22: Množina  $Q$  je konvexním obalem množiny  $R$ .

K analytickému vyjádření poloprostoru a konvexního obalu konečné množiny bodů se dostaneme za chvíli...

### 7.3 Těžiště, barycentrické souřadnice a další

V (7.9), resp. (7.10) je analytické vyjádření přímky, polopřímky, resp. úsečky určené body  $A$  a  $B$ . Jako obvykle, jednu a tutéž věc lze vyjádřit různými způsoby, nad nimiž se nyní zamyslíme a záhy zobecníme. Všechny následující úvahy se odehrávají v obecném afinním prostoru  $\mathcal{A}$ .

#### Úvodní postřehy

Střed úsečky  $AB$  můžeme vyjádřit jako  $S = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  nebo  $S = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ , ale taky jako  $S = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$ , kde  $P$  je úplně libovolný bod (ať na přímce  $AB$  nebo v okolním prostoru)! Pokud úsečku  $AB$  chápeme jako páku (na jejichž ramenech působí stejné síly), potom střed  $S$  je bod, v němž je třeba páku  $AB$  podepřít, aby byla v rovnováze. Pokud uvažujeme body  $A$  a  $B$  jako hmotné body se stejnými (kladnými) hmotnostmi, potom střed  $S$  je těžištěm hmotné soustavy sestávající právě z těchto dvou bodů.

Obecněji, každý bod  $X$  na přímce  $AB$  lze pomocí parametru  $t \in \mathbb{R}$  vyjádřit (vzájemně jednoznačně) jako

$$X = A + t\overrightarrow{AB}, \quad \text{resp.} \quad X = B + (1-t)\overrightarrow{BA}; \quad (7.11)$$



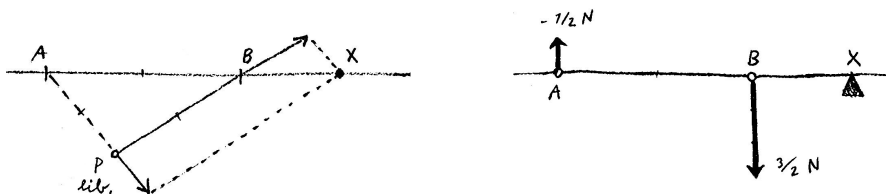
vztah mezi těmito dvěma vyjádřeními je skryt v rovnosti  $B = A + \overrightarrow{AB}$ . Dále, pro zcela libovolný bod  $P \in \mathcal{A}$  zřejmě platí  $A = P + \overrightarrow{PA}$ ,  $B = P + \overrightarrow{PB}$  a  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$ . Dosazením do (7.11) dostáváme

$$X = P + (1-t)\overrightarrow{PA} + t\overrightarrow{PB}. \quad (7.12)$$

Pro kontrolu si můžeme všimnout, že levou, resp. pravou rovnost v (7.11) dostaneme dosazením  $P = A$ , resp.  $P = B$  do (7.12). Pokud tamtéž dosadíme  $P = X$ , dostáváme

$$(1-t)\overrightarrow{XA} + t\overrightarrow{XB} = \mathbf{o}.$$

Tuto rovnost můžeme interpretovat jako rovnováhu na páce  $AB$  podepřené v bodě  $X$ , přičemž síly působící v koncových bodech  $A$  a  $B$  odpovídají koeficientům u příslušných vektorů. Jiná



Obrázek 7.23:  $X = A + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \iff X = P - \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{PB} \iff -\frac{1}{2}\overrightarrow{XA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{XB} = \mathbf{o}$

interpretace téhož je taková, že bod  $X$  je **těžištěm** hmotné soustavy sestávající z bodů  $A$  a  $B$ , v nichž jsou soustředěny (ne nutně kladné) hmotnosti  $t_A = 1-t$  a  $t_B = t$ .<sup>6</sup> Povšimněte si, že  $t_A + t_B = 1$ .

Naopak, jsou-li v bodech  $A$  a  $B$  soustředěny váhy  $m_A$  a  $m_B$  a  $X$  je těžištěm této hmotné soustavy, potom platí

$$m_A\overrightarrow{XA} + m_B\overrightarrow{XB} = \mathbf{o}. \quad (7.13)$$

Obdobnými úpravami jako výše ( $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PA}$  apod.) zjišťujeme, že pro libovolný bod  $P \in \mathcal{A}$  platí

$$(m_A + m_B)\overrightarrow{XP} + m_A\overrightarrow{PA} + m_B\overrightarrow{PB} = \mathbf{o}. \quad \leftarrow$$

Odtud vidíme, že těžiště existuje (a je jediné) právě tehdy, když součet vah  $m_A + m_B$  je **nenulový**. V takovém případě můžeme tento bod vyjádřit jako

$$X = P + t_A\overrightarrow{PA} + t_B\overrightarrow{PB}, \quad \text{kde } t_A = \frac{m_B}{m_A + m_B} \quad \text{a} \quad t_B = \frac{m_A}{m_A + m_B}. \quad (7.14)$$

Povšimněte si, že  $t_A + t_B = 1$ . Dosazením  $P = A$ , resp.  $P = B$  do (7.14) dostáváme obvyklé vyjádření

$$X = A + t_B\overrightarrow{AB}, \quad \text{resp.} \quad X = B + t_A\overrightarrow{BA}.$$

Vzhledem k tomu, že rovnost (7.14) (resp. (7.12)) nezávisí na volbě bodu  $P \in \mathcal{A}$ , budeme totéž psát stručněji jako

$$\text{„}X = t_A A + t_B B\text{“,} \quad \text{kde } t_A + t_B = 1.$$

Z uvedeného je zřejmé, že charakterizace z (7.9) a (7.10) umíme nyní vyjádřit takto: ←

$$\begin{aligned} \text{přímka } AB &= \{t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1\}, \\ \text{polopřímka } AB &= \{t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1 \text{ a } t_B \geq 0\}, \\ \text{úsečka } AB &= \{t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1 \text{ a } t_A \geq 0 \text{ a } t_B \geq 0\}. \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Kvůli případnému nežádoucímu konfliktu se zažitými představami budeme místo hmotnost říkat *váha*.

### Obecnější postřehy

Analogické úvahy můžeme bez větších problémů vést pro tři a více bodů. Zde však bude podstatné, zda uvažované body jsou či nejsou v **obecné poloze**.<sup>7</sup>

Pro příklad začneme se třemi body  $A, B, C$  v alespoň dvourozměrném afinním prostoru  $\mathcal{A}$ . Pokud jsou tyto body v obecné poloze (tzn. tvoří vrcholy trojúhelníku), potom každý bod  $X$  v rovině  $ABC$  lze pomocí parametrů  $t, s \in \mathbb{R}$  vyjádřit např. takto:

$$X = A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}.$$

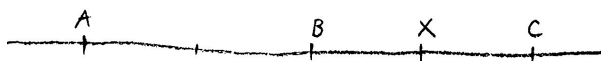
Pro zcela libovolný bod  $P \in \mathcal{A}$  zřejmě platí  $A = P + \overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$  atd., což po dosazení dává

$$X = P + t_A\overrightarrow{PA} + t_B\overrightarrow{PB} + t_C\overrightarrow{PC}, \quad \text{kde } t_A = 1 - t - s, \quad t_B = t, \quad t_C = s.$$

Povšimněte si, že  $t_A + t_B + t_C = 1$  a že korespondence mezi takovými trojicemi čísel a body v rovině  $ABC$  je **vzájemně jednoznačná**, čili bijektivní. Podobně jako výše budeme předchozí vyjádření stručněji zapisovat jako

$$\text{„}X = t_A A + t_B B + t_C C\text{“,} \quad \text{kde } t_A + t_B + t_C = 1.$$

Pokud body  $A, B, C$  nejsou v obecné poloze (tzn. splývají nebo leží na jedné přímce), potom právě popsaná korespondence jistě není vzájemně jednoznačná, viz obr. 7.24.



Obrázek 7.24: „ $X = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}C$ “

V každém případě však lze bod  $X$  interpretovat jako **těžiště** hmotné soustavy sestávající z bodů  $A, B, C$ , v nichž jsou popořadě soustředěny váhy  $t_A, t_B, t_C$ . To plyne z následujícího základního principu, bez kterého se žádná seriózní debata o těžištích neobejde:

*Těžiště  $T$  hmotné soustavy s vahami  $m_A, m_B, m_C$  v bodech  $A, B, C$  je totéž co těžiště soustavy s vahami  $m_A + m_B, m_C$  v bodech  $R, C$ , kde  $R$  je těžiště soustavy s vahami  $m_A, m_B$  v bodech  $A, B$ .*

Zde bod  $R$  je podle (7.13) určen rovností

$$m_A\overrightarrow{RA} + m_B\overrightarrow{RB} = \mathbf{o}$$

a bod  $T$  je podle téhož principu určen rovností

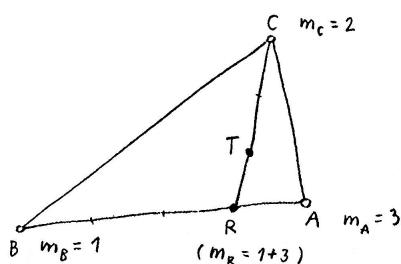
$$(m_A + m_B)\overrightarrow{TR} + m_C\overrightarrow{TC} = \mathbf{o}.$$

⇒ Z těchto dvou rovností vyplývá, že pro těžiště  $T$  platí

$$m_A\overrightarrow{TA} + m_B\overrightarrow{TB} + m_C\overrightarrow{TC} = \mathbf{o}. \quad (7.15)$$

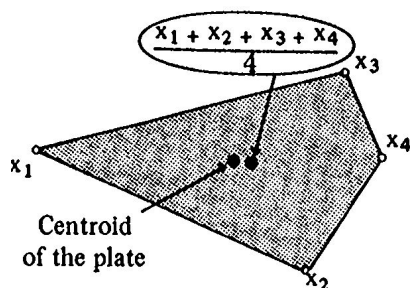
Je-li součet vah  $m_A + m_B + m_C$  nenulový, potom polohu těžiště lze vyjádřit obdobně jako v (7.14), viz obr. 7.25. . .

<sup>7</sup>Dva body jsou v obecné poloze, právě když jsou různé; tento předpoklad byl v předchozím automaticky splněn, proto jsme jej nepotřebovali diskutovat.



Obrázek 7.25: „ $R = \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}B$ “ a „ $T = \frac{4}{6}R + \frac{2}{6}C$ “  $\implies$  „ $T = \frac{3}{6}A + \frac{1}{6}B + \frac{2}{6}C$ “

Pro body v obecné poloze navíc platí, že těžiště hmotné soustavy se stejnými vahami ve všech třech bodech je totéž jako těžiště trojúhelníku  $ABC$  — jmenovitě, bod „ $T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ “. To, že něco podobného neplatí obecně, je naznačeno na obr. 7.26, viz též jedno z následujících cvičení...



Obrázek 7.26: [Be] Těžiště mnohoúhelníku obecně **není** totéž co těžiště bodové hmotné soustavy se stejnými hmotnostmi ve vrcholech.

Z uvedeného vyplývá, že v tomto duchu je velmi snadné popsat některé objekty určené třemi body v obecné poloze:

$$\text{rovina } ABC = \{ „t_A A + t_B B + t_C C“ \mid t_A + t_B + t_C = 1 \},$$

$$\text{polorovina } AB, C = \{ „t_A A + t_B B + t_C C“ \mid t_A + t_B + t_C = 1 \text{ a } t_C \geq 0 \},$$

$$\text{trojúhelník } ABC = \{ „t_A A + t_B B + t_C C“ \mid t_A + t_B + t_C = 1 \text{ a } t_A, t_B, t_C \geq 0 \},$$

kde polorovinou  $AB, C$  je myšlena polorovina vymezená přímkou  $AB$  a bodem  $C$ .

### Obecné závěry

Vzhledem k předchozí zevrubné přípravě můžeme být poměrně struční. Uvažme  $k$ -tici bodů  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ , které jsou v **obecné poloze**, a libovolný další bod  $P \in \mathcal{A}$ . Potom každý bod  $X$  z afinního obalu množiny  $\{A_1, \dots, A_k\}$  lze **jednoznačně** vyjádřit ve tvaru

$$X = P + t_1 \overrightarrow{PA_1} + \dots + t_k \overrightarrow{PA_k}, \quad \text{kde } t_1 + \dots + t_k = 1, \quad (7.16)$$

což stručněji zapisujeme jako

$$„X = t_1 A_1 + \dots + t_k A_k“, \quad \text{kde } t_1 + \dots + t_k = 1. \quad (7.17)$$

Vzhledem k stávajícímu značení definujeme:

**Definice.** *Barycentrické souřadnice* bodu  $X$  vzhledem ke  $k$ -tici bodů  $(A_1, \dots, A_k)$  v obecné poloze je  $k$ -tice čísel  $(t_1, \dots, t_k)$  z (7.16), resp. (7.17).

Pokud body  $A_i$  nejsou v obecné poloze, potom koeficienty  $t_i$  nejsou určeny jednoznačně. . .

Bez ohledu na to, zda body  $A_i$  v obecné poloze jsou, či nikoli, uvažujme hmotnou soustavu s vahami  $m_i$  soustředěnými v bodech  $A_i$ . Zobecnění (7.13) a (7.15) je následující:

**Definice.** Bod  $T$  je *těžištěm* hmotné soustavy s vahami  $m_1, \dots, m_k$  soustředěnými popořadě v bodech  $A_1, \dots, A_k$ , pokud platí

$$m_1 \overrightarrow{TA_1} + \dots + m_k \overrightarrow{TA_k} = \mathbf{o}. \quad (7.18)$$

Obdobnými úpravami jako výše — tedy dosazením  $\overrightarrow{TA_i} = \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{PA_i}$  do (7.18) atd. — dostáváme následující tvrzení:

**Věta.** *Těžiště hmotné soustavy s vahami  $m_1, \dots, m_k$  soustředěnými popořadě v bodech  $A_1, \dots, A_k$  existuje, právě když je součet  $m_1 + \dots + m_k$  nenulový. V takovém případě je poloha těžiště určena rovností (7.16), kde  $P \in \mathcal{A}$  je libovolný bod a koeficienty  $t_i$  jsou rovny*

$$t_i = \frac{m_i}{m_1 + \dots + m_k}.$$

Uvědomte si, že pokud těžiště existuje, potom je jistě jediné (přestože koeficienty  $t_i$  v (7.16) nemusí být určeny jednoznačně).

Pokud je součet vah  $m_1 + \dots + m_k$  nulový, potom těžiště neexistuje; nanejvýš můžeme říct, že leží někde v „nekonečnu“. Představte si nějaký takový případ. . .

Pokud jsou všechny váhy kladné, jistě je jejich součet nenulový. V takovém případě těžiště vždy existuje a bude ležet v konvexním obalu bodů  $A_i$ . Tento poznatek je obsahem druhé části následující věty:

**Věta.** *Pro body  $A_1, A_2, \dots$  v afinním prostoru dimenze  $n$  platí:*

- *afinním obalem množiny  $\{A_1, \dots, A_k\}$  je množina*

$$\{ „t_1 A_1 + \dots + t_k A_k“ \mid t_1 + \dots + t_k = 1 \},$$

- *konvexním obalem množiny  $\{A_1, \dots, A_k\}$  je množina*

$$\{ „t_1 A_1 + \dots + t_k A_k“ \mid t_1 + \dots + t_k = 1 \text{ a } t_1, \dots, t_k \geq 0 \}.$$

*Pokud jsou body  $A_1, \dots, A_{n-1}$  v obecné poloze, potom platí:*

- *poloprostor vymezený nadrovinou  $A_1 + \dots + A_{n-1}$  a bodem  $A_n$  je množina*

$$\{ „t_1 A_1 + \dots + t_n A_n“ \mid t_1 + \dots + t_n = 1 \text{ a } t_n \geq 0 \},$$

Zdůvodnění všech těchto tvrzení je buď přímo obsaženo v předchozím textu, nebo je jeho prostředním zobecněním. . .

## 7.4 Důležité poznámky

(1) Relaci mezi, stejně jako pojem úsečky a další odvozené pojmy lze definovat rozličnými způsoby, které jsme buď nezmiňovali vůbec, nebo jenom v poznámkách. Výše uvedenými formulacemi zejména chceme zdůraznit, že všechny tyto pojmy jsou výsostně **afinní**, tzn. že k jejich vymezení nepotřebujeme vzdálenosti bodů ani nic podobného! Jsou to tedy zřejmě afinní invarianty, takže následující tvrzení nepotřebují žádné další komentáře:

- *Afinní zobrazení zobrazuje úsečky na úsečky nebo body.*
- *Afinní zobrazení zachovává konvexnost množin.*
- *Afinní zobrazení zachovává těžiště hmotných soustav.*

Ve skutečnosti platí také opačné tvrzení k posledně zmiňovanému — celkem tak dostáváme následující charakterizaci:

**Věta.** *Zobrazení  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  je afinní právě tehdy, když pro libovolné  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$  a  $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$  takové, že  $t_1 + \dots + t_k = 1$ , platí:*

$$f(„t_1 A_1 + \dots + t_k A_k“) = „t_1 f(A_1) + \dots + t_k f(A_k)“. \quad (7.19)$$

*Důkaz.* Potřebujeme zdůvodnit implikaci zprava doleva, k čemuž postačí předpoklad (7.19) pro  $k = 2$ : Odtud plyne, že kolineární body se zobrazí na kolineární body (všechny body tvaru „ $X = t_1 A_1 + t_2 A_2$ “ pro  $A_1 \neq A_2$  tvoří přímku). Navíc koeficienty na obou stranách jsou stejné, což znamená, že zobrazení  $f$  zachová dělicí poměr bodů na přímce (za předpokladu, že  $f(A_1) \neq f(A_2)$ ). To už stačí k tomu, aby zobrazení  $f$  bylo afinní, viz úvod odst. 4.5. . . □

(2) Pro pořádek uvádíme přesný vztah mezi barycentrickými souřadnicemi bodu  $X$  na přímce určené body  $A$  a  $B$  a dělicím poměrem této trojice bodů (viz definující rovnosti (7.17) na str. 39 a (4.3) na str. 17):

$$(ABX) = d \iff „X = \frac{1}{1-d}A - \frac{d}{1-d}B“.$$

(3) Rovnost (7.13) je vektorovým zápisem *zákona páky*; úpravy před (7.15), resp. obr. 7.25 jsou ukázkou, tzv. *principu redukce*. Jedná se o dva základní axiomy pro úvahy o těžištích, které zformuloval a mistrně užíval již Archimédés. Těžiště, resp. barycentrické souřadnice mají velice elegantní uplatnění při řešení mnoha konkrétních úloh. Zajímavý úvod a ukázky lze najít např. v [S].

(4) V předchozím jsme diskutovali analytický popis trojúhelníku, resp. obecného simplexu, jakožto konvexního obalu několika bodů v obecné poloze. Každý trojúhelník je polovinou nějakého rovnoběžníku; každý simplex je částí nějakého rovnoběžnostěnu. Vzhledem k tomu, že se s těmito objekty budeme ještě potýkat, doplníme také jejich analytický popis.

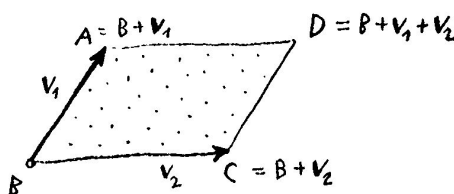
Rovnoběžník je konvexní množina, můžeme jej tedy chápat jako konvexní obal jeho čtyř vrcholů a odkázat se na předchozí popis. Každý rovnoběžník je však určen svými třemi vrcholy, resp. jedním vrcholem a dvěma vektory. V rovnoběžníku  $ABCD$  totiž platí  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ , ekvivalentně,  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ . Např. vrchol  $D$  může být určen takto:

$$D = B + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = A + \overrightarrow{BC} = C + \overrightarrow{BA} = \dots, \quad \text{resp. „}D = A - B + C\text{“}.$$

Odtud je vidno, že rovnoběžník  $ABCD$  je právě částí roviny  $ABC$ , jež může být popsána takto:

$$\begin{aligned} \text{rovnoběžník } ABCD &= \{B + s\overrightarrow{BA} + r\overrightarrow{BC} \mid s, r \in [0, 1]\} \\ &= \{t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1 \text{ a } t_A, t_C \geq 0 \text{ a } |t_B| \leq 1\}. \end{aligned}$$

⇒ Zobecnění tohoto popisu pro obecný rovnoběžnostěn necháváme čtenáři jako snadné cvičení. . .



Obrázek 7.27: Rovnoběžník je určen bodem a dvěma vektory.

## ⇒ 7.5 Cvičení

(1) V afinním prostoru  $\mathbb{R}^3$  jsou dány body

$$A = [1, 1, 0], \quad B = [4, 1, 3], \quad C = [1, 0, 1], \quad D = [0, -1, 1], \quad E = [3, 0, 0].$$

Rozhodněte, zda:

- jsou bodu  $D$  a  $E$  oddělovány nadrovinou  $\rho = ABC$ ,
  - úsečky  $AB$  a  $CD$  mají nějaký společný bod.
- (2) Rozhodněte, zda body  $A, B, C, D$  tvoří vrcholy rovnoběžníku.
- (3) Dokažte, že body  $A, B, D, E$  jsou v obecné poloze, a:
- určete barycentrické souřadnice bodu  $C$  vzhledem k této čtveřici bodů,
  - rozhodněte, zda bod  $C$  patří do konvexního obalu bodů  $A, B$ , resp.  $A, B, D$ , resp.  $A, B, D, E$ ,
  - určete afinní souřadnice těžiště čtyřstěnu  $ABDE$ ,
  - určete souřadnice zbylých vrcholů a těžiště nějakého rovnoběžnostěnu, jehož čtyři vrcholy jsou  $A, B, C, E$ ,
  - rozhodněte, zda bod  $D$  leží uvnitř tohoto rovnoběžnostěnu.
- (4) Rozhodněte, zda podmnožiny ze cvičení 4.4 jsou konvexní; pokud nejsou, popište jejich konvexní obaly.

- (5) K obrázku 7.21: Rozhodněte, zda obrys rohlíku může být obrazem kružnice vzhledem k nějakému afinnímu zobrazení.
- (6) Na obrázku 7.28 jsou stopy stojící osoby a vyznačený bod, který je průmětem těžiště osoby ve směru výslednice všech sil, které na ni působí. Rozhodněte, zda je tato osoba bez jakékoli další opory stabilní.



Obrázek 7.28: Stopy

- (7) K obrázku 7.26:
- sestrojte bod „ $\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4$ “ a uvědomte si, že určování těžiště bodové hmotné soustavy je asociativní,
  - sestrojte těžiště čtyřúhelníku a rozhodněte, zda tento úkol náhodou nepatří do jiné kapitoly,
  - udejte příklad čtyřúhelníku, jehož těžiště splývá/nesplývá s bodem „ $\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4$ “.
- (8) Pripusťme na chvíli trojúhelník  $ABC$  v *eukleidovské* rovině: Vyjádřete střed kružnice vepsané jakožto těžiště hmotné soustavy s hmotnostmi soustředěnými ve vrcholech  $A, B, C$ .
- (9) Pomocí vektorové algebry dokažte nějaké tvrzení elementární afinní geometrie (jako např. Menelaovu větu).





Algebraické vymezení eukleidovského prostoru je následující: je to afinní prostor s eukleidovskou **metrikou**, což je metrika kompatibilní s afinní strukturou. Eukleidovská metrika je určena skalárním součinem na zaměření.

Pomocí skalárního součinu se definuje velikost vektoru — odtud velikost úsečky neboli vzdálenost dvou bodů. Dále pak kolmost a odchylka dvou vektorů — odtud velikost úhlu. Pojem kolmosti, vzdálenosti a odchylky poté přirozeně rozšíříme na libovolné podprostory v obecném eukleidovském prostoru. Geometrická charakterizace dvojic bodů (resp. vektorů), v nichž se vzdálenost (resp. odchylka) realizuje, zobecňuje naše poznatky z konstrukční geometrie a je založena na kolmosti, resp. kolmém průmětu. Celá kapitola končí diskuzí nad obsahy rovnoběžníků, resp. objemy obecných rovnoběžnostěnů.

## 8 Eukleidovské prostory a relevantní zobrazení

### 8.1 Úvod a základní definice

V eukleidovské geometrii dominuje — vedle rovnoběžnosti — pojem **shodnosti**. Chceme tedy analyticky interpretovat shodnost, což v prvé řadě znamená shodnost úseček a úhlů. Vzhledem k tomu, s jakou oblibou používáme reálná čísla, budeme přiřazovat úsečkám a úhlům jejich velikosti a prohlásíme, že

„úsečky, resp. úhly jsou *shodné*, pokud mají stejnou velikost.“

Je jasné, že ne každá funkce, která úsečkám přiřazuje jejich velikosti, určuje shodnost jak ji chápeme v eukleidovském prostoru. Přirozené požadavky jsou:

- (a)  $|AB| \geq 0$ ,
- (b)  $|AB| = 0 \iff A = B$ ,
- (c)  $|AB| = |BA|$ ,
- (d)  $|AC| \leq |AB| + |BC|$ ,

kde  $A, B, C$  jsou libovolné body a  $|AB|$  značí velikost úsečky  $AB$ , neboli vzdálenost bodů  $A$  a  $B$ . Požadavky (a)–(d) jsou právě axiomy obecného *metrického prostoru*; každý eukleidovský prostor je tudíž metrickým prostorem. Tyto předpoklady však určitě nestačí — bylo by např. velmi podivné, kdyby protilehlé strany v rovnoběžníku měly mít jinou velikost. Jinými slovy, aby metrický prostor byl eukleidovským prostorem, musí být metrika kompatibilní s **rovnoběžností**, tj. s afinní strukturou:

$$(e) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies |AB| = |CD|.$$

Eukleidovská metrika v afinním prostoru  $\mathcal{A}$  tedy musí být určena nějakou funkcí na zaměření  $\overrightarrow{\mathcal{A}} = V$ , která vektorům přiřazuje jejich velikost. Velikost úsečky  $|AB|$  je potom určena velikostí odpovídajícího vektoru  $\|\overrightarrow{AB}\|$ . Takto se pomalu dostáváme k pojmu skalárního součinu. . .

### Skalární součin

Standardní skalární součin ve vektorovém prostoru  $V = \mathbb{R}^n$  přiřazuje dvěma vektorům  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots)$  a  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots)$  reálné číslo

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots \quad (8.1)$$

Standardní báze

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots), \dots$$

je ortonormální, což znamená, že tyto vektory jsou navzájem kolmé a mají velikost 1. To je v řeči (8.1) ekvivalentní tomu, že

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0, & \text{pokud } i \neq j, \\ 1, & \text{pokud } i = j. \end{cases} \quad (8.2)$$

Velikost obecného vektoru  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots)$  je rovna

$$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots} \quad (8.3)$$

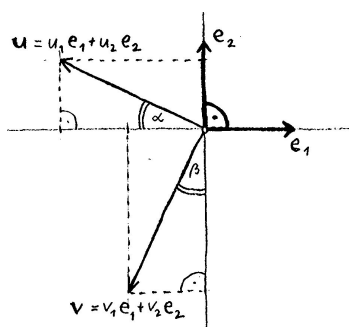
Za vší touto algebraizací samozřejmě vidíme základní poznatky elementární eukleidovské geometrie jako např. charakterizaci podobnosti trojúhelníků, **Pythagorovu větu** apod.<sup>1</sup> (viz obr. 8.1).

Jako obvykle, pro další vyvozování je mnohem podstatnější, jaké jsou vlastnosti přiřazení (8.1), než tento konkrétní předpis. Tyto vlastnosti jsou:

- (a)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ ,
- (b)  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ ,
- (c)  $(r\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = r(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ ,
- (d)  $\mathbf{u} \neq \mathbf{o} \implies \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$ ,

kde  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  jsou libovolné vektory a  $r \in \mathbb{R}$  je libovolné reálné číslo. Dosavadní pozorování vedou k definici obecného skalárního součinu v obecném vektorovém prostoru:

<sup>1</sup>Viz I.47, VI.4–5 apod. v [Eu].



Obrázek 8.1: Vektory  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  a  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  jsou kolmé  $\iff \operatorname{tg} \alpha = \frac{u_2}{u_1} = -\frac{v_1}{v_2} = -\operatorname{tg} \beta \iff u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$ . Velikost vektoru  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  je rovna  $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ .

**Definice.** *Skalární součin* na vektorovém prostoru  $V$  je symetrická (a), bilineární (a)–(c), pozitivně definitní (d) forma  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ .

Vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  jsou *kolmé*, pokud  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ; značíme  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ .

*Velikost vektoru*  $\mathbf{u}$  je reálné číslo  $\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ .

Báze vektorového prostoru je *ortonormální*, pokud jsou bázevé vektory navzájem kolmé a všechny mají velikost rovnu 1.

Skalárnímu součinu se často přezdívá *vnitřní součin*, a to zejména v cizojazyčné literatuře. Všude v následujícím předpokládáme, že vektorový prostor  $V$  je vybaven skalárním součinem.

Standardní báze  $V = \mathbb{R}^n$  je vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu (8.1) ortonormální. Naopak, z bilinearit obecného skalárního součinu plyne, že:

*Souřadnicové vyjádření jakéhokoli skalárního součinu vzhledem k libovolné ortonormální bázi má tvar (8.1).*

Skalární součin na  $V$  je tedy jednoznačně určen tím, že nějakou bázi  $V$  prohlásíme za ortonormální.

### Základní nerovnosti

Nezákladnější nerovnost je ukryta v definující vlastnosti pozitivní definitnosti (d). Díky této vlastnosti má každý vektor dobře definovanou velikost (tzn. číslo pod odmocninou není nikdy záporné). Ačkoli je to více než zřejmé, pro jistotu připomínáme, že  $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ , přičemž rovnost platí, právě když  $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ .

Z lineární algebry si pamatujeme několik užitečných nerovností. Nejprve tzv. *Cauchyova–Schwarzova nerovnost*,

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|, \quad (8.4)$$

odkud se vyvozuje tzv. *trojúhelníková nerovnost*,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|. \quad (8.5)$$

Přitom v obou případech platí rovnost právě tehdy, když vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  jsou lineárně závislé.

### Obecná definice eukleidovského prostoru

Vektorový prostor se skalárním součinem se obvykle nazývá eukleidovský vektorový prostor. Pokud mluvíme jenom o eukleidovském prostoru, máme na mysli eukleidovský bodový (afinní) prostor:

**Definice.** *Eukleidovský prostor* je afinní prostor  $\mathcal{E}$  se skalárním součinem na zaměření  $V = \vec{\mathcal{E}}$ .  
*Velikost úsečky*  $AB \subset \mathcal{E}$  je definována jako velikost odpovídajícího vektoru  $\overrightarrow{AB} \in \vec{\mathcal{E}}$ ; značíme

$$|AB| := \|\overrightarrow{AB}\|. \quad (8.6)$$

Odtud a z definujících vlastností skalárního součinu plyne, že jsou splněny všechny axiomy (a)–(e) obecného metrického prostoru vyjmenované na str. 45. Axióm (d) zřejmě odkazuje na nerovnost (8.5), přičemž platí:

$$|AC| = |AB| + |BC| \iff \text{bod } B \text{ je mezi } A \text{ a } C. \quad (8.7)$$

Velikost úsečky  $|AB|$  určuje *vzdálenost* bodů  $v(A, B)$ . Tento pojem budeme dále zobecňovat pro obecné podmnožiny a podprostory eukleidovského prostoru, viz odst. 10.1.

Dalšími objekty, které jsme zvyklí v eukleidovských prostorech měřit, jsou úhly. Úhel je definován jako průnik dvou polorovin (viz odst. 7.2). Je-li bod  $A$  vrcholem úhlu a body  $B$  a  $C$  jsou libovolné body, z nichž každý leží na jedné hraniční polopřímce (a žádný nesplývá s  $A$ ), pak *velikost úhlu* rozumíme odchylku vektorů  $\overrightarrow{AB}$  a  $\overrightarrow{AC}$ ; značíme

$$\sphericalangle BAC := \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}). \quad (8.8)$$

Odchylka vektorů je definována v následujícím pododstavci...

### Odchylka vektorů

Jedna ze základních vět eukleidovské geometrie, která vyjadřuje vztah mezi stranami trojúhelníku a jeho vnitřními úhly, je tzv. **kosinová věta**. Vzhledem k obvyklému značení velikostí stran a úhlů v obecném trojúhelníku (viz obr. 8.2) tato věta říká, že<sup>2</sup>

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Pokud ke stranám trojúhelníku přiřadíme vektory tak, že  $\|\mathbf{a}\| = a$ ,  $\|\mathbf{b}\| = b$ ,  $\|\mathbf{c}\| = c$ , potom platí  $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ . S pomocí bilinearitu skalárního součinu snadno odvodíme, že

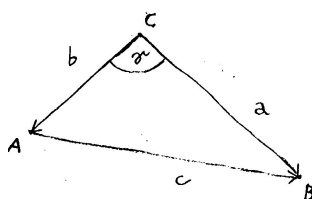
$$\|\mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Porovnáním těchto dvou vyjádření dostáváme

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma. \quad (8.9)$$

Odtud vyvozujeme následující definici odchylky vektorů v obecném eukleidovském prostoru:

<sup>2</sup>Viz II.12–13 v [Eu]. Pokud je úhel  $\gamma$  pravý, potom dostáváme větu Pythagorovu.



Obrázek 8.2: V obecném trojúhelníku v eukleidovské rovině platí  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ , neboli  $\|\mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

**Definice.** *Odchylka nenulových* vektorů  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  je reálné číslo z intervalu  $[0, \pi]$  definované rovností

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}. \quad (8.10)$$

Pro libovolné nenulové vektory je odchylka dobře definována díky nerovnosti (8.4), odkud plyne, že podíl  $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$  má vždy hodnoty v intervalu  $[-1, 1]$ . Z definice je zřejmé, že nenulové vektory jsou kolmé právě tehdy, když mají odchylku  $\frac{\pi}{2}$ :

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \iff \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\pi}{2}.$$

Zobecnění pojmu kolmosti, resp. odchylky pro obecné podprostory eukleidovského prostoru se věnujeme v odst. 9.1, resp. 10.4.

### Vnější a vektorový součin

Dalším geometrickým pojmem, který dovoluje elegantní algebraickou interpretaci, je pojem obsahu (resp. objemu), a to především rovnoběžníku (resp. rovnoběžnostěnu). V [Eu] není pojem obsahu, resp. objemu nijak vymezen, avšak nakládá se s ním jako s každou jinou veličinou podle vyslovených axiomů. Série tvrzení v I. knize velmi názorně zdůvodňuje, že rovnoběžníky se stejnou základnou a stejnou výškou mají stejný obsah. V VI. knize se poté dokazuje, že poměr obsahů rovnoběžníků se stejnou výškou je stejný jako poměr jejich základen.<sup>3</sup> K číselnému vyjadřování obsahů rovnoběžníků tedy stačí definovat obsah jednotkového čtverce jako 1. (Analogická diskuze platí pro objemy rovnoběžnostěnů v prostoru.<sup>4</sup>)

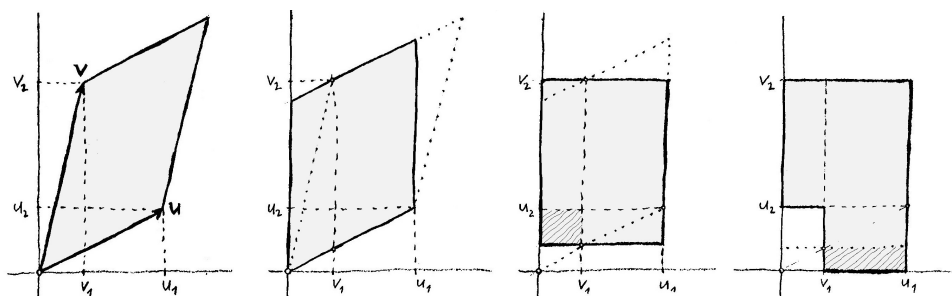
Rovnoběžník v eukleidovské rovině je určen vrcholem a dvěma (lineárně nezávislými) vektory. Tyto vektory a jejich souřadnice vzhledem k nějaké ortonormální bázi označíme  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  a  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . S odkazem na právě zmiňovaná tvrzení lze jednoduše ukázat, že obsah tohoto rovnoběžníku je roven absolutní hodnotě **determinantu** matice tvořené souřadnicemi určujících vektorů (viz obr. 8.3):

$$\text{obsah} = \pm \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}. \quad (8.11)$$

Determinant obvykle chápeme jako zobrazení, které čtvercové matici přiřazuje reálné číslo. Vzhledem k předchozímu bude vhodné determinant chápat jako zobrazení, které  $n$ -tici vektorů

<sup>3</sup>Viz tvrzení I.33–45 a VI.1.

<sup>4</sup>Viz podstatnou část XI. knihy.



Obrázek 8.3: Obsah rovnoběžníku určeného vektory  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  a  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  je roven absolutní hodnotě determinantu  $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_2 - v_1u_2$ .

v  $n$ -rozměrném prostoru přiřazuje reálné číslo. Abychom tyto dva přístupy rozlišili, zavádíme následující pojmenování a značení:

**Definice.** *Vnější součin*  $n$ -tice vektorů  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  v prostoru dimenze  $n$  je determinant matice tvořené po sloupcích souřadnicemi těchto vektorů (v tomto pořadí) vzhledem k nějaké **ortonormální** bázi; značíme

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] := \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

☞ Uvědomte si, že definice nezávisí na volbě ortonormální báze! Ze základních vlastností determinantu vyplývá, že vnější součin je antisymetrická multilineární forma

$$V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

kde počet argumentů je právě  $n = \dim V$ .

Další algebraickou operací, která úzce souvisí s obsahy rovnoběžníků (resp. s objemy obecných rovnoběžnostěnů), je tzv. **vektorový součin**. V trojrozměrném eukleidovském prostoru se jedná o zobrazení

$$V \times V \rightarrow V,$$

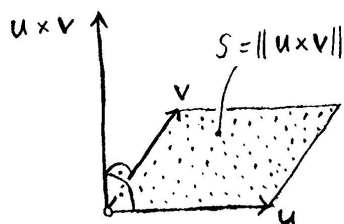
které dvojici vektorů  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  přiřazuje vektor, jenž značíme  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ . Vektorový součin lineárně závislých vektorů je  $\mathbf{0}$ ; pro lineárně nezávislé vektory je zcela určen následujícími vlastnostmi:

- (a) vektor  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  je kolmý jak k  $\mathbf{u}$ , tak k  $\mathbf{v}$ ,
- (b) trojice vektorů  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$  tvoří kladnou bázi,
- (c) velikost  $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$  je rovna obsahu rovnoběžníku určeného vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ .

Odtud plyne několik dalších více či méně známých vlastností jako např.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Obecná definice, souřadnicové vyjádření a popis všech vlastností a souvislostí vyžadují poněkud větší prostor. Proto se tématu věnujeme ještě v samostatné podkap. 11. . .

Obrázek 8.4: Vektorový součin  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  dvojice vektorů  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ .**Poznámky**

Skalární součin na vektorovém prostoru  $V$  kanonicky ztotožňuje  $V$  s jeho duálním prostorem  $V^*$ , což je vektorový prostor všech lineárních zobrazení  $V \rightarrow \mathbb{R}$ . Toto ztotožnění vypadá tak, že vektoru  $\mathbf{v} \in V$  odpovídá forma  $v : V \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že

$$v(\mathbf{x}) := \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \quad (8.12)$$

pro libovolný  $\mathbf{x} \in V$ . Konkrétně — vzhledem k nějaké ortonormální bázi — vektoru  $\mathbf{v} = (a_1, a_2, \dots)$  odpovídá lineární forma

$$v(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots,$$

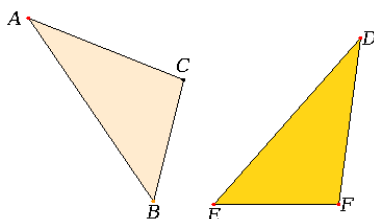
kde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in V$  lib. Tento jednoduchý poznatek se používá při rovnicovém vyjadřování podprostorů a jejich kolmých doplňků. . .

**8.2 Shodná, podobná a ekviafinní zobrazení**

Tady shromáždíme základní geometrické poznatky a ekvivalentní algebraická vymezení pro hlavní typy zobrazení mezi eukleidovskými prostory. Všechna tato zobrazení jsou zejména afinní, takže navazujeme na odst. 4.5. Ke všem zmiňovaným zobrazením se ještě budeme vracet v kapitole V.

**Shodná**

Shodné zobrazení je takové zobrazení, které zobrazuje „shodné věci na shodné“. Shodnými věcmi primárně myslíme shodné úsečky a úhly, přičemž shodnost úhlů je zaručena shodností úseček (viz předchozí rozbor nebo větu SSS). Shodnost úseček charakterizujeme pomocí jejich velikostí, tudíž

Obrázek 8.5: [Eu<sub>1</sub>] Trojúhelníky jsou shodné, právě když se shodují ve všech stranách.

shodné zobrazení je takové zobrazení, které zachovává eukleidovskou metriku:

**Definice.** Zobrazení mezi eukleidovskými prostory  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  se nazývá *shodné*, pokud pro libovolné body  $A, B \in \mathcal{E}$  platí

$$|f(A)f(B)| = |AB|.$$

Bijektivní shodné zobrazení se jmenuje *shodnost*.

Velikost úsečky je definována jako velikost odpovídajícího vektoru a ta je odvozena ze skalárního součinu. Zřejmě tedy pokud je  $f$  takové afinní zobrazení, že indukované lineární zobrazení  $\vec{f}$  zachovává skalární součin, pak  $f$  je nutně shodné. Platí také opačné tvrzení, takže předchozí definici můžeme vyslovit následovně:

**Definice** (ekvivalentní). Zobrazení mezi eukleidovskými prostory  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  je *shodné*, pokud  $f$  je afinní a indukované lineární zobrazení  $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}'$  zachovává skalární součin, tzn. pro libovolné  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \vec{\mathcal{E}}$  platí

$$\vec{f}(\mathbf{u}) \cdot \vec{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

*Dovysvětlení.* Předpokládejme, že  $f$  zachovává vzdálenosti bodů a uvažme libovolnou trojici kolineárních bodů, kde  $B$  je mezi body  $A$  a  $C$ . Tato vlastnost je charakterizována rovností  $|AC| = |AB| + |BC|$ . Abychom se neupsali, budeme značit obrazy jednotlivých bodů  $f(A) =: A'$  apod. Podle našeho předpokladu můžeme doplnit

$$|AC| = |AB| + |BC| = |A'B'| + |B'C'| = |A'C'|,$$

odkud přímo vyplývá, že:

- bod  $B'$  je mezi body  $A'$  a  $C'$ , tzn.  $f$  zobrazuje kolineární body na kolineární body,
- dělicí poměr trojice  $(A, B, C)$  je stejný jako dělicí poměr trojice  $(A', B', C')$ .

To znamená, že  $f$  je afinní zobrazení a z předpokladu nyní plyne, že indukované lineární zobrazení  $\vec{f}$  zachovává velikosti vektorů. Rádi bychom ukázali, že odtud také plyne, že  $\vec{f}$  zachovává skalární součin. K tomu stačí umět vyjádřit jakýkoli skalární součin  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  pomocí velikostí vektorů: stejně jako v předchozím odstavci, rozepsáním a úpravou  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$  snadno odvodíme

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2),$$

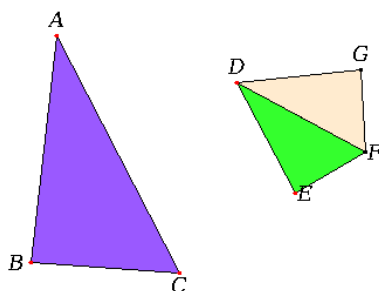
což jsme chtěli ukázat. □

### Podobná

Dalším fundamentálním pojmem eukleidovské geometrie je podobnost, které je věnována celá VI. kniha v [Eu]. Trojúhelníky jsou podobné, pokud mají po dvou shodné vnitřní úhly a, ekvivalentně, poměr velikostí odpovídajících stran je konstantní; tento poměr se nazývá koeficient podobnosti. Shodné trojúhelníky jsou tedy podobné s koeficientem 1. Ačkoli se to nezdá, právě existence podobných a neshodných trojúhelníků je jednou z klíčových vlastností eukleidovských prostorů.

Obecné podobné zobrazení je takové zobrazení, které zachovává eukleidovskou metriku až na nějaký konstantní nenulový násobek:





Obrázek 8.6: [Eu<sub>1</sub>] Trojúhelníky jsou podobné, právě když mají po dvou shodné vnitřní úhly, což je ekvivalentní s tím, že strany u shodných úhlů jsou úměrné.

**Definice.** Zobrazení mezi eukleidovskými prostory  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  se nazývá *podobné*, pokud pro libovolné body  $A, B \in \mathcal{E}$  platí

$$|f(A)f(B)| = k \cdot |AB|,$$

kde  $k > 0$  je tzv. *koeficient* podobného zobrazení  $f$ .

Bijektivní podobné zobrazení se jmenuje *podobnost*.

Z předchozí algebraické charakterizace shodných zobrazení můžeme bez problémů domyslet charakterizaci zobrazení podobných:



**Definice** (ekvivalentní). Zobrazení mezi eukleidovskými prostory  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  je *podobné* zobrazení s koeficientem  $k$ , pokud  $f$  je afinní a indukované lineární zobrazení  $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}'}$  zachovává skalární součin až na násobek  $k^2$ , tzn. pro libovolné  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \vec{\mathcal{E}}$  platí

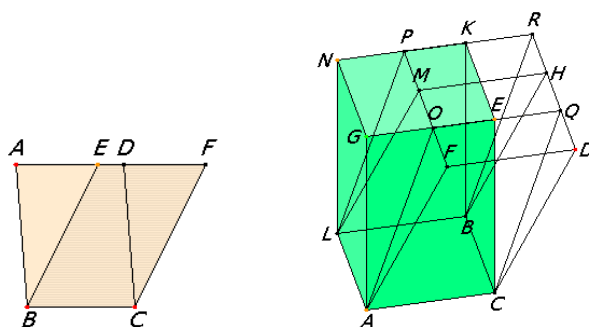
$$\vec{f}(\mathbf{u}) \cdot \vec{f}(\mathbf{v}) = k^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Podobná zobrazení s koeficientem 1 jsou shodná.

### Ekviafinní

Dalším studovaným typem zobrazení mezi eukleidovskými prostory jsou tzv. ekviafinní zobrazení, což jsou afinní zobrazení zachovávající obsahy, resp. objemy. Primárně máme na mysli rovnoběžníky, rovnoběžnostěny apod., ale odvozeně platí pro cokoli měřitelného. Několik elementárních poznatků týkajících se obsahů rovnoběžníků jsme připomněli na str. 49, viz též obr. 8.7.

Abychom si usnadnili vyjadřování, budeme v obecných formulacích mluvit o objemech *k-rozměrných rovnoběžnostěnů*: pro  $k = 2$  se jedná o obsah rovnoběžníku a pro  $k = 1$  o délku úsečky. Je zřejmé, že každé afinní zobrazení zobrazuje libovolný rovnoběžnostěn opět na rovnoběžnostěn...



Obrázek 8.7: [Eu<sub>1</sub>] Rovnoběžníky (resp. rovnoběžnostěny) se stejnou základnou a stejnou výškou mají stejný obsah (resp. objem).

**Definice.** Afinní zobrazení mezi eukleidovskými prostory  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  se nazývá *ekviafinní*, pokud libovlnný  $n$ -rozměrný rovnoběžnostěn, kde  $n = \dim \mathcal{E}$ , se zobrazuje na rovnoběžnostěn se stejným objemem.

Bijektivní ekviafinní zobrazení se jmenuje *ekviafinita*.

☞ Uvědomte si, že z předpokladu afinnosti vyplývá, že pokud se **jeden** rovnoběžnostěn zobrazí na rovnoběžnostěn se stejným objemem, potom totéž platí pro kterýkoli jiný!

Vzhledem k pozorováním okolo definice na str. 50 můžeme předjímat následující ekvivalentní algebraické vymezení:

**Definice** (ekvivalentní). Zobrazení mezi eukleidovskými prostory  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  je *ekviafinní*, pokud  $f$  je afinní a indukované lineární zobrazení  $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}'}$  zachovává **vnější součin** až na znaménko.

☞ Z výše uvedeného rozumíme ekvivalentnosti této definice zatím jen pro zobrazení v eukleidovské rovině. Ekvivalentnost v obecném případě plyne ze závěrů odst. 11.3. Pokud jsou prostory  $\mathcal{E}$  a  $\mathcal{E}'$  různé, potom uvažujeme vnější součiny na  $\mathcal{E}$  a na jeho obraze  $f(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}'$  (viz též poznámky na str. 101).

### 8.3 Cvičení



- (1) Připomeňte si z algebry důkaz Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti (8.4).
- (2) Ukažte, že níže uvedená zobrazení  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definují skalární součin a najděte nějakou ortonormální bázi  $V$ .
  - Na vektorovém prostoru  $V$  všech symetrických (resp. antisymetrických) čtvercových matic řádu  $n$ :

$$A \cdot B := \text{tr}(A \cdot B).^5$$

<sup>5</sup>Symbol  $\text{tr}$  značí stopu matice, tj. součet čísel na hlavní diagonále.


- Na vektorovém prostoru  $V = \mathbb{R}_n[x]$  všech polynomů v proměnné  $x$  stupně nejvýše  $n$ :

$$f \cdot g := \int_{-54}^{54} f(x) \cdot g(x) dx.^6$$

- (3) Osvěžte si důkazy některých klasických tvrzení eukleidovské geometrie, které jsme připomínali v předchozím textu.
- (4) Pomocí vektorové algebry dokažte nějaké klasické tvrzení, které jsme nepřipomínali (např. Thaletovu větu a větu opačnou).
- (5) Připomeňte si základní shodná, podobná a ekviafnní zobrazení a těšte se na kapitolu V.

## 9 Kolmost a kolmý průmět vektoru

### 9.1 Kolmost

Pomocí skalárního součinu jsme definovali kolmost dvou vektorů. Odtud je jasné, jak rozpoznat kolmost dvou přímek v libovolném eukleidovském prostoru. K dalšímu zobecňování pojmu kolmosti by nás měly navádět elementární definice, které jsme připomněli v odst. 1.1. Přímka je kolmá k rovině, pokud je směr přímky kolmý ke všem vektorům roviny (ekvivalentně, ke dvěma nezávislým vektorům). Dvě roviny jsou kolmé, pokud je normála jedné roviny obsažena ve druhé rovině (viz obr. 9.8). Zejména si všimněte, že pro určení kolmosti pracujeme výhradně se směry, tzn. je úplně lhostejné, zda se diskutované podprostory protínají, či nikoli. Kolmost (stejně jako posléze odchylka) je zcela určena **zaměřením** daných podprostorů. 

Inspirování předchozími příklady vyslovíme následující obecnou definici:

**Definice.** Podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  jsou *kolmé*, pokud jsou kolmá jejich zaměření  $\vec{\mathcal{B}}$  a  $\vec{\mathcal{C}}$  v  $\vec{\mathcal{E}}$ ; značíme  $\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$ .

Přitom vektorové podprostory  $\vec{\mathcal{B}}$  a  $\vec{\mathcal{C}}$  v  $\vec{\mathcal{E}}$  jsou *kolmé*, pokud  $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}^\perp$  nebo  $\vec{\mathcal{B}} \supseteq \vec{\mathcal{C}}^\perp$ , kde


$$\vec{\mathcal{C}}^\perp := \{\mathbf{x} \in \vec{\mathcal{E}} \mid \mathbf{x} \perp \vec{\mathcal{C}}\}$$

značí tzv. *kolmý doplněk podprostoru  $\vec{\mathcal{C}}$  v  $\vec{\mathcal{E}}$* .

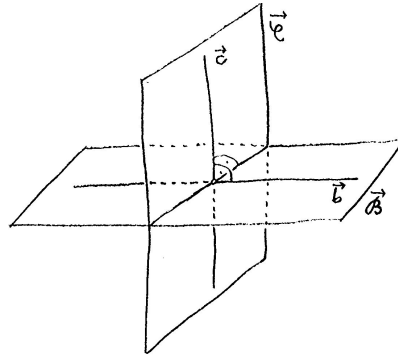
Pokud dokonce platí  $\vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{C}}^\perp$ , říkáme, že  $\vec{\mathcal{B}}$  a  $\vec{\mathcal{C}}$  (příp.  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ ) jsou *kolmé totálně*.

Z důvodů, které jsou vysvětleny v odst. 9.2, občas zdůrazňujeme, že podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  jsou *kolmé v  $\mathcal{E}$*  (místo podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v  $\mathcal{E}$  jsou kolmé).

#### Komplementárnost a důsledky

Pojmenování  $\vec{\mathcal{C}}^\perp$  kolmým doplňkem má své opodstatnění —  $\vec{\mathcal{C}}$  a  $\vec{\mathcal{C}}^\perp$  v obecném eukleidovském prostoru jsou vždy doplňkové (komplementární): 

<sup>6</sup>Symbol  $\int_a^b \dots dx$  značí určitý integrál na intervalu  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .



Obrázek 9.8: Kolmé podprostory v eukleidovském prostoru: (1)  $\vec{b} \perp \vec{c}$ , (2)  $\vec{b} \perp \vec{c}$ , (3)  $\vec{b} \perp \vec{c}$  a  $\vec{b} \subset \vec{B} \implies \vec{B} \perp \vec{C}, \dots$

**Věta.** Pro libovolný vektorový podprostor  $\vec{C} \subseteq \vec{E}$  platí, že  $\vec{C}^\perp$  je komplementární k  $\vec{C}$ , tzn.

$$\vec{C} \oplus \vec{C}^\perp = \vec{E},$$

neboli  $\vec{C} + \vec{C}^\perp = \vec{E}$  a  $\vec{C} \cap \vec{C}^\perp = \{\mathbf{o}\}$ .

Toto pozorování má následující sice triviální, ale užitečné důsledky:

**Důsledky.**

(1) Libovolný vektor  $\mathbf{v} \in \vec{E}$  lze vyjádřit **jednoznačným** způsobem ve tvaru

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \text{kde } \mathbf{u} \in \vec{C} \quad \text{a} \quad \mathbf{w} \in \vec{C}^\perp. \quad (9.13)$$

(2) **Totálně kolmé** afinní podprostory v  $\mathcal{E}$  se protínají v bodě.

Vektor  $\mathbf{u}$ , resp.  $\mathbf{w}$  z rozkladu (9.13) se jmenuje *kolmý průmět* vektoru  $\mathbf{v}$  do podprostoru  $\vec{C}$ , resp.  $\vec{C}^\perp$ . Druhé tvrzení je bezprostředním důsledkem důsledku 6.2(1).

☞ Ještě si všimneme několika jednoduchostí, jež jsou také důsledky právě formulované komplementárnosti podprostoru a jeho kolmého doplňku. Pro libovolné podprostory  $U_1$  a  $U_2$  v eukleidovském vektorovém prostoru  $V = \vec{E}$  platí:

- $(U_1^\perp)^\perp = U_1$ ,
- $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$ ,
- $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$ ,
- $U_1 \subseteq U_2 \iff U_1^\perp \supseteq U_2^\perp$ .

Odtud konečně vidíme, že výše uvedená definice kolmosti je skutečně symetrická:

$$\mathcal{B} \perp \mathcal{C} \iff (\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}^\perp \text{ nebo } \vec{\mathcal{B}} \supseteq \vec{\mathcal{C}}^\perp) \iff (\vec{\mathcal{B}}^\perp \supseteq \vec{\mathcal{C}} \text{ nebo } \vec{\mathcal{B}}^\perp \subseteq \vec{\mathcal{C}}) \iff \mathcal{C} \perp \mathcal{B}.$$

## 9.2 Poznámky, speciální a podivné případy

(1) Uvědomte si, že díky identifikaci  $V \cong V^*$  v (8.12) můžeme každou lineární rovnici s neznámými  $(x_1, x_2, \dots) = \mathbf{x}$  psát jako  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = c$ , kde  $i$ -tá souřadnice vektoru  $\mathbf{v}$  je právě koeficient u neznámé  $x_i$ . Kolmý doplněk podprostoru  $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \rangle$  má rovnicové vyjádření

$$U^\perp = \{ \mathbf{x} \in V \mid \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x} = 0, \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{x} = 0, \dots \}$$

a opačně...

(2) Ačkoli je naše definice kolmosti celkem přirozená, zahrnuje několik zvláštností, které nemusí být na první pohled patrné. Tak např. z  $\{\mathbf{o}\}^\perp = \vec{\mathcal{E}}$  plyne, že jakýkoli podprostor  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$  je kolmý ke všem triviálním podprostorům v  $\mathcal{E}$  (to jsou právě body a celý  $\mathcal{E}$ ). Toto je jen speciální a docela degenerovaný případ kolmosti, který nás příliš nezajímá. Poněkud podivnějším se může zdát následující postřeh.

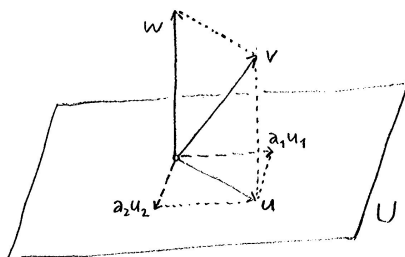
(3) Kolmost je definována pomocí kolmých doplňků. Kolmý doplněk k  $\vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{E}}$  je určen nejen podprostorem  $\vec{\mathcal{C}}$ , ale dost podstatně také **okolním** prostorem  $\vec{\mathcal{E}}$ . Pokud uvažujeme podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  v  $\mathcal{E}$ , které ve leží v nějakém meziprostoru  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ , může se klidně stát, že

*$\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  jsou kolmé v  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ , ale nemusí být kolmé v  $\mathcal{E}$ !*

Uvědomte si, že tento fenomén lze pozorovat pouze v případě, kdy  $\vec{\mathcal{B}}$  a  $\vec{\mathcal{C}}$  mají netriviální průnik, a najděte vhodný příklad. Z uvedeného je jasné, proč jsme si této zvláštnosti zatím asi nikdy nevšimli — v trojrozměrném eukleidovském prostoru takový příklad nenajdeme! ☞

## 9.3 Jak určit kolmý průmět vektoru?

Uvažujme vektor  $\mathbf{v}$  v zaměření eukleidovského prostoru  $V = \vec{\mathcal{E}}$  a nějaký podprostor  $U \subset V$  (typicky zaměření nějakého afinního podprostoru), do kterého chceme  $\mathbf{v}$  kolmo promítnout. Kolmý průmět vektoru budeme potřebovat zejména k určování odchylek podprostorů, viz následující odstavce.



Obrázek 9.9: Kolmý průmět vektoru  $\mathbf{v}$  do podprostoru  $U$ .

Přirozený návod plynoucí z rozkladu (9.13) by mohl vypadat následovně:

- (1) Vybereme nějakou bázi  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots)$  podprostoru  $U$  a nějakou bázi  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots)$  kolmého doplňku  $U^\perp$ . Vektory  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots)$  tvoří bázi  $V = U \oplus U^\perp$ , tudíž existují jednoznačně určená čísla  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  taková, že platí:<sup>7</sup>

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots + b_1 \mathbf{w}_1 + b_2 \mathbf{w}_2 + \dots$$

Kolmý průmět  $\mathbf{u}$  vektoru  $\mathbf{v}$  do  $U$  je pak roven

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots + a_k \mathbf{u}_k.$$

K určení koeficientů  $a_i, b_i$  potřebujeme řešit soustavu lineárních rovnic, jejíž rozměr je roven dimenzi prostoru  $V = \overrightarrow{\mathcal{E}}$ , což může být zbytečně velké číslo.

Početně výhodnější je zpravidla následující úvaha:

- (2) Kolmý průmět  $\mathbf{u}$  vektoru  $\mathbf{v}$  do  $U$  je charakterizován dvěma vlastnostmi:

- (a)  $\mathbf{u} \in U$ ,  
 (b)  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u} \in U^\perp$ .

Pokud máme vybránu nějakou bázi  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots)$  podprostoru  $U$ , pak předchozí dvě podmínky jsou ekvivalentní s:

- (a')  $\mathbf{u} = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots$ , pro nějaká  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  
 (b')  $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}_1, \mathbf{w} \perp \mathbf{u}_2, \dots$

S předchozím vyjádřením vektoru  $\mathbf{w}$  a pomocí skalárního součinu můžeme vyjádřit  $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}_i$  jako  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i$ . Dosadíme-li nyní (a'), potom (b') je ekvivalentní se soustavou lineárních rovnic:

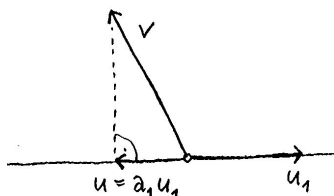
$$\begin{aligned} a_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 + \dots &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1, \\ a_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + a_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \dots &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Jedná se o soustavu, jež má právě tolik rovnic jako neznámých,  $a_i$ , a těch je právě tolik, kolik je dimenze  $U$  (tzn. nezávisle na dimenzi okolního prostoru  $V$ ). Z podstaty věci má tato soustava jednoznačně určené řešení; po vyřešení a dosazení do (a') dostáváme hledaný kolmý průmět  $\mathbf{u}$ .

### Příklad

V nejjednodušším případě, kdy  $U = \langle \mathbf{u}_1 \rangle$ , uvedená soustava sestává z jediné rovnice:  $a_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1$ . Po vyřešení a dosazení vidíme, že kolmá projekce vektoru  $\mathbf{v}$  do podprostoru  $U = \langle \mathbf{u}_1 \rangle$  je vektor:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1. \quad (9.14)$$



Obrázek 9.10: Kolmý průmět vektoru do jednorozměrného podprostoru.

## 9.4 Cvičení



- (1) Rozhodněte, zda podprostory ze cvičení 6.5 jsou kolmé.
- (2) Ve standardním eukleidovském prostoru  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$  určete všechny možné podprostory, které prochází bodem  $B = [0, 3, 2]$  a jsou kolmé k přímce

$$q = \{[1 + 7t, 2t, -3 - t] \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

- (3) Udejte příklad dvou rovin ve vhodném eukleidovském prostoru, které jsou kolmé a současně mimoběžné.
- (4) V  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$  určete kolmý průmět vektoru  $\mathbf{v}$  do podprostoru  $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ , kde

$$\mathbf{v} = (1, 2, 0, 1), \quad \mathbf{u}_1 = (-1, 0, 2, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (1, 0, -1, 0).$$

## 10 Vzdálenosti a odchyly podprostorů

### 10.1 Vzdálenosti

Vzdálenost dvou bodů v eukleidovském prostoru je určena vztahem (8.6). Vzdálenost libovolných dvou podmnožin  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v libovolném metrickém prostoru je definována jako infimum množiny všech možných vzdáleností  $|XY|$ , kde  $X \in \mathcal{B}$ ,  $Y \in \mathcal{C}$ . Pokud mají podmnožiny  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  nějaký společný bod, potom platí  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$ , a naopak (viz axióm (b) na str. 45):

$$v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0 \iff \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset.$$

Zpravidla se nezajímáme o libovolné podmnožiny, ale podprostory eukleidovského prostoru. V takovém případě se vzdálenost vždy realizuje v nějakých konkrétních bodech, tzn. diskutovaná množina má vždy minimum:

**Definice.** Vzdálenost podprostorů  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  je

$$v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) := \min\{|XY| \mid X \in \mathcal{B}, Y \in \mathcal{C}\}. \quad (10.15)$$

Geometrické určení vzdálenosti spočívá v charakterizaci takové dvojice bodů, v nichž se tato vzdálenost realizuje. Tak jsme to dělali už v konstrukční geometrii, nyní naše dosavadní zkušenosti

<sup>7</sup>Tj. souřadnice vektoru  $\mathbf{v}$  vzhledem k popsané bázi.

zobecníme. Díky tomu budeme vždycky umět poměrně jednoduše určit body  $B \in \mathcal{B}$  a  $C \in \mathcal{C}$  takové, že

$$v(B, \mathcal{C}) = |BC|,$$

aniž bychom museli minimalizovat nějakou funkci více proměnných!

### Vzdálenost bodu od podprostoru

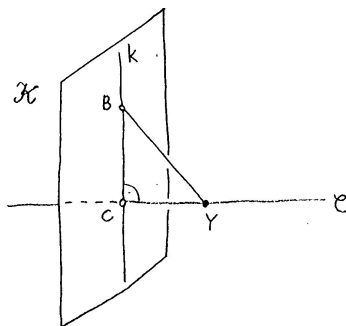
Pokud je některý z podprostorů bodem, např.  $\mathcal{B} = B$ , potom mohou nastat dvě možnosti: Když je  $B \in \mathcal{C}$ , pak vzdálenost  $v(B, \mathcal{C})$  je rovna 0. V opačném případě můžeme uvažovat následovně (viz obr. 10.11):

- (1) „spustíme kolmici“  $\mathcal{K}$  z bodu  $B$  na podprostor  $\mathcal{C}$ , tj. totálně kolmý podprostor  $\mathcal{K} = B + \vec{\mathcal{C}}^\perp$ ,
- (2) určíme „patu kolmice“, tj.  $C = \mathcal{C} \cap \mathcal{K}$ ,
- (3) prohlásíme, že  $v(B, \mathcal{C}) = |BC|$ .

To, že tato úvaha je správná a obecně platná v libovolném eukleidovském prostoru ukážeme v následující větě:

**Věta.** Pro libovolný podprostor  $\mathcal{C}$  v eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  a libovolný bod  $B \in \mathcal{E}$  platí, že  $v(B, \mathcal{C}) = |BC|$  právě tehdy, když vektor  $\vec{BC}$  je kolmý k  $\mathcal{C}$ .

V takovém případě přímku  $BC$  nazýváme *kolmicí* (bez uvozovek) z bodu  $B$  k podprostoru  $\mathcal{C}$ .



Obrázek 10.11: Vzdálenost bodu  $B$  od podprostoru  $\mathcal{C}$  je rovna vzdálenosti  $B$  od paty  $C$  kolmice  $k$ .

*Důkaz.* Z důsledku (2) věty 9.1 víme, že výše popsany bod  $C$  je určen jednoznačně. Z Pythagorovy věty plyne, že pro jakýkoli jiný bod  $Y \in \mathcal{C}$  je  $|BY|^2 = |BC|^2 + |CY|^2$ . Přitom  $|CY| > 0$ , tudíž  $|BY| > |BC|$  a vzdálenost  $|BC|$  je nejmenší možná.

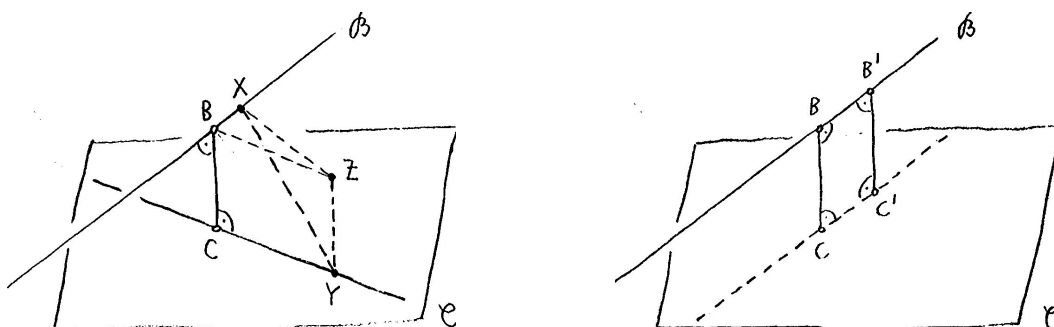
Naopak, pokud by  $C \in \mathcal{C}$  byl takový bod, že vektor  $\vec{BC}$  by nebyl kolmý k  $\mathcal{C}$ , potom pro skutečnou „patu kolmice“  $C'$  by podle předchozího odstavce platilo  $|BC| > |BC'|$  a vzdálenost  $|BC|$  by tak nebyla nejmenší možná.  $\square$



## Vzdálenost obecně

**Věta.** Pro libovolné podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  platí:

- (1) Vzdálenost podprostorů  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  je rovna vzdálenosti bodů  $B \in \mathcal{B}$  a  $C \in \mathcal{C}$  právě tehdy, když vektor  $\overrightarrow{BC}$  je kolmý k  $\mathcal{B}$  a současně k  $\mathcal{C}$ .
- (2) Navíc dvojice  $B$  a  $C$  z předchozího vyjádření je určena jednoznačně právě tehdy, když podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  nemají žádné společné směry.



Obrázek 10.12:  $|BC| = \min \iff \overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{\mathcal{B}}^\perp \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}^\perp = (\overrightarrow{\mathcal{B}} + \overrightarrow{\mathcal{C}})^\perp$ . Navíc  $B$  a  $C$  jsou určeny jednoznačně  $\iff \overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}} = \{\mathbf{o}\}$ .

*Důkaz.* Podprostory mají nulovou vzdálenost, právě když mají neprázdný průnik. V tomto případě je zdůvodnění obou částí věty obzvláště jednoduché. . . Dokážeme, že věta platí také v případě, že vzdálenost je nenulová, tzn. podprostory se neprotínají.  $\Leftarrow$

- (1) Nejprve předpokládejme, že  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = |BC|$ , tzn.  $|BC| = v(B, C) = v(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ . Z předchozí věty plyne, že  $\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{C}$  a současně  $\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{B}$ , tj. vektor  $\overrightarrow{BC}$  je kolmý k oběma podprostorům.

Naopak, předpokládejme, že vektor  $\overrightarrow{BC}$  je kolmý k oběma podprostorům. Chceme ukázat, že pro libovolné body  $X \in \mathcal{B}$ ,  $Y \in \mathcal{C}$  platí  $|XY| \geq |BC|$  (viz obr. 10.12). Nejprve doplníme pomocný bod  $Z$  tak, aby  $BCYZ$  byl rovnoběžník, tj. tak, aby  $\overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{BC}$ . Podle předpokladu je  $\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{C}$ , tudíž  $BCYZ$  je pravoúhelník; zejména platí  $\overrightarrow{ZY} \perp \overrightarrow{ZB}$ . Podle předpokladu taky platí  $\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{B}$ , tudíž  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ZY} \perp \overrightarrow{BX}$ . Dohromady dostáváme, že  $\overrightarrow{ZY} \perp \overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{ZX}$ . To znamená, že trojúhelník  $XZY$  je pravoúhlý. Z Pythagorovy věty vzhledem k tomuto trojúhelníku plyne  $|XY| \geq |ZY| = |BC|$ , což znamená, že  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = |BC|$ .

- (2) Předpokládejme, že  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = |BC|$  a že  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  mají nějaký společný směr. Ozn.  $\mathbf{u} \in \overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}$  libovolný nenulový společný vektor a uvažme body  $B' = B + \mathbf{u} \in \mathcal{B}$  a  $C' = C + \mathbf{u} \in \mathcal{C}$ . Protože  $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ , je  $BB'CC'$  rovnoběžník a tudíž platí  $|B'C'| = |BC| = v(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ .

Naopak, předpokládejme, že  $B, B' \in \mathcal{B}$ , resp.  $C, C' \in \mathcal{C}$  jsou navzájem různé dvojice bodů takové, že  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = |BC| = |B'C'|$ . Potom podle předchozí části věty jsou vektory  $\overrightarrow{BC}$

a  $\overrightarrow{B'C'}$  kolmé jak k  $\mathcal{B}$ , tak k  $\mathcal{C}$ . To znamená, že  $BB'CC'$  je pravoúhelník. Odtud zejména plyne, že  $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$ , což je evidentně (nenulový) společný vektor z  $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}$ .  $\square$

V případech s nulovou vzdáleností se minimum realizuje v jakémkoli společném bodě  $B = C$  podprostorů a vektor  $\overrightarrow{BC} = \mathbf{o}$  je zřejmě kolmý ke všemu.

V případech s nenulovou vzdáleností je  $BC$  úsečka a je to nejkratší možná příčka podprostorů  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ . Každou takovou příčku nazýváme *osou*  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ . Osa je jediná, právě když průnik  $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}$  obsahuje pouze nulový vektor. Obecně jsou všechny osy parametrizovány právě prvky tohoto průniku, tedy společnými vektory obou podprostorů.

## 10.2 Jak určit vzdálenost podprostorů?

### Vzdálenost bodu od podprostoru

Jistý návod v případě, že jeden z podprostorů je bod, jsme představili výše. Pro porovnání rychle zopakujeme, předp.  $\mathcal{B} = B$ :

- (1) Určíme totálně kolmý podprostor  $\mathcal{K} = B + \overrightarrow{\mathcal{C}}^\perp$ , určíme průsečík  $C = \mathcal{C} \cap \mathcal{K}$ , vyjádříme  $|BC|$  a podtrhneme  $v(B, \mathcal{C}) = |BC|$ .

Při určování bodu  $C$  řešíme průnik dvou komplementárních podprostorů v  $\mathcal{E}$ , což může představovat zbytečně velkou soustavu rovnic. Početně výhodnější je zpravidla následující postup, který navíc budeme schopni okamžitě zobecnit pro libovolné podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ . Ignorujeme doplňkový podprostor  $\mathcal{K}$  a hledáme přímo patu kolmice, tj. bod  $C$ :

- (2) Pata  $C$  kolmice je charakterizována dvěma vlastnostmi:

- (a)  $C \in \mathcal{C}$ ,
- (b)  $\overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{\mathcal{C}}^\perp$ .

Předpokládejme, že  $\mathcal{C}$  je zadán parametricky  $\mathcal{C} = Y + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \rangle$  a vektory  $(\mathbf{u}_i)$  jsou lineárně nezávislé. Potom předchozí dvě podmínky jsou ekvivalentní s:

- (a')  $C = Y + a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots$ , pro nějaká  $a_i \in \mathbb{R}$ ,
- (b')  $\overrightarrow{BC} \perp \mathbf{u}_1, \overrightarrow{BC} \perp \mathbf{u}_2, \dots$

Nyní  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BY} + a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots$ . Vyjádříme-li  $\overrightarrow{BC} \perp \mathbf{u}_i$  pomocí skalárního součinu, je (b') ekvivalentní se soustavou lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 + \dots &= \overrightarrow{YB} \cdot \mathbf{u}_1, \\ a_1\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + a_2\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \dots &= \overrightarrow{YB} \cdot \mathbf{u}_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Jedná se o soustavu, jež má právě tolik rovnic jako neznámých, a těch je právě tolik, kolik je dimenze  $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ . Řešení je určeno jednoznačně, po dosazení do (a') dostáváme hledanou patu kolmice  $C$  a zbytek je jasný.

Není náhodou, že nám tento popis něco připomíná. Ve skutečnosti nejde o nic jiného než o výpočet kolmé projekce  $\mathbf{u}$  vektoru  $\mathbf{v} = \overrightarrow{YB}$  do podprostoru  $U = \overrightarrow{\mathcal{C}}$  a následné dosazení  $C = Y + \mathbf{u}$ , viz obr. 10.11, příp. 10.12.



### Vzdálenost bodu od nadroviny

Ve speciálním případě, kdy  $\mathcal{C}$  je nadrovinou v  $\mathcal{E}$  můžeme pozorovat zajímavé zjednodušení, které se hodí zejména v případě, kdy  $\mathcal{C}$  je dána rovnicí

$$\mathcal{C} = \{X \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{YX} \cdot \mathbf{n} = 0\},$$


kde  $Y$  je nějaký (libovolný) bod v  $\mathcal{C}$  a  $\mathbf{n}$  je normálový vektor.

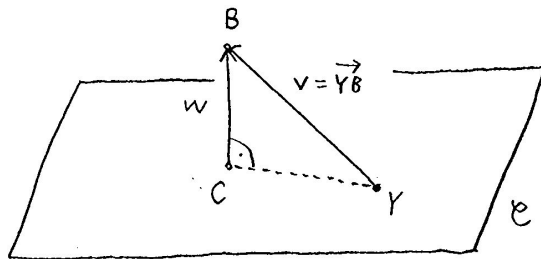
Nesoustředíme se na průmět  $\mathbf{u} \in \vec{\mathcal{C}}$ , ale raději na průmět  $\mathbf{w} \in \vec{\mathcal{C}}^\perp = \langle \mathbf{n} \rangle$ . Podle (9.14) víme, že tento průmět je

$$\mathbf{w} = \frac{\overrightarrow{YB} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n}. \quad (10.16)$$

Odtud umíme vyjádřit patu kolmice  $C = B - \mathbf{w}$ . Vzdálenost je rovna velikosti vektoru  $\mathbf{w}$ :

$$v(B, \mathcal{C}) = \frac{|\overrightarrow{YB} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}. \quad (10.17)$$


(V různých učebnicích bývá tato rovnost formulována různými způsoby — porovnejte všechna vyjádření, která najdete.) 



Obrázek 10.13: Vzdálenost bodu od nadroviny.

Rovnost (10.17) lze alternativně odvodit z pravoúhlého trojúhelníku  $YCB$  jako na obr. 10.13: Značí-li  $\alpha$  velikost úhlu  $CYB$ , pak zřejmě platí

$$v(B, \mathcal{C}) = \|\overrightarrow{YB}\| \cdot \sin \alpha.$$

Odchylky diskutujeme hned v následujících odstavcích, takže pokud nahlédneme na str. 67 a dosadíme (10.19) do předchozího vyjádření, zjistíme, že všechno krásně souhlasí. . . 

### Vzdálenost obecně

Slibované zobecnění předcházejícího postupu (2) pro obecné podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{E}$  zní:

(2') Dvojice bodů  $B$  a  $C$ , pro niž platí  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = |BC|$ , je podle věty 10.1 charakterizována následujícími vlastnostmi:

- (a)  $B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}$ ,
- (b)  $\overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{B}}^\perp \cap \vec{\mathcal{C}}^\perp$ .

Předpokládejme, že oba podprostory jsou dány parametricky  $\mathcal{B} = X + \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ ,  $\mathcal{C} = Y + \langle \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_\ell \rangle$ . Potom předchozí podmínky jsou ekvivalentní s:

- (a')  $B = X + a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_k \mathbf{u}_k$ ,  $C = Y + a_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \dots + a_\ell \mathbf{u}_\ell$ , pro nějaká  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  
 (b')  $\overrightarrow{BC} \perp \mathbf{u}_i$ , pro všechna  $i = 1, \dots, \ell$ .

Nyní

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{XY} - a_1 \mathbf{u}_1 - \dots - a_k \mathbf{u}_k + a_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \dots + a_\ell \mathbf{u}_\ell$$

a (b') je ekvivalentní se soustavou lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} -a_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 - \dots + a_\ell \mathbf{u}_\ell \cdot \mathbf{u}_1 &= \overrightarrow{YX} \cdot \mathbf{u}_1, \\ -a_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 - \dots + a_\ell \mathbf{u}_\ell \cdot \mathbf{u}_2 &= \overrightarrow{YX} \cdot \mathbf{u}_2, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{10.18}$$

Po vyřešení soustavy a dosazení do (a') dostáváme hledanou dvojici bodů  $B$  a  $C$ ...

Všimněte si, že tentokrát nemůžeme jen tak předpokládat lineární nezávislost vektorů ( $\mathbf{u}_i$ ), nicméně můžeme aspoň předpokládat, že každá skupina ( $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ ) a ( $\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_\ell$ ) je tvořena nezávislými vektory. Přesto zmiňovaná soustava nemusí být jednoznačně řešitelná, což nám říká něco o vzájemné poloze  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ !

### 10.3 Důležité poznámky

#### Vzájemná poloha alternativně

Z předchozího návodu se mimo jiné dovídáme něco o vzájemné poloze podprostorů, jejichž vzdálenost určujeme:

Pokud jsou podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  incidentní nebo různoběžné, pak  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$ . Tyto dva případy jsou rozlišeny tím, že v prvním případě je dimenze prostoru řešení soustavy (10.18) rovna dimenzi menšího z podprostorů  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ . Stejným způsobem umíme rozlišit rovnoběžnost od mimoběžnosti, kdy  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \neq 0$ . Pokud kvůli stručnosti označíme

$$v := v(\mathcal{B}, \mathcal{C}), \quad d := \text{dimenze prostoru řešení soustavy (10.18)},^8 \quad m := \min\{\dim \mathcal{B}, \dim \mathcal{C}\},$$

potom charakterizace vzájemných poloh afinních podprostorů může vypadat následovně:

**Věta.** *Afinní podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  jsou*

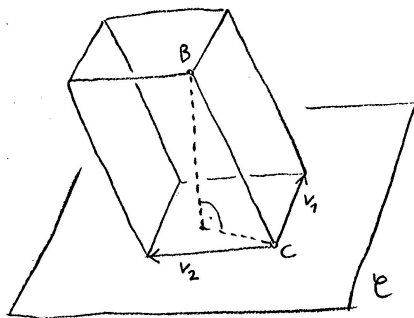
- *incidentní*  $\iff v = 0$  a  $d = m$ ,
- *různoběžné*  $\iff v = 0$  a  $d < m$ ,
- *rovnoběžné různé*  $\iff v \neq 0$  a  $d = m$ ,
- *mimoběžné*  $\iff v \neq 0$  a  $d < m$ .

Celkem tedy vidíme, že vzájemnou polohu a vzdálenost podprostorů lze určit současně z jednoho počítání.

<sup>8</sup>..., což je právě dimenze  $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}$ ,...

### Vzdálenost alternativně

V podkap. 11 se budeme zabývat obsahy a objemy, a to zejména rovnoběžníků a rovnoběžnostěnů. Objem rovnoběžnostěny je roven obsahu základny násobenému velikostí výšky. Odtud je možné vyjádřit výšku rovnoběžnostěny, která často reprezentuje vzdálenost nějakých podprostorů, viz motivační obr. 10.14. Vtip je v tom, že tento postřeh lze zobecnit pro libovolné podprostory v libovolném eukleidovském prostoru. Tímto způsobem pak budeme umět vyjadřovat vzdálenosti, aniž bychom řešili jakoukoli soustavu rovnic, viz větu na str. 11.4 na str. 79.



Obrázek 10.14: Velikost výšky naznačeného rovnoběžnostěny je rovna vzdálenosti bodu  $B$  od roviny  $C = C + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ .

Uvědomte si, že takto nikdy neurčíme dvojici bodů, v nichž se vzdálenost realizuje, natož pak vzájemnou polohu podprostorů. . .

## 10.4 Odchylky

Odchylka dvou nenulových vektorů je definována rovností (8.10), příp. (8.9). Podobně jako u kolmosti, odchylka dvou afinních podprostorů je zcela určena jejich **zaměřením**.

Pokud mají zaměření triviální průnik, pak je definice jasná — stačí uvažovat minimum ze všech možných odchylek mezi vektory, z nichž jeden patří do jednoho a druhý do druhého podprostoru. V opačném případě by tato definice automaticky dávala 0, což jistě nekoresponduje s našimi představami o odchylce. Modelový příklad tohoto typu představují dvě roviny jako na obr. 10.15 — odchylka rovin je odchylkou přímk, z nichž každá je obsažena v jedné z daných rovin a obě mají tu vlastnost, že jsou **kolmé** k průniku rovin. V případě, kdy zaměření mají netriviální průnik, musíme navíc rozlišovat případ, kdy jeden podprostor je obsažen ve druhém — v tomto případě je odchylka rovna 0 (skutečně musíme deklarovat samostatně, neboť předchozí konstrukce je v této situaci jaksi degenerovaná).

**Definice.** *Odchylka netriviálních afinních podprostorů  $B$  a  $C$  v eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  je rovna odchylce jejich zaměření  $\vec{B}$  a  $\vec{C}$  v  $\vec{\mathcal{E}}$ :*

$$\sphericalangle(B, C) := \sphericalangle(\vec{B}, \vec{C}).$$

Přitom *odchylka* netriviálních vektorových podprostorů  $\vec{B}$  a  $\vec{C}$  v zaměření  $\vec{\mathcal{E}}$  je definována následovně:

(a) pokud  $\vec{B} \cap \vec{C} = \{\mathbf{o}\}$ , pak

$$\sphericalangle(\vec{B}, \vec{C}) := \min\{\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u} \in \vec{B}, \mathbf{v} \in \vec{C}\},$$

(b) pokud  $\vec{B} \subseteq \vec{C}$ , pak

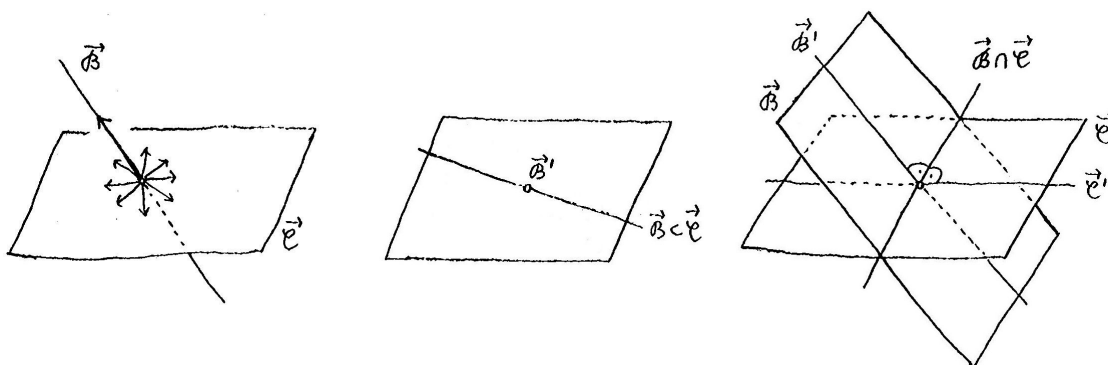
$$\sphericalangle(\vec{B}, \vec{C}) := 0,$$

(c) pokud  $\vec{B} \not\subseteq \vec{C}$  a  $\vec{B} \cap \vec{C} \neq \{\mathbf{o}\}$ , pak

$$\sphericalangle(\vec{B}, \vec{C}) := \sphericalangle(\vec{B}', \vec{C}'),$$

kde  $\vec{B}'$ , resp.  $\vec{C}'$  jsou podprostory obsažené v  $\vec{B}$ , resp.  $\vec{C}$ , jež jsou **kolmé** k průniku  $\vec{B} \cap \vec{C}$ , tj.  $\vec{B}' = \vec{B} \cap (\vec{B} \cap \vec{C})^\perp$  a  $\vec{C}' = \vec{C} \cap (\vec{B} \cap \vec{C})^\perp$ .

Uvědomte si, že v případě (c) se odkazujeme na definici podle (a), což je v naprostém pořádku, neboť podprostory  $\vec{B}'$  a  $\vec{C}'$  mají vždy triviální průnik (a současně jsou oba netriviální)...



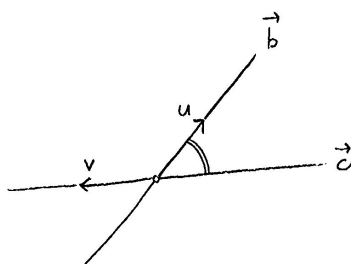
Obrázek 10.15: K definici odchylky  $\vec{B}$  a  $\vec{C}$ : (a) odchylka je minimem ze všech možných odchylek, (b) odchylka je 0, (c) odchylka je odchylkou menších podprostorů  $\vec{B}'$  a  $\vec{C}'$ , jež jsou kolmé k průniku.

### Odchylka dvou přímek

Jsou-li oba podprostory přímky se zaměřeními  $\vec{b} = \langle \mathbf{u} \rangle$  a  $\vec{c} = \langle \mathbf{v} \rangle$ , pak je podle definic jasné, že

$$\sphericalangle(b, c) = \arccos \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}.$$

Pravá strana rovnosti skutečně nezávisí na výběru směrových vektorů a absolutní hodnota v čitateli zaručuje, že ze dvou možných odchylek vybíráme právě tu menší ( $\cos \alpha \geq 0 \iff \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ).



Obrázek 10.16: Odchylka přímek.

### Odchylka přímky od podprostoru

Pokud není přímka kolmá k podprostoru, pak zdravý názor velí přímku kolmo promítnout do podprostoru a měřit odchylku těchto dvou přímek. Následující věta ukazuje, že tento nápad je platný v libovolném eukleidovském prostoru:

**Věta.** Pro libovolnou přímku  $b$  a libovolný podprostor  $C$  v eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  platí:

(1) pokud  $b \perp C$ , potom  $\sphericalangle(b, C) = \frac{\pi}{2}$ ,

(2) pokud  $b \not\perp C$ , potom  $\sphericalangle(b, C) = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{u}_C)$ , kde  $\mathbf{u} \in \vec{b}$  je libovolný směr přímky a  $\mathbf{u}_C \in \vec{C}$  je jeho kolmý průmět do  $\vec{C}$ .

*Důkaz.* První případ je jasný. Druhý případ zahrnuje také možnost  $b \parallel C$ , tj.  $\vec{b} \subseteq \vec{C}$ , kdy podle definice vychází  $\sphericalangle(b, C) = 0$ : kolmý průmět v tomto případě je  $\mathbf{u}_C = \mathbf{u}$ , tedy  $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{u}_C) = 0$  a rovnost platí. Uvažme generický případ, kdy  $b \not\perp C$  a  $b \not\parallel C$ :

Pro libovolný vektor  $\mathbf{v} \in \vec{C}$  označíme  $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{u}_C)$ ,  $\alpha' = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . Chceme dokázat, že  $\alpha \leq \alpha'$  nebo ekvivalentně  $\cos \alpha \geq \cos \alpha'$ . Nejprve si všimneme klíčového předpokladu, tj.  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_C) \perp \vec{C}$ , což v důsledku znamená, že  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_C \cdot \mathbf{v}$ . Odtud a z Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti (8.4) dostáváme:

$$\cos \alpha' = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{u}_C \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \leq \frac{\|\mathbf{u}_C\| \cdot \|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{u}_C\|}{\|\mathbf{u}\|} = \cos \alpha. \quad \square$$

Uvědomte si, že z uvedeného také přímo vyplývá, že

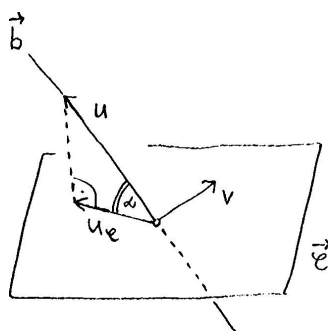
$$\sphericalangle(b, C) + \sphericalangle(b, C^\perp) = \frac{\pi}{2}.$$

Tento postřeh lze dále zobecňovat pro obecnější situace, viz následující odstavce.

### Odchylka přímky od nadroviny

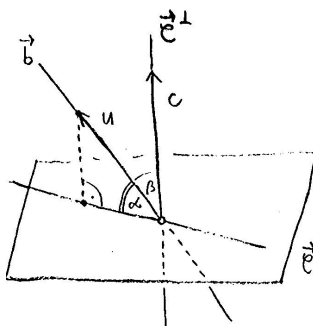
Jak už jsme zvyklí, když je  $C$  nadrovinou, pozorujeme jistá zjednodušení: Z poslední poznámky a známého faktu  $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$  odvozuje

$$\sphericalangle(b, C) = \arcsin \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}|}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{c}\|}, \quad (10.19)$$



Obrázek 10.17: Odchylka přímky a obecného podprostoru.

kde  $\mathbf{c} \in \vec{\mathcal{C}}^\perp$  značí normálu nadroviny (a  $\mathbf{u} \in \vec{b}$  směr přímky stejně jako výše).

Obrázek 10.18: Odchylka přímky a nadroviny:  $\cos \beta = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$ .

### Odchylka dvou nadrovin

Jsou-li oba podprostory nadrovinami s normálovými vektory  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{c}$ , pak ve všech případech, které si umíme představit platí

$$\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \sphericalangle(\langle \mathbf{b} \rangle, \langle \mathbf{c} \rangle) = \arccos \frac{|\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|}{\|\mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{c}\|}.$$

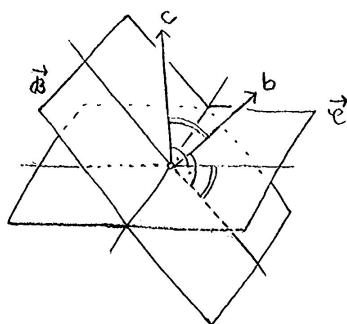
Tato rovnost samozřejmě platí pro libovolné nadroviny v jakémkoli eukleidovském prostoru; obecné zdůvodnění lze najít v [HoJa, věta 16.5].

### Odchylky obecně

Obecně stačí diskutovat pouze takové podprostory, jejichž zaměření mají triviální průnik. Nej-jednodušší další případ, který není zahrnut mezi předchozími, může být reprezentován dvěma rovinami ve čtyřrozměrném prostoru. Geometrické řešení této (stejně jako jakékoli jiné) úlohy spočívá v nalezení takové dvojice vektorů  $\mathbf{u} \in \vec{\mathcal{B}}$  a  $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{C}}$ , že

$$\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$





Obrázek 10.19: Odchylka nadrovin.

Dosud jsme vystačili s kolmým promítáním vektoru do podprostoru, nejinak tomu bude i nyní. Pro výše jmenované vektory totiž platí

$$\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sphericalangle(\mathbf{u}, \vec{\mathcal{C}}) = \sphericalangle(\vec{\mathcal{B}}, \mathbf{v}),$$

což podle věty na str. 67 znamená, že tato odchylka je rovna buď  $\frac{\pi}{2}$  nebo odchylce

$$\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{u}_C) = \sphericalangle(\mathbf{v}_B, \mathbf{v}),$$

kde  $\mathbf{u}_C$  značí kolmý průmět vektoru  $\mathbf{u}$  do  $\vec{\mathcal{C}}$  a  $\mathbf{v}_B$  značí kolmý průmět vektoru  $\mathbf{v}$  do  $\vec{\mathcal{B}}$ . Odtud zejména vyplývá, že  $\mathbf{u}_C \in \langle \mathbf{v} \rangle$  a současně  $\mathbf{v}_B \in \langle \mathbf{u} \rangle$ . Pokud znovu kolmo promítneme  $\mathbf{u}_C$  do  $\vec{\mathcal{B}}$ , resp.  $\mathbf{v}_B$  do  $\vec{\mathcal{C}}$  dostaneme

$$\mathbf{u}_{CB} = b \cdot \mathbf{u}, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{v}_{BC} = c \cdot \mathbf{v}$$

pro nějaká  $b, c \in \mathbb{R}$ . Jinými slovy, vektor  $\mathbf{u} \in \vec{\mathcal{B}}$  je charakteristickým vektorem (odpovídajícím charakteristickému číslu  $b$ )<sup>9</sup> transformace  $\vec{\mathcal{B}} \rightarrow \vec{\mathcal{B}}$  složené ze dvou zmiňovaných kolmých projekcí, které označíme  $p_C : \vec{\mathcal{B}} \rightarrow \vec{\mathcal{C}}$  a  $p_B : \vec{\mathcal{C}} \rightarrow \vec{\mathcal{B}}$ . Podobně pro vektor  $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{C}}$ ...

Odtud by mělo být jasné, jak určit odchylku  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v případě, že nemůžeme použít žádný z předchozích speciálních postřehů:

- popíšeme nějak kolmé projekce  $p_C : \vec{\mathcal{B}} \rightarrow \vec{\mathcal{C}}$  a  $p_B : \vec{\mathcal{C}} \rightarrow \vec{\mathcal{B}}$ ,
- uvažujeme složené zobrazení  $p_B \circ p_C : \vec{\mathcal{B}} \rightarrow \vec{\mathcal{B}}$ ,
- určíme charakteristické vektory transformace  $p_B \circ p_C$  (může jich být víc!),
- odchylka  $\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  je pak určena takovou dvojicí vektorů  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{u}_C = p_C(\mathbf{u})$ , pro něž je  $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{u}_C)$  nejmenší,
- následující věta dodává, že takové  $\mathbf{u}$  odpovídá největšímu charakteristickému číslu  $b$ .

(Podobně můžeme uvažovat složení  $p_C \circ p_B : \vec{\mathcal{C}} \rightarrow \vec{\mathcal{C}}$ ; výsledek je samozřejmě stejný.)

Poznámka ke třetímu kroku: transformace tohoto typu jsou docela speciální a obecně pro ně platí, že z jejich charakteristických vektorů lze vždy sestavit bázi prostoru  $\vec{\mathcal{B}}$ .<sup>10</sup> Pokud má

<sup>9</sup>Připomenutí pojmů charakteristických čísel a vektorů najdete na str. 111.

<sup>10</sup>Jedná se o tzv. *symetrické* lineární transformace a zdůvodnění uvedeného faktu najdete v jakékoli učebnici lineární algebry, která se o těchto transformacích zmiňuje; viz např. [Zl, část 23.3].

transformace aspoň dvě různá charakteristická čísla, je třeba v následujícím kroku vybírat. Pokud by náhodou byla všechna stejná, tak to znamená, že transformace je násobkem identity a je jedno, který vektor vybereme. . .

**Věta.** Pro libovolné podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ , jež nemají žádné společné směry, platí:

(1) pokud  $\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$ , potom  $\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{\pi}{2}$ ,

(2) pokud  $\mathcal{B} \not\perp \mathcal{C}$ , potom  $\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{\mathcal{C}}) = \sphericalangle(\mathbf{v}_{\mathcal{B}}, \mathbf{v})$ , kde  $\mathbf{u} \in \vec{\mathcal{B}}$ , resp.  $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{C}}$  je charakteristický vektor odpovídající největšímu charakteristickému číslu transformace  $p_{\mathcal{B}} \circ p_{\mathcal{C}} : \vec{\mathcal{B}} \rightarrow \vec{\mathcal{B}}$ , resp.  $p_{\mathcal{C}} \circ p_{\mathcal{B}} : \vec{\mathcal{C}} \rightarrow \vec{\mathcal{C}}$ .

V každém případě můžeme dodat:

(3) pokud  $b$  a  $c$  jsou největší charakteristická čísla zmiňovaných transformací, potom je  $0 \leq b = c < 1$  a  $\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \arccos \sqrt{b} = \arccos \sqrt{c}$ .

První část tvrzení je jasná a uvádíme ji hlavně pro zdůraznění podobnosti s větou na str. 67 (onu větu nyní chápeme jako důsledek věty právě formulované). V předcházející diskuzi jsme zdůvodnili téměř všechno. Potřebujeme si uvědomit už jen několik drobností:

Odchylka  $\alpha := \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{\mathcal{C}})$  je minimální právě tehdy, když  $\cos \alpha$  je maximální. Navíc pro vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{u}_{\mathcal{C}}$  a  $\mathbf{u}_{\mathcal{B}}$  platí

$$\cos \alpha = \frac{\|\mathbf{u}_{\mathcal{C}}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\|\mathbf{u}_{\mathcal{B}}\|}{\|\mathbf{u}_{\mathcal{C}}\|}.$$

Přitom  $\mathbf{u}_{\mathcal{B}} = b\mathbf{u}$ , což po dosazení a úpravě dává

$$b = \frac{\|\mathbf{u}_{\mathcal{C}}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} = \cos^2 \alpha.$$

⇒ Přitom  $0 \leq \|\mathbf{u}_{\mathcal{C}}\| < \|\mathbf{u}\|$ , tudíž  $0 \leq b < 1$  a  $\cos \alpha = \sqrt{b}$ . Podobně můžeme argumentovat s vektorem  $\mathbf{v}$ , což pochopitelně přeskakujeme. Uvědomte si, že tvrzení (3) skutečně platí i v případě, kdy  $\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$ . □

## 10.5 Důležité poznámky

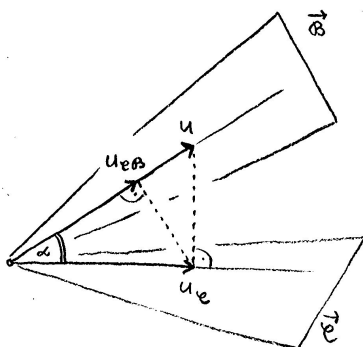
Tím diskuzi o odchylkách končíme, což však neznamená, že jsme téma zcela vyčerpali. Na závěr znovu upozorňujeme na zvláštní fenomén, který v obecných eukleidovských prostorech musíme mít na zřeteli:

*Odchylka  $\frac{\pi}{2}$  není totéž co kolmost!*

Pokud mají zaměření podprostorů triviální průnik, pak to totéž je; v opačném případě můžeme nanejvýš říct, že

$$\mathcal{B} \perp \mathcal{C} \implies \sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{\pi}{2}.$$

⇒ Opačná implikace obecně neplatí — nejmenší protipříklad lze vymyslet v prostoru dimenze 4, viz odst. 9.2 pro nápovědu. . .



Obrázek 10.20: K obecné diskuzi o odchylce. . .

## 10.6 Cvičení

- (1) Pro všechny možné dvojice podprostorů z předchozích cvičení určete jejich vzdálenosti a odchylky.
- (2) Neopomeňte zejména podprostory ze cvičení 6.5(1) a zamyslete se znovu nad jejich vzájemnou polohou.
- (3) Pro nějaké jednoduché, ale netriviální, případy zkuste určit jejich vzdálenost a odchylku podle definice.
- (4) Ve vhodném eukleidovském prostoru udejte příklad dvou nadrovin, které mají vzdálenost 2.
- (5) Ve vhodném eukleidovském prostoru udejte příklad dvou podprostorů, které mají odchylku  $\frac{\pi}{2}$  a přitom nejsou kolmé.

## 11 Obsahy, objemy a další

Základní poznatky o obsahích rovnoběžníků a objemech rovnoběžnostěnů jsme si zopakovali na str. 49. V celé této podkapitole bereme tyto poznatky jako výchozí. Nejprve zformulujeme obecnou definici objemu ( $k$ -rozměrného) rovnoběžnostěnu. Následně se budeme zamýšlet nad tím, jak takové objemy efektivně počítat. Jak jsme už dříve ukázali, k tomu se bude báječně hodit **determinant** v různých podobách, viz pojem vnějšího součinu, Gramova determinantu, ale též vektorového součinu. . .

### 11.1 Obecná definice

$k$ -rozměrný rovnoběžnostěn je určen jedním vrcholem a  $k$ -ticí lineárně nezávislých vektorů. Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$  v obecném eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  budeme značit  $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$ .<sup>11</sup> Nejjednodušší případy jsou tyto:

- jsou-li určující vektory ortonormální, pak se jedná o krychli a  $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = 1$ ,

<sup>11</sup>Pro jednoduchost mluvíme v obecných formulacích pouze o rovnoběžnostěnech, přičemž máme na mysli, že 2-rozměrný rovnoběžnostěn je rovnoběžník, 1-rozměrný rovnoběžnostěn je úsečka, příp. 0-rozměrný rovnoběžnostěn je bod.

- jsou-li tyto vektory ortogonální, pak se jedná o kvádr a  $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \dots$ .

Obecná induktivní definice vypadá následovně:

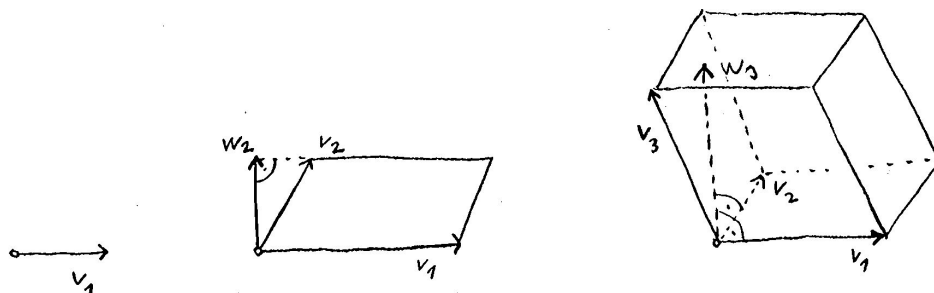
- obsah rovnoběžníku = velikost jedné strany krát velikost výšky na tuto stranu,
- objem rovnoběžnostěnu = obsah jedné stěny krát velikost výšky na tuto stěnu,
- atd...

Vzhledem k zavedenému značení můžeme tyto vztahy zapsat následovně:

**Definice.** Objem  $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$  rovnoběžnostěnu určeného vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$  je nezáporné reálné číslo takové, že

- $V(\mathbf{v}_1) := \|\mathbf{v}_1\|$ ,
- $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\|$ , kde  $\mathbf{w}_2$  kolmý průmět vektoru  $\mathbf{v}_2$  do  $\mathbf{v}_1^\perp$ ,
- $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) := V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \cdot \|\mathbf{w}_3\|$ , kde  $\mathbf{w}_3$  je kolmý průmět vektoru  $\mathbf{v}_3$  do  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$ ,
- atd...

Vektor  $\mathbf{w}_2$ , resp.  $\mathbf{w}_3$  představuje výšku rovnoběžníku, resp. rovnoběžnostěnu; číslo  $\|\mathbf{w}_2\|$ , resp.  $\|\mathbf{w}_3\|$  je velikost této výšky.



Obrázek 11.21: K objemu rovnoběžnostěnu...

Přímo z definice vidíme, že

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3, \dots) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\| \cdot \|\mathbf{w}_3\| \cdot \dots,$$

kde vektory  $\mathbf{w}_i$  jsou navzájem kolmé vektory postupně sestavené podle návodu výše. Tento nakolmovací algoritmus jsme v algebře jmenovali jako tzv. Gramův–Schmidtův proces...

### Poznámky

- ⇒ (1) Vyjádřit obsah rovnoběžníku podle definice je snadné:

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin \alpha, \quad (11.20)$$

kde  $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ . Počítání objemu vícerozměrného rovnoběžnostěnu podle definice však může být docela otravné, proto se za chvíli poohlédneme po nějakých zjednodušeních. . .

(2) Definici  $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$  můžeme bez problémů rozšířit pro libovolné, tedy ne nutně nezávislé vektory, což je často výhodné nerozlišovat. Přímo z definice plyne, že  $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$  je roven 0 právě tehdy, když vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$  jsou lineárně závislé.<sup>12</sup>

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = 0 \iff \text{vektory } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \text{ jsou lineárně závislé.}$$

Tedy  $k$ -rozměrný objem chápeme jako zobrazení

$$V: \vec{\mathcal{E}} \times \dots \times \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

které  $k$ -tici vektorů přiřazuje nezáporné reálné číslo.

(3) Z úvodních poznámek okolo obr. 8.3 na str. 50 víme, že objem rovnoběžnostěnu úzce souvisí s determinantem, resp. s vnějším součinem vektorů. V následujících odstavcích tento poznatek náležitě zobecníme a zdůvodníme. Tento fakt by neměl být žádným velkým překvapením, když si uvědomíme, že jak objem, tak vnější součin mají velmi podobné vlastnosti. Kromě výše uvedeného poznatku (o tom, kdy je výsledek 0) je to zejména ještě následující vlastnost:

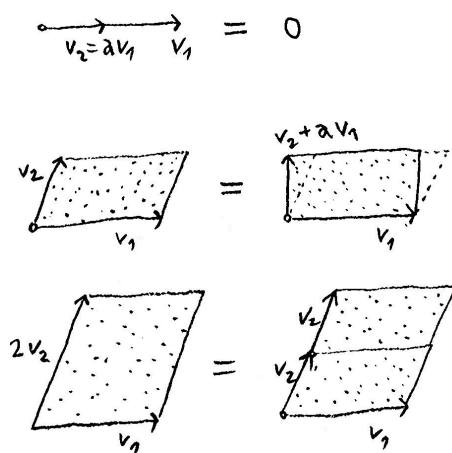
*Přiřazení  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \mapsto V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$  definuje pozitivně-multilineární zobrazení  $\vec{\mathcal{E}} \times \dots \times \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .*

Přívlastek *pozitivně-multilineární* znamená, že zobrazení se chová jako *absolutní hodnota* nějakého multilineárního zobrazení; důraz klademe na **multilineární**. Na vysvětlenou několik konkrétností pro  $k = 2$ , viz obr. 11.22:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) &= 0, \\ V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1), \\ V(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2) &= |b| \cdot V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  jsou libovolné vektory a  $a, b$  libovolná reálná čísla.

<sup>12</sup>V takovém případě mluvíme o degenerovaném rovnoběžnostěnu.



Obrázek 11.22: Vlastnosti obsahu/objemu se nápadně podobají vlastnostem determinantu.

## 11.2 Gramův determinant

Začneme s malým kouzlem: Vyberme náhodně vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  v nějakém eukleidovském prostoru. Podle (9.14) na str. 58 umíme obecně vyjádřit kolmou projekci  $\mathbf{w}_2$  vektoru  $\mathbf{v}_2$  do  $\mathbf{v}_1^\perp$ :

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1.$$

⇒ Velikost tohoto vektoru, resp. její druhá mocnina, je rovna

$$\|\mathbf{w}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_2\|^2 - \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2}{\|\mathbf{v}_1\|^2}.$$

Dosazením do definující rovnosti  $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\|$ , dostáváme

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sqrt{\|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2},$$

což můžeme interpretovat jako odmocninu z determinantu jisté matice:

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{vmatrix}}. \quad (11.21)$$

Matice pod odmocninou na pravé straně je tzv. Gramova matice, její determinant se zove Gramův:

**Definice.** Gramův determinant určený  $k$ -ticí vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  je determinant

$$G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{vmatrix}.$$

Předchozí výsledek nyní snadno zobecníme — jedná se nejobecnější a poměrně elegantní způsob určení objemu obecného rovnoběžnostěnu v obecném eukleidovském prostoru:

**Věta.** Pro libovolnou  $k$ -tici vektorů v eukleidovském prostoru platí

$$V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \sqrt{G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)}.$$

Sledovat předchozí zdůvodnění pro více než dva vektory může být trochu problém. Proto nabízíme alternativní zdůvodnění, které je odvozeno ze základních vlastností determinantu.

*Důkaz.* Pro přehlednost formulujeme pouze pro trojici vektorů, následné zobecnění by mělo být zřejmé. Vzhledem k výše užívanému značení platí:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) &= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} = \|\mathbf{v}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_2\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_3\|^2. \end{aligned}$$

V těchto úpravách se nejprve odkazujeme na vlastnosti determinantu, tedy jeho antisymetričnost a multilinearit. Odtud zejména plyne, že hodnota determinantu se nezmění, když k libovolnému řádku/sloupci přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních. To je přesně úprava, kterou jsme postupně dělali nejdřív s řádky, poté se sloupci:

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 + b\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2.$$

Závěr plyne z toho, že vektory  $\mathbf{w}_i$  nejsou jen tak ledajaké vektory uvedeného tvaru, ale právě kolmé průměty  $\mathbf{v}_i$  do  $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle^\perp$ . Všechny skalární součiny v Gramově matici mimo hlavní úhlopříčku jsou tedy nutně nulové. . .  $\square$

### 11.3 Vnější a vektorový součin

Ve speciálních případech, jež se týkají výhradně **počtu** určujících vektorů, je možné k vyjádření objemu použít některou z následujících algebraických konstrukcí. . .

#### Vnější součin

Na obr. 8.3 na str. 50 je ukázáno, že obsah rovnoběžníku v eukleidovské rovině je roven determinantu matice tvořené souřadnicemi určujících vektorů vzhledem k nějaké **ortonormální** bázi. Zobrazení, které dvojici vektorů  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  přiřazuje onen determinant, jsme nazvali *vnějším součinem* a označili  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ . Hodnota obsahu je vždy nezáporná, hodnota vnějšího součinu může být jakákoli. Z uvedeného vyplývá, že pro libovolné dva vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  ve dvourozměrném eukleidovském prostoru platí:

$$V(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |[\mathbf{u}, \mathbf{v}]|.$$

Zobecnění tohoto výsledku ve výše uvedeném duchu přestává být názorné, poohlédneme se tudíž po jiném argumentu. Obecná definice vnějšího součinu  $n$ -tice vektorů v eukleidovském prostoru dimenze  $n$  je uvedena na str. 50; vlastnosti vnějšího součinu jsou následující:

**Věta.** Pro  $n$ -tici vektorů v  $n$ -rozměrném eukleidovském prostoru platí:

- (1) Přřazení  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \mapsto [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$  definuje antisymetrické multilineární zobrazení  $\vec{\mathcal{E}} \times \dots \times \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (2)  $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] = 0 \iff$  vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  jsou lineárně závislé.
- (3)  $|\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n| = V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ .

*Důkaz.* Tvzení (1) a (2) plynou přímo z definice vnějšího součinu, tzn. z vlastností determinantu. Tvzení (3) plyne z Cauchyovy věty o součinu determinantů a z věty 11.2:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]^2 &= \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)^2 = \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)^T \cdot \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \\ &= \det((\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)^T \cdot (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_n \end{vmatrix} = G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n). \quad \square \end{aligned}$$

Ze třetí části věty je zřejmé, proč se vnějšímu součinu přezdívá též *orientovaný objem*...

### Vektorový součin

Pojem vektorového součinu bezpečně známe pro dva vektory v trojrozměrném eukleidovském prostoru. Jedná se o operaci, která dvojici vektorů  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  přiřazuje vektor  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ . Názorná geometrická charakterizace vektoru  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  je na obr. 8.4 na str. 51 a v jeho blízkém okolí.

Analyticky lze tentýž vektor vyjádřit ze souřadnicového vyjádření  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  a  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vzhledem k nějaké **ortonormální** bázi takto:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left( \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Z uvedeného zatím není jasné, proč by uvedené dva přístupy měly být ekvivalentní, což rozhodně chceme napravit. Při počítání vektorového součinu jsme zvyklí si pomáhat následovně:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} x_3. \quad (11.22)$$

Jedná se **Laplaceův rozvoj** determinantu matice, která je tvořena souřadnicemi daných vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  a obecného vektoru  $\mathbf{x}$  (v tomto pořadí!). Koefficienty u  $x_i$  potom bereme jako souřadnice vektorového součinu  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ . Tuto rovnost nyní musíme nějak koncepčně (bez souřadnicově) interpretovat — na levé straně vidíme vnější součin trojice vektorů  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x})$ , na pravé straně je skalární součin vektorů  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  a  $\mathbf{x}$ . Vektorový součin  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  je tedy vektor jednoznačně určený rovností

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{x},$$

kteřá má platit pro libovolný vektor  $\mathbf{x}$ .

Tento postřeh bereme jako obecnou definici, dříve uvedené geometrické vlastnosti záhy snadno odvodíme.



**Definice.** Vektorový součin  $(n - 1)$ -tice vektorů  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$  v  $n$ -rozměrném eukleidovském prostoru je vektor  $\mathbf{w}$  splňující

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x}] = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$$

pro všechna  $\mathbf{x} \in \vec{\mathcal{E}}$ ; značíme  $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$ .

Z definujícího požadavku vyplývá, že vektorový součin je určen jednoznačně. Souřadnicové vyjádření vektorového součinu lze obecně určit úplně stejně jako v úvodním příkladu, tzn. pomocí Laplaceova rozvoje determinantu podle posledního sloupce...

Vlastnosti vektorového součinu jsou následující:

**Věta.** Pro  $(n - 1)$ -tici vektorů v  $n$ -rozměrném eukleidovském prostoru platí:

- (1) Přiřazení  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \mapsto \mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$  definuje antisymetrické multilineární zobrazení  $\vec{\mathcal{E}} \times \dots \times \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$ .
- (2)  $\mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{0} \iff$  vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$  jsou lineárně závislé.
- (3)  $\mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$  je kolmý ke všem vektorům  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ .
- (4) Pokud jsou vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$  lineárně nezávislé, pak  $n$ -tice  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w})$  tvoří kladnou bázi prostoru  $\vec{\mathcal{E}}$ .
- (5)  $\|\mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}\| = V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ .

*Důkaz.* Tvrzení (1)–(3) plynou přímo z definující rovnosti a vlastností vnějšího součinu, tzn. determinantu. Tvrzení (4) v podstatě také:

$$\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}) = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}] = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} > 0.$$


Tvrzení (5) je pro  $\|\mathbf{w}\| = 0$  platné triviálně. Příklad  $\|\mathbf{w}\| \neq 0$  zdůvodníme tak, že ještě trochu rozepíšeme předchozí vztah:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}] = V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}) = V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \cdot \|\mathbf{w}\|,$$

kde odkazujeme postupně na větu 11.3, předchozí nerovnost<sup>13</sup> a před chvílí zdůvodněné tvrzení (3). Po dělení  $\|\mathbf{w}\|$  dostáváme požadovanou rovnost.  $\square$

### Poznámky

Ve speciálním případě  $n = 3$  můžeme doplnit ještě několik známých, příp. zajímavých věcí:

(1) Vektorový součin je podle tvrzení (1) bilineární antisymetrické zobrazení  $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$ , což můžeme chápat jako binární operaci na množině  $\vec{\mathcal{E}}$ . Tato operace však **není** asociativní. Neasociativita plyne z následující rovnosti (kterou lze dokázat např. v souřadnicích): 

<sup>13</sup>Všechno je kladné, takže absolutní hodnoty psát nemusíme.

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}. \quad (11.23)$$

Odtud také vyplývá platnost tzv. *Jacobiho identity*:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = 0. \quad (11.24)$$

Trojrozměrný eukleidovský prostor s operací vektorového součinu je tedy příkladem velice užitečné struktury, které se říká *Lieova algebra*.

(2) Podle tvrzení (5) je velikost vektorového součinu  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  rovna obsahu rovnoběžníku určeného vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ . Pokud tento obsah vyjádříme podle (11.20), potom vidíme, že platí

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha, \quad (11.25)$$

kde  $\alpha$  je odchylka vektorů  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ .

## 11.4 Shrnutí a užitek

### Stručné shrnutí

Z předchozích odstavců vidíme několik způsobů, jak určovat objem obecného rovnoběžnostěnu, které jsou zpravidla mnohem efektivnější než počítání podle definice 11.1:

- Věta 11.2 je univerzální a pracuje s Gramovým determinantem, jenž má právě takový řád, jaký je počet vektorů ve hře (tedy naprosto nezávisle na dimenzi okolního prostoru).
- Objem  $n$ -rozměrného rovnoběžnostěnu v  $n$ -rozměrném prostoru můžeme určit pomocí vnějšího součinu vektorů podle věty 11.3.
- Objem  $(n - 1)$ -rozměrného rovnoběžnostěnu v  $n$ -rozměrném prostoru můžeme vyjádřit pomocí vektorového součinu vektorů podle věty 11.3(5).

### Objem simplexu a mnohostěnu

Obecné (myšleno i šikmé) hranoly, příp. libovolné mnohostěny lze vždy rozložit na jednodušší objekty, u nichž umíme objemy vyjádřit. Tady zpravidla narážíme na jehlany, resp. simplexu, o kterých jsme se zatím nezmiňovali, proto přikládáme několik poznámek.

$k$ -rozměrným *simplexem* se myslí konvexní obal  $k + 1$  bodů v obecné poloze. Dvourozměrným simplexem je samozřejmě trojúhelník, trojrozměrný simplex je trojboký jehlan neboli čtyřstěn. Obsah trojúhelníku je roven polovině obsahu opsaného rovnoběžníku; objem čtyřstěnu je roven třetině objemu opsaného hranolu, tzn. šestině objemu opsaného rovnoběžnostěnu. Zobecnění těchto faktů je následující:

**Věta.** *Objem  $k$ -rozměrného simplexu je roven  $\frac{1}{k!}$  objemu opsaného rovnoběžnostěnu.*


Zdůvodnění tohoto tvrzení pro obecné  $k$  je úplně analogické těm, které známe pro  $k = 2$  a  $3$ , zejména pokud bereme jako fakt, že dva simplexu se stejnou základnou a stejnou výškou mají také stejný objem. To je sice v duchu našich úvodních pozorování v odst. 11.1, avšak elementární zdůvodnění tohoto faktu kupodivu neexistuje už pro  $k = 3$ . Pro podrobnosti odkazujeme na Dodatek 26, kde jsou připomenuta také některá relevantní tvrzení z [Eu].

### Vzdálenosti podprostorů

V odst. 10.2 poblíž obr. 10.14 jsme formulovali nápad, jak interpretovat vzdálenost podprostorů jakožto výšku vhodného rovnoběžnostěnu. Zobecnění uvedeného nápadu vypadá následovně:

**Věta.** Pro afinní podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  uvažme libovolné body  $X \in \mathcal{B}$  a  $Y \in \mathcal{C}$  a nějakou bázi  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$  součtu zaměření  $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ . Potom vzdálenost podprostorů je rovna velikosti výšky rovnoběžnostěnu určeného vektory  $\vec{XY}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$  na stěnu určenou vektory  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ . Krátce:

$$v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{V(\vec{XY}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots)}{V(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots)}.$$

Všimněte si, že nestačí tupě dosazovat vektory z parametrického vyjádření podprostorů — v takovém případě by se mohlo stát, že změříte nulovou vzdálenost, přestože je ve skutečnosti nenulová! Umíte si představit nějaký takový příklad? 

### Normála nadroviny

Z věty 11.3(3) víme, jak je možné najít vektor, který je kolmý k  $n - 1$  vektorům v  $n$ -rozměrném prostoru, aniž bychom řešili soustavu rovnic! Tato dovednost se dá použít např. při určování rovnicového vyjádření libovolné nadroviny v libovolném eukleidovském prostoru.

## 11.5 Cvičení

(1) Ve standardní eukleidovské rovině jsou dány body

$$K = [1, 3], \quad L = [0, 5], \quad M = [1, 4].$$

Alespoň čtyřmi různými způsoby určete obsah trojúhelníku  $KLM$ .

(2) Řešte tutéž úlohu v prostoru  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ :

$$K = [1, 3, -5], \quad L = [0, 5, -3], \quad M = [1, 4, -3].$$

(3) Pro pěti bodů  $A, B, C, D, E$  ze cvičení 7.5(1) určete:

- obsah trojúhelníku  $ABD$ , objem čtyřstěnu  $ABDE$ , objem mnohostěnu  $ABCDE$ ,
- vzdálenost bodu  $E$  od roviny  $ABD$ , vzdálenost přímk  $AD$  a  $BE$ ,
- rovnicové vyjádření roviny  $ABC$ .

(4) V eukleidovském prostoru  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$  jsou dány vektory:

$$\mathbf{v}_1 = (3, 2, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 2, 0).$$

Určete vektorový součin  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$  a objem rovnoběžnostěnu určeného vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ .

(5) Pro vektorový součin v prostoru dimenze 3 dokažte (11.23), příp. (11.24).

(6) Uvědomte si, že vektorový součin je formálně definován také pro jeden vektor v eukleidovském prostoru dimenze 2. Určete výsledek např. pro  $\mathbf{v}_1 = (-1, 2)$ .



Projektivní geometrie je rozšířením té afinní o **nevlastní** prvky, tzn. o „body v nekonečnu“. Projektivní popis má své výhody i specifika, jimž se věnujeme v průběžných poznámkách. Výhod projektivního rozšíření si budeme užívat zejména v kapitole V, a to díky základní větě projektivní geometrie — ta nám v důsledku garantuje, že libovolné projektivní zobrazení je určeno nějakým **lineárním** zobrazením mezi zastupujícími vektorovými prostory!

## 12 Projektivní rozšíření, prostory a podprostory

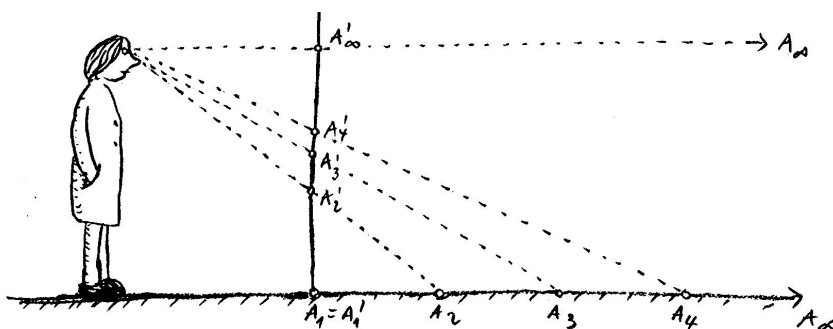
Nejprve si připomeneme názornou představu projektivního rozšíření, se kterou jsme si vystačili v konstrukční geometrii. Záhy nabídneme elegantní algebraické vymezení, jež nás přivede k pojmu obecného projektivního prostoru a jeho podprostorů. Analogicky k diskuzím v afinním případě si povíme něco o součtech, průnicích a vzájemných polohách projektivních podprostorů.

### 12.1 Úvod a projektivní rozšíření

V reálném životě, příp. v kurzu matematické analýzy nebo konstrukční geometrie jsme si mohli všimnout, jak je výhodné pracovat s *nevlastními body*, tj. s body v „nekonečnu“. Máme na mysli různé limitní úvahy nebo aplikace rozličných zobrazení. Typické geometrické zobrazení, při němž se nevlastní body objevují v „konečnu“, je středové promítání, neboli projekce. Jak už názvosloví napovídá, sblížení s tímto zobrazením — a zejména s jeho vlastnostmi — bude vstupenkou do světa projektivní geometrie. . .

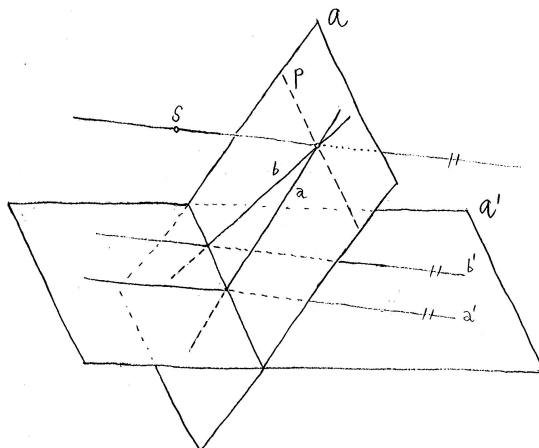
V obecném afinním prostoru uvažme středové promítání se středem  $S$  mezi nějakými dvěma podprostory  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{A}'$ . Pokud vzájemná poloha těchto podprostorů a středu promítání není nijak specifická (jako např.  $\mathcal{A} \parallel \mathcal{A}'$ ), potom existuje podmnožina v  $\mathcal{A}$ , která nemá obraz, resp. podmnožina v  $\mathcal{A}'$ , která nemá vzor (na obr. 12.2 to je přímka  $p$ , resp. na obr. 12.1 to je bod  $A'_\infty$ ). Z tohoto důvodu nemůže být takové zobrazení afinní.<sup>1</sup> Na uvedených ilustracích je neafinnost patrná také z toho, že obecné středové promítání nezachovává dělicí poměry kolineárních bodů a rovnoběžnost příemek. V každém případě však středové promítání zachovává **kolinearitu** bodů,

<sup>1</sup>Neboť vzor a obraz afinního zobrazení jsou afinní podprostory.



Obrázek 12.1: Středové promítání...

což je jedna ze dvou definujících vlastností *projektivních zobrazení*. Druhou definující vlastností je invariantnost **dvojpoměru** (čtveřic kolineárních bodů). To, že se při středovém promítání zachovávají dvojpoměry, je obsahem tzv. Pappovy věty...

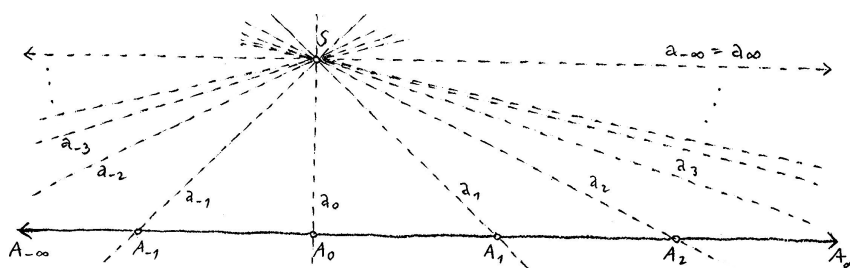
Obrázek 12.2: Při středovém promítání se středem  $S$  je obrazem přímky  $p \subset \mathcal{A}$  nevlastní přímka v  $\mathcal{A}'$ .

Obecné projektivní zobrazení operuje mezi obecnými *projektivními prostory*. Každý projektivní prostor budeme umět vždy chápat jako tzv. *projektivní rozšíření* nějakého afinního prostoru, což je rozšíření právě o nevlastní body. Na tomto místě si uvědomme, že:

*Projektivní rozšíření afinní přímky má právě jeden nevlastní bod.*

Zdůvodnění tohoto poznatku je následující, viz obr. 12.3:

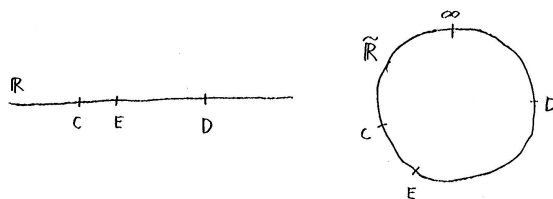
Body na afinní přímce  $A_i \in \mathcal{A}$  jsou ve vzájemně jednoznačné korespondenci s promítacími paprsky  $a_i = A_i + S$ . Když se bod  $A_i$  vzdaluje do nekonečna, přímka  $a_i$  konverguje k přímce, která leží v afinní rovině  $\mathcal{A} + S$  a neprotíná  $\mathcal{A}$ , tedy k přímce, která je s  $\mathcal{A}$  rovnoběžná. Protože



Obrázek 12.3: Projektivní rozšíření affinní přímky má jeden nevlastní bod.

rovnoběžka k dané přímce daným bodem je jediná, má každá přímka v affinní rovině jediný nevlastní bod.  $\square$

Projektivní přímka  $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  je tedy něco jiného než rozšířená reálná osa  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ , jak ji známe z analýzy! Na rozdíl od přímky affinní je projektivní přímka uzavřená — body na projektivní přímce tedy **nelze** uspořádat. Odtud plyne, že relace „mezi“ a další odvozené pojmy — jako úsečka, poloprostor, konvexní množina — nemají v projektivní geometrii žádný smysl. Stále se však můžeme bavit o podprostorech, jejich průnicích a vzájemných polohách, tedy věcech souvisejících s **incidencemi**: libovolné dva body určují přímku a každé dvě přímky v projektivní rovině se protínají v jednom bodě. V obecném projektivním prostoru je rovnoběžnost neznámým pojmem; v projektivním rozšíření affinního prostoru je rovnoběžnost pouze speciálním případem různoběžnosti, a to když je průnik podprostorů v nekonečno. . .

Obrázek 12.4: Na affinní přímce je bod  $E$  mezi body  $C$  a  $D$ . Na projektivní přímce nemá relace „mezi“ valného smyslu.

### Projektivní rozšíření affinního prostoru

Před chvílí jsme volně představili projektivní rozšíření affinní přímky. Každá přímka v affinní rovině má právě jeden nevlastní bod. Libovolný nevlastní bod může být reprezentován nekonečně mnoha navzájem rovnoběžnými přímkami. Všechny takové přímky mají stejná zaměření, což jsou jednorozměrné vektorové podprostory v zaměření roviny. Obecná definice projektivního rozšíření v termínech affinní geometrie vypadá takto:

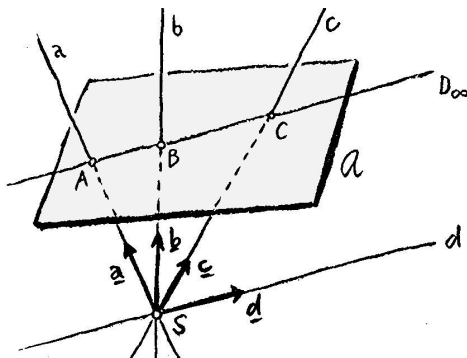
**Definice.** Projektivní rozšíření affinního prostoru  $\mathcal{A}$  je množina  $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}$ , kde  $\infty_{\mathcal{A}}$  je množina všech jednorozměrných vektorových podprostorů (směrů) v zaměření  $\vec{\mathcal{A}}$ . Prvky z  $\mathcal{A}$ , resp.  $\infty_{\mathcal{A}}$  nazýváme *vlastní*, resp. *nevlastní* body rozšířeného projektivního prostoru  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

Uvažme afinní prostor  $\mathcal{A}$  jakožto podprostor v nějakém větším afinním prostoru a podívejme se na  $\mathcal{A}$  a jeho projektivní rozšíření  $\tilde{\mathcal{A}}$  z nějakého (libovolného) bodu  $S \notin \mathcal{A}$ , viz obr. 12.5:

Každý bod  $A \in \tilde{\mathcal{A}}$  určuje přímku  $a \subset \mathcal{A} + S$  a, naopak, každá přímka  $a \subset \mathcal{A} + S$  procházející bodem  $S$  určuje bod  $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ . Tato korespondence je vzájemně jednoznačná. Navíc každá přímka procházející bodem  $S$  je jednoznačně určena svým zaměřením. Celkem tedy prvky  $\tilde{\mathcal{A}}$  ztotožňujeme s jednorozměrnými vektorovými podprostory v zaměření  $\overrightarrow{\mathcal{A} + S} =: W$ , přičemž platí:

- Bod  $A$  je nevlastní  $\iff$
- přímka  $a = A + S$  je rovnoběžná s  $\mathcal{A}$   $\iff$
- libovolný zastupující vektor  $\mathbf{a} \in \overrightarrow{a}$  je obsažen v  $\overrightarrow{\mathcal{A}} \subset W$ .

Současně si můžeme všimnout, že projektivnímu rozšíření  $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$  afinního podprostoru  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  odpovídá vektorový podprostor  $\overrightarrow{\mathcal{B} + S} =: U$  ve  $W$ , jehož dimenze je  $\dim U = \dim \mathcal{B} + 1$ .



Obrázek 12.5: Prvky  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}$  jsou v  $1 : 1$  korespondenci s přímkami v  $\mathcal{A} + S$ , jež procházejí bodem  $S$ , a ty jsou v  $1 : 1$  korespondenci se směry v  $\overrightarrow{\mathcal{A} + S}$ . Přitom  $D \in \infty_{\mathcal{A}} \iff d \parallel \mathcal{A} \iff \mathbf{d} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ .

Hlavní výhodou tohoto popisu je, že na rozdíl od předchozího reprezentujeme prvky  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}$  krásně homogenním způsobem. Navíc tak přirozeně přicházíme k definici obecného projektivního prostoru...

## 12.2 Obecné projektivní prostory a podprostory

**Definice.** Projektivní prostor dimenze  $n$  s vektorovým zástupcem  $W$  je množina všech jednorozměrných podprostorů (směrů) ve vektorovém prostoru  $W$  dimenze  $n + 1$ ; značíme  $\mathcal{W} = \mathcal{P}(W)$ .


Podmnožina projektivního prostoru  $\mathcal{W}$ , která je sama projektivním prostorem, se nazývá *projektivní podprostor* prostoru  $\mathcal{W}$ .



Z definice je zřejmé, že projektivní podprostory projektivního prostoru  $\mathcal{W} = \mathcal{P}(W)$  jsou právě množiny všech směrů ve  $W$ , které patří do nějakého netriviálního vektorového podprostoru  $U \subseteq W$ , tj. množiny tvaru  $\mathcal{U} = \mathcal{P}(U)$ . Obecně platí, že

$$\dim \mathcal{U} = \dim U - 1. \quad (12.1)$$

Výše popsané projektivní rozšíření  $\tilde{\mathcal{A}}$  afinního prostoru  $\mathcal{A}$  je projektivní prostor s vektorovým zástupcem  $W = \overline{\mathcal{A} + \vec{S}}$ . Přitom nevlastní body, tj. prvky množiny  $\infty_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(\overline{\mathcal{A}})$ , tvoří projektivní nadrovinu v  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(\overline{\mathcal{A} + \vec{S}})$ , tzn. projektivní podprostor kodimenze 1.

Naopak, pokud v obecném projektivním prostoru  $\mathcal{W} = \mathcal{P}(W)$  prohlásíme nějakou projektivní nadrovinu  $\mathcal{V} = \mathcal{P}(V)$  za množinu „nevlastních bodů“, pak doplňková podmnožina  $\mathcal{W} \setminus \mathcal{V}$  má přirozenou afinní strukturu (se zaměřením  $V$ ). Proto lze každý projektivní prostor chápat jako projektivní rozšíření nějakého afinního prostoru. . . 

### 12.3 Průnik a součet projektivních podprostorů

Pokud je průnik projektivních podprostorů  $\mathcal{U} = \mathcal{P}(U)$  a  $\mathcal{V} = \mathcal{P}(V)$  nějakého projektivního prostoru neprázdný, pak je to opět projektivní podprostor a zřejmě platí

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{P}(U \cap V).$$


Průnik  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  je prázdný právě tehdy, když  $U \cap V = \{\mathbf{o}\}$ .

Sjednocení projektivních podprostorů nemusí být projektivním podprostorem (viz např. sjednocení dvou různých bodů). Nejmenší projektivní podprostor, který obsahuje  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ , se nazývá *součtem* a značí se  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ . Tento podprostor je reprezentován nejmenším vektorovým podprostorem obsahujícím  $U \cup V$ , tzn. součtem zastupujících vektorových podprostorů  $U + V$ . Platí tedy

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{P}(U + V).$$

Věta o součtu a průniku vektorových podprostorů říká, že

$$\dim(U \cap V) + \dim(U + V) = \dim U + \dim V. \quad (12.2)$$

Odtud a z předchozích pozorování bezprostředně vyplývá, že 

$$\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V}, \quad (12.3)$$

ovšem za předpokladu, že  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ . Pokud je tento průnik prázdný, není první sčítanec dobře definován. Abychom nemuseli diskuzi zbytečně štěpit, můžeme vzhledem k (12.1) jednoduše definovat dimenzi prázdné množiny:

$$\dim \emptyset := -1.$$

S touto konvencí je rovnost (12.3) platná univerzálně. Z uvedeného bezprostředně vyplývá např. toto tvrzení:

**Věta.** *Pokud je součet dimenzí dvou projektivních podprostorů větší než nebo roven dimenzi okolního prostoru, potom se tyto podprostory protínají.*

*Důkaz.* Pro podprostory  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$  je podle předpokladu  $\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} \geq \dim \mathcal{W}$ . Současně součet  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$  nemůže být větší než  $\mathcal{W}$ , tj.  $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \leq \dim \mathcal{W}$ . Z rovnosti (12.3) tedy plyne, že  $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \geq 0$ . □

Speciálně tak dostáváme tvrzení, z nichž některá jsme zmiňovali již v motivačním úvodu:

- *dvě přímky v projektivní rovině se vždy protínají,*
- *přímka a rovina v trojrozměrném projektivním prostoru se vždy protínají,*
- *apod.*

## 12.4 Vzájemné polohy projektivních podprostorů

Předchozí pododstavec souvisí se vzájemnými polohami podprostorů projektivního prostoru. Ty můžeme rozlišovat pouze podle jejich průniku — celkem máme tři možnosti:

**Definice.** Netriviální projektivní podprostory projektivního prostoru jsou:

- *incidentní*, pokud jeden je podmnožinou druhého,
- *různoběžné*, pokud nejsou incidentní a mají neprázdný průnik,
- *mimoběžné*, pokud nejsou incidentní, ani různoběžné, tzn. mají prázdný průnik.

Pro triviální podprostory je diskuze vždycky poněkud degenerovaná, což zrovna nemáme zapotřebí řešit. . .

Pro podprostory  $\mathcal{U} = \mathcal{P}(U)$  a  $\mathcal{V} = \mathcal{P}(V)$  nějakého projektivního prostoru  $\mathcal{W} = \mathcal{P}(W)$  můžeme jejich vzájemnou polohu charakterizovat pomocí zastupujících vektorových prostorů  $U, V \subseteq W$ , a to následujícím způsobem:

- $U \cap V \neq \{\mathbf{o}\}$ :
  - $U \cap V = U$  nebo  $V \iff$  incidentní,
  - $U \cap V \neq U$  ani  $V \iff$  různoběžné,
- $U \cap V = \{\mathbf{o}\} \iff$  mimoběžné.

Tato formulace navádí k počítání průniku vektorových podprostorů, což vede k řešení homogenní soustavy lineárních rovnic. Uvědomte si, že k učení vzájemné polohy nepotřebujeme odpovídající soustavu dořešit úplně, stačí rozpoznat dimenzi průniku a porovnat s dimenzemi zadaných podprostorů.

Dimenze průniku souvisí s hodnotí matice soustavy a ta odpovídá dimenzi součtu podprostorů. Tato čísla jsou spolu svázána rovností (12.2). Odtud vyvozujeme, že obecně platí

$$\dim U + \dim V \geq \dim(U + V) \geq \max\{\dim U, \dim V\}.$$


Pokud kvůli stručnosti označíme tato tři čísla tak, že  $t \geq s \geq r$ , pak předchozí charakterizace vzájemných poloh vypadá následovně:

**Věta.** *Projektivní podprostory  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{V}$  jsou*

- *incidentní  $\iff t > s = r$ ,*
- *různoběžné  $\iff t > s > r$ ,*
- *mimoběžné  $\iff t = s > r$ .*

*Důkaz.* První nerovnost je rovností, právě když  $U \cap V = \{\mathbf{o}\}$ , neboli  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ . Druhá nerovnost je rovností, právě když  $U \subseteq V$  nebo  $V \subseteq U$ , tj. právě když  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{V}$  jsou incidentní. Odtud zejména plyne, že obě rovnosti nemohou platit současně; ostatní možnosti jsou potom jasné.  $\square$

## 12.5 Poznámky

Všimněte si, jak je život v projektivním světě jednoduchý, a to nejlépe tak, že porovnáte dosavadní diskuzi s analogickými pasážemi v afinním případě, viz odst. 4.3, 6.2, resp. 6.3. Současně si  uvědomte, že v rámci projektivních rozšíření afinních prostorů se nic z dříve uvedených poznatků neztrácí. Viz např. fundamentální pojem afinní geometrie — **rovnoběžnost**:

Uvažme projektivní rozšíření  $\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}} \subset \tilde{\mathcal{A}}$  netriviálních afinních podprostorů  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ . Podle definice jsou podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  rovnoběžné, pokud (nejsou incidentní a) jejich zaměření  $\vec{\mathcal{B}}$  a  $\vec{\mathcal{C}}$  jsou incidentní. To je ekvivalentní s tím, že jsou incidentní množiny nevlastních bodů  $\infty_{\mathcal{B}} \subset \tilde{\mathcal{B}}$  a  $\infty_{\mathcal{C}} \subset \tilde{\mathcal{C}}$ , tudíž

$$\mathcal{B} \parallel \mathcal{C} \iff \infty_{\mathcal{B}} \subseteq \infty_{\mathcal{C}} \quad \text{nebo} \quad \infty_{\mathcal{C}} \subseteq \infty_{\mathcal{B}}.$$

Zejména průnik rovnoběžných podprostorů sestává výhradně z nevlastních bodů,

$$\mathcal{B} \parallel \mathcal{C} \implies \tilde{\mathcal{B}} \cap \tilde{\mathcal{C}} \subseteq \infty_{\mathcal{A}}.$$

Rovnoběžnost tak chápeme jako speciální případ (projektivní) různoběžnosti.

## 13 Homogenní souřadnice a dvojpoměr

### 13.1 Homogenní souřadnice

Libovolný bod  $X$  projektivního prostoru  $\mathcal{W} = \mathcal{P}(W)$  je zastoupen nějakým nenulovým vektorem  $\mathbf{x} \in W$ , a to tak, že  $X = \langle \mathbf{x} \rangle$ . Dva vektory ve  $W$  reprezentují jeden a týž bod ve  $\mathcal{W}$  právě tehdy, když se liší o nějaký nenulový násobek.

**Definice.** *Projektivní repér* projektivního prostoru  $\mathcal{W} = \mathcal{P}(W)$  je báze  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  zastupujícího vektorového prostoru  $W$ .

*Homogenní souřadnice* bodu  $X = \langle \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{W}$  vzhledem k projektivnímu repéru  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  jsou souřadnice **libovlnného** reprezentujícího vektoru  $\mathbf{x} \in W$  vzhledem k této bázi.

Pozor — homogenní souřadnice bodu **nejsou** určeny jednoznačně! V závislosti na volbě reprezentujícího vektoru se však mohou lišit pouze o násobek nenulovým reálným číslem. Tuto nejednoznačnost bychom měli mít pořád na paměti, čemuž by mělo napomáhat následující značení:

Homogenní souřadnice bodu  $X = \langle \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{W}$  takového, že  $\mathbf{x} = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + \dots \in W$ , budeme psát jako  $X = (x_0 : x_1 : x_2 : \dots)$ . Pro libovolné  $a \neq 0$  tedy platí

$$X = (x_0 : x_1 : x_2 : \dots) = (ax_0 : ax_1 : ax_2 : \dots). \quad (13.4)$$

#### Standardní rozšíření afinních souřadnic

Pro projektivní rozšíření afinních prostorů je vhodné si volbu projektivního repéru chytře přizpůsobit. To uděláme jednou provždy následujícím způsobem:

Uvažme afinní prostor  $\mathcal{A}$  s afinním repérem  $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$ . Zastupující vektorový prostor projektivního rozšíření  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}$  značíme jako obvykle  $W$ . Chytře přizpůsobený projektivní repér je právě báze  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  ve  $W$  taková, že

- vektory  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \in \vec{\mathcal{A}}$  jsou vektory daného afinního repéru,
- vektor  $\mathbf{e}_0 \notin \vec{\mathcal{A}}$  je vektor reprezentující počátek  $O \in \mathcal{A}$ , typicky  $\mathbf{e}_0 = \overrightarrow{SO}$ .

Vzhledem k takto přizpůsobené bázi uvažujme homogenní souřadnice (13.4) bodu  $X = \langle \mathbf{x} \rangle \in \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}$ . Smyslem této volby je, že velmi snadno rozlišujeme vlastní body od nevlastních:

$$X \in \infty_{\mathcal{A}} \iff \mathbf{x} \in \vec{\mathcal{A}} \iff x_0 = 0.$$

Tedy **nevlastní** bod  $X \in \infty_{\mathcal{A}}$  reprezentovaný vektorem  $\mathbf{x} \in \vec{\mathcal{A}}$  s afinními souřadnicemi  $(x_1, x_2, \dots)$  má homogenní souřadnice

$$X = (\mathbf{0} : x_1 : x_2 : \dots),$$

a naopak. **Vlastní** bod  $X \in \mathcal{A}$  s afinními souřadnicemi  $[x_1, x_2, \dots]$  má homogenní souřadnice

$$X = (\mathbf{1} : x_1 : x_2 : \dots)$$

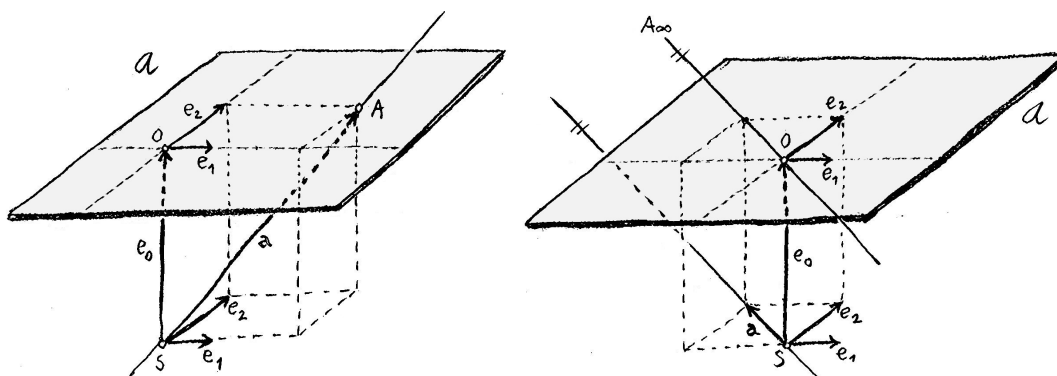
Naopak, homogenní souřadnice libovolného vlastního bodu  $X \in \mathcal{A}$  můžeme psát ve tvaru

$$X = (x_0 : x_1 : x_2 : \dots) = \left( 1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0} : \dots \right), \quad (13.5)$$

neboť  $x_0 \neq 0$ . Tím ztotožňujeme afinní prostor  $\mathcal{A}$  — jakožto podmnožinu v projektivním prostoru  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(W)$  — s podmnožinou ve vektorovém prostoru  $W$  popsanou rovnicí  $x_0 = 1$ :

$$\mathcal{A} \cong \{\mathbf{x} \in W \mid x_0 = 1\}.$$

Afinní souřadnice bodu (13.5) potom jsou  $\left[ \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots \right]$ .



Obrázek 13.6: Vlastní bod  $A = O + 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = S + \mathbf{e}_0 + 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  má homogenní souřadnice  $(1 : 3 : 1)$ . Nevlastní bod zastoupený přímkou se směrovým vektorem  $\mathbf{a} = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  má homogenní souřadnice  $(0 : -2 : 1)$ .

### 13.2 Poznámky

Význam homogenních souřadnic bude zřejmý zejména v kapitole V, kde se bez nich neobejdeme. Už nyní si však můžeme všimnout, že s jejich pomocí lze řešit téměř všechny předchozí úlohy, a to často se značnou výhodou. Pro příklad uvádíme určení rovnicového vyjádření přímky v rovině:

Přímka v afinní rovině určená body  $A = [a_1, a_2]$  a  $B = [b_1, b_2]$  má rovnici


$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

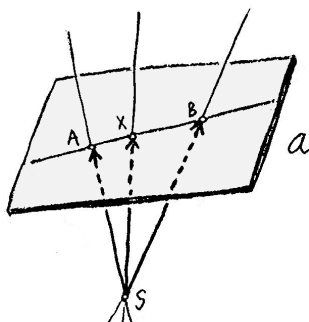
Přímka určená bodem  $A = [a_1, a_2]$  a směrem  $\mathbf{b} = [b_1, b_2]$  má rovnici

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Obecněji, přímka určená dvěma body v projektivním rozšíření roviny s homogenními souřadnicemi  $A = (a_0 : a_1 : a_2)$  a  $B = (b_0 : b_1 : b_2)$  má rovnicové vyjádření

$$\begin{vmatrix} x_0 & a_0 & b_0 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Zdůvodnění těchto tvrzení je velmi prosté, viz obr. 13.7. Tyto poznatky lze dále zobecňovat pro nadroviny v obecném projektivním prostoru, ale i jinak. Srovnajte výsledky s návodem (3) v odst. 5.5. 



Obrázek 13.7: Body  $A, B, X$  jsou kolineární  $\iff$  zastupující vektory  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}$  jsou lineárně závislé  $\iff \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0$ .

### 13.3 Dvojpoměr

Dvojpoměr lze popsat celkem různorodě, viz např. [Be, kapitola 6]. Začneme tím, že připomeneme definici, kterou jsme používali v konstrukční geometrii. Doplňme diskuzi o nevlastních bodech a zformulujeme totéž pomocí homogenních souřadnic.

Pro čtveřici  $(A, B, C, D)$  vlastních, kolineárních a navzájem různých bodů je *dvojpoměr* této čtveřice roven podílu dělicích poměrů:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}. \quad (13.6)$$

Definice dvojpoměru samozřejmě závisí na pořadí bodů ve čtveřici, viz cvičení 13.4. Pokud je náhodou  $(ABCD) = -1$ , říkáme o čtveřici bodů, že je v tzv. *harmonickém poměru*. V mezních případech vychází dvojpoměr následovně:

Pro  $A = B$  je  $(ABCD) = 1$ , pro  $A = C$  je  $(ABCD) = 0$ , pro  $B = C$  je  $(ABCD) = \pm\infty$  apod.

Je-li bod  $D$  **nevlastní**, potom  $(ABD_\infty) = \lim_{D \rightarrow \infty} (ABD) = 1$ , a proto platí

$$(ABCD_\infty) = (ABC).$$

Podobný vztah platí, i když je jiný bod z dané čtveřice nevlastní...

Pokud je náhodou  $C$  středem úsečky  $AB$ , potom  $(ABCD_\infty) = (ABC) = -1$ , čili čtveřice  $A, B$ , střed úsečky  $AB$  a nevlastní bod přímky  $AB$  je vždy v harmonickém poměru.

### Homogenní formulace

Vzhledem k nějakému afinnímu repéru na přímce obsahující body  $A, B, C$  a  $D$  označíme jejich souřadnice  $a, b, c$  a  $d$ . Potom definice (13.6) pro čtveřici vlastních bodů vypadá v těchto souřadnicích takto:

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}.$$

☞ Uvědomte si, že výsledek nezávisí na volbě afinního repéru, ačkoli čísla  $a, b, c, d$  ano!

Uvažme homogenní souřadnice na projektivním rozšíření přímky, jež jsou přizpůsobeny afinním souřadnicím stejně jako v odst. 13.1. Tzn., že homogenní souřadnice bodu  $A$  jsou  $(1 : a)$  apod. Potom zřejmě platí

$$b - a = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}.$$

Tento zápis má tu výhodu, že nám umožní vyjádřit předchozí limitní úvahy s nevlastními body krásně homogenním způsobem. V homogenních souřadnicích je totiž

$$D_\infty = \lim_{d \rightarrow \infty} (1 : d) = (0 : 1),$$

takže např.  $(ABD_\infty) = \lim_{D \rightarrow \infty} (ABD) = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{d-a}{d-b} = 1$  je v homogenních souřadnicích vyjádřeno jako

$$(ABD_\infty) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}} = 1.$$

Tato pozorování vedou k následující jednotné definici dvojpoměru, v níž nerozlišujeme mezi body vlastními a nevlastními.

**Definice.** *Dvojpoměr* čtveřice navzájem různých bodů na projektivní přímce s homogenními souřadnicemi  $A = (a_0 : a_1)$ ,  $B = (b_0 : b_1)$ ,  $C = (c_0 : c_1)$ ,  $D = (d_0 : d_1)$  je reálné číslo

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}}. \quad (13.7)$$

Uvědomte si (stejně jako výše), že toto číslo nezávisí na volbě souřadné soustavy! Pokud dva body splývají, znamená to, že jejich reprezentující vektory jsou lineárně závislé, což je ekvivalentní s tím, že odpovídající determinant v předchozím vyjádření je nulový. V takových případech nemusí být dvojpoměr definován, sr. s úvodní diskuzí.

Z uvedeného bezprostředně vyplývá následující jednoduché tvrzení:

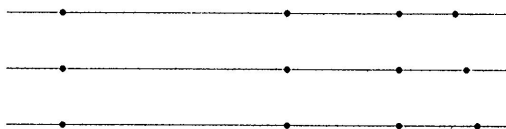


**Věta.** *Nechť  $A, B, C$  jsou tři navzájem různé kolineární body a reálné číslo  $r$ . Potom existuje jediný bod  $D$  na projektivní přímce určené body  $A, B, C$  takový, že  $(ABCD) = r$ .*

### 13.4 Cvičení



- (1) Řešte některou z dřívějších úloh v homogenních souřadnicích, viz např. úlohy ze cvičení 5.7 a 6.5.
- (2) Rozhodněte, která ze čtveřic bodů na obr. 13.8 je projektivním obrazem stejně vzdálených bodů.



Obrázek 13.8: [St] Která čtveřice bodů je projektivním obrazem stejně vzdálených bodů?

- (3) Dokažte, že pro libovolnou čtveřici kolineárních bodů platí

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

- (4) Dokažte, že vzhledem k označení  $(ABCD) = k$  platí

$$(ACBD) = 1 - k, \quad (ABDC) = \frac{1}{k}, \quad \dots$$

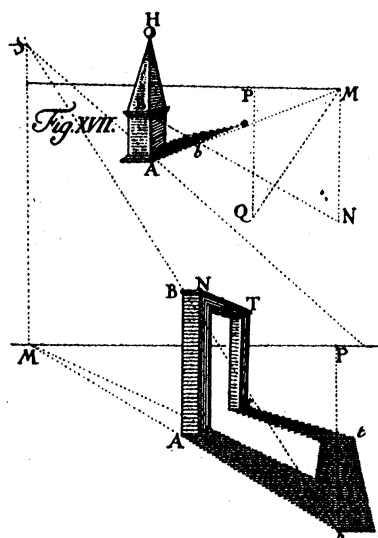
## 14 Projektivní zobrazení a základní věta projektivní geometrie

### 14.1 Projektivní zobrazení

Modelové projektivní zobrazení je středové promítání, o němž jsme si povídali již v odst. 12.1. Středové promítání mezi dvěma projektivními rovinami je regulární (zejména tedy injektivní), středové promítání trojrozměrného prostoru do roviny je singulární (tj. neinjetivní — přímky procházející středem promítání se zobrazují do bodu). Tyto obecné vlastnosti budou příležitostně hrát podstatnou roli.

Středové promítání zachovává kolinearitu bodů a — pokud se různé kolineární body nezobrazí do jednoho bodu — také jejich dvojpoměr.<sup>2</sup> Obecná definice projektivního zobrazení vypadá takto:

<sup>2</sup>Toto tvrzení známe (i s důkazem) z kurzu konstrukční geometrie jako tzv. **Pappovu větu**.



Obrázek 14.9: [Be] Ukázka z Lambertovy Perspektivy (1759)

**Definice.** Zobrazení mezi projektivními prostory se nazývá *projektivní*, pokud

- (a) zobrazuje kolineární body na kolineární body,
- (b) zachovává dvojpoměr bodů na přímce.

Bijektivní projektivní zobrazení se jmenuje *kolineace*.

Kolineární body jsou také body splývající; podmínka (b) tedy má smysl pouze v případě, kdy se různé kolineární body nezobrazí do jednoho bodu. Pro projektivní zobrazení mezi prostory dimenze 1 je podmínka (a) splněna automaticky — injektivní projektivní zobrazení jsou v takových případech zcela charakterizovány podmínkou (b).

Z definujících podmínek (a) a (b) vyplývá, že projektivní zobrazení mezi projektivními prostory dimenze alespoň 2

- (a') zobrazuje projektivní přímky na projektivní přímky, anebo body.

Tím se myslí, že pokud se přímka nezobrazí do bodu, potom se zobrazí na celou přímku a nikoli jen nějakou její část. Ve skutečnosti platí, že injektivní zobrazení projektivního prostoru dimenze aspoň 2 splňující (a') splňuje také (a) a (b), tedy že je projektivní. Platnost (a) je zřejmá, platnost (b) je důsledkem tzv. *základní věty projektivní geometrie*...

## 14.2 Základní věta projektivní geometrie a důsledky

Pro vektorové prostory  $W$  a  $W'$  označíme odpovídající projektivní prostory  $\mathcal{W} = \mathcal{P}(W)$  a  $\mathcal{W}' = \mathcal{P}(W')$ . Nejprve předpokládejme, že projektivní prostory mají stejnou dimenzi, a to alespoň 2,<sup>3</sup>

<sup>3</sup>tedy  $\dim W = \dim W' \geq 3$



a uvažme nějaký **lineární** izomorfismus  $F : W \rightarrow W'$ :

- Protože  $F$  je lineární, obrazem libovolného vektorového podprostoru ve  $W$  je vektorový podprostor ve  $W'$ .
- Protože  $F$  je bijektivní, má vzor i obraz stejnou dimenzi. Zejména směry (jednorozměrné vektorové podprostory) ve  $W$  se zobrazují na směry ve  $W'$ . Odtud vidíme, že  $F : W \rightarrow W'$  indukuje zobrazení mezi projektivními prostory  $\underline{F} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$ , a to tak, že

$$\underline{F}(\langle \mathbf{x} \rangle) = \langle F(\mathbf{x}) \rangle, \quad (14.8)$$

kde  $\mathbf{x} \in W$  je libovolný nenulový vektor.

- Podobně, dvojrozměrné vektorové podprostory ve  $W$  se zobrazují na dvojrozměrné vektorové podprostory ve  $W'$ . Odtud vidíme, že indukované zobrazení  $\underline{F}$  zobrazuje **projektivní přímky na projektivní přímky**.
- Navíc z bijektivnosti  $F$  plyne, že také zobrazení  $\underline{F}$  je bijektivní.


Následující věta říká, že tímto způsobem lze popsat všechna zobrazení s právě vyjmenovanými vlastnostmi:

**Věta** (Základní věta projektivní geometrie). *Každé bijektivní zobrazení mezi projektivními prostory  $f : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$  dimenze alespoň 2, které zobrazuje projektivní přímky na projektivní přímky, je určeno nějakým lineárním izomorfismem  $F : W \rightarrow W'$  tak, že  $f = \underline{F}$ .*

Důkaz neuvádíme, protože není vůbec jednoduchý. Poprvé byl tento fakt dokázán K. von Staudtem, podrobnosti lze najít např. v [Be, část 5.4]. Základním úkolem je interpretovat algebraické operace s reálnými čísly (souřadnicemi bodů) pomocí geometrických konfigurací přímek a bodů. Srovnejte s tvrzením ve větě 4.5 na str. 19. . .

Bezprostředním důsledkem základní věty projektivní geometrie je následující tvrzení, které lze chápat jako jisté zobecnění *Pappovy věty*:

**Důsledek.** *Každé bijektivní zobrazení mezi projektivními prostory dimenze alespoň 2, které zobrazuje projektivní přímky na projektivní přímky, zachovává také dvojpoměry, a tudíž to je kolineace.*

*Důkaz.* Zobrazení z věty označíme  $f : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$ . Ze základní věty víme, že  $f$  je určeno nějakým lineárním izomorfismem  $F : W \rightarrow W'$  tak, že  $f = \underline{F}$ . Zúžení  $\underline{F}$  na jednu (libovolnou) přímku  $\mathcal{U} = \mathcal{P}(U) \subseteq \mathcal{W}$  je určeno zúžením  $F$  na odpovídající podprostor  $U \subseteq W$ . Z definice (13.7), z linearit  $F$  a z **Cauchyovy věty** o součinu determinantů plyne, že  $\underline{F}$  zachovává dvojpoměry. □ 

## Dimenze 1

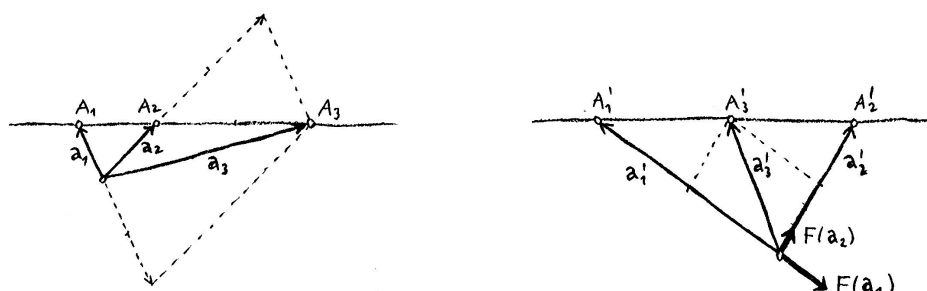
Kolineace mezi projektivními prostory dimenze aspoň 2 jsou právě zobrazení indukovaná lineárními izomorfismy zastupujících vektorových prostorů. Pro projektivní prostory dimenze 1 je situace specifická v tom, že podmínka (a) je splněna automaticky a kolineace jsou právě zobrazení zachovávající dvojpoměry čtveřic bodů. Také v tomto případě umíme ukázat, že

**Věta.** Každá kolineace mezi projektivními přímkami je určena nějakým lineárním izomorfismem zastupujících vektorových prostorů.

Z věty 13.3 víme, že každý bod na projektivní přímce je jednoznačně určen hodnotou dvoj-  
poměru vzhledem ke třem navzájem různým bodům. Každá kolineace  $f : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$  je proto  
zcela určena obrazem tří navzájem různých bodů. Pro dané tři body  $A_i = \langle \mathbf{a}_i \rangle$  a jejich obrazy  
 $A'_i = \langle \mathbf{a}'_i \rangle$  stačí sestavit takový izomorfismus  $F : W \rightarrow W'$  zastupujících vektorových prostorů, že  
jeho indukované zobrazení  $\underline{F}$  souhlasí s daným  $f$  na těchto třech bodech. To znamená  $f(A_i) = A'_i$ ,  
neboli

$$F(\mathbf{a}_i) = k_i \mathbf{a}'_i, \quad (14.9)$$

kde  $k_i$  jsou nějaká nenulová reálná čísla.<sup>4</sup> To si nyní rozmyslíme nad následujícím obrázkem:



Obrázek 14.10: Pro  $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2$  a  $\mathbf{a}'_3 = \frac{1}{2}\mathbf{a}'_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}'_2$  buď  $F$  lineární zobrazení  
takové, že  $F(\mathbf{a}_1) = -\frac{1}{4}\mathbf{a}'_1$  a  $F(\mathbf{a}_2) = \frac{1}{6}\mathbf{a}'_2$ . Potom platí  $F(\mathbf{a}_3) = -2F(\mathbf{a}_1) + 3F(\mathbf{a}_2) =$   
 $\frac{1}{2}\mathbf{a}'_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}'_3$ . Indukované projektivní zobrazení  $f = \underline{F}$  tudíž splňuje  $f(A_1) = A'_1$ ,  
 $f(A_2) = A'_2$  a  $f(A_3) = A'_3$ .

*Důkaz.* Pro tři navzájem různé body  $A_1, A_2, A_3$  na projektivní přímce jsou odpovídající vektory  
 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  taky navzájem různé. Avšak protože  $\dim W = 2$ , musejí být tyto vektory lineárně  
závislé. Tuto závislost vyjádříme např. takto:

$$\mathbf{a}_3 = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \quad (14.10)$$

kde  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  jsou jednoznačně určená nenulová reálná čísla. Protože zobrazení  $f$  je podle před-  
pokladu injektivní, jsou také obrazy  $A'_1, A'_2, A'_3$  navzájem různé. Totéž platí pro odpovídající  
vektory  $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3$  a ze stejného důvodu jako výše jsou tyto lineárně závislé:

$$\mathbf{a}'_3 = \beta_1 \mathbf{a}'_1 + \beta_2 \mathbf{a}'_2, \quad (14.11)$$

kde  $\beta_1$  a  $\beta_2$  jsou jednoznačně určená nenulová čísla.

Z rovnosti (14.10), z požadavku linearit y zobrazení  $F$  a z rovnosti (14.9) pro  $i = 1$  a  $2$  plyne,  
že

$$F(\mathbf{a}_3) = \alpha_1 F(\mathbf{a}_1) + \alpha_2 F(\mathbf{a}_2) = \alpha_1 k_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 k_2 \mathbf{a}_2.$$

Odtud a z rovnosti (14.11) vidíme, že  $F(\mathbf{a}_3) = k_3 \mathbf{a}'_3$  právě tehdy, když


$$k_1 = k_3 \frac{\beta_1}{\alpha_1} \quad \text{a} \quad k_2 = k_3 \frac{\beta_2}{\alpha_2}.$$

<sup>4</sup>Všude samozřejmě dosazujeme  $i = 1, 2, 3$ .

Trojice čísel  $k_1, k_2, k_3$  je tedy určena jednoznačně až na nenulový společný násobek  $k_3$ .

Pro libovolné  $k_3 \neq 0$  je požadavkem  $F(\mathbf{a}_1) = k_3 \frac{\beta_1}{\alpha_1} \mathbf{a}'_1$  a  $F(\mathbf{a}_2) = k_3 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mathbf{a}'_2$  určeno jednoznačně lineární zobrazení  $F : W \rightarrow W'$ , pro něž potom platí  $F(\mathbf{a}_3) = k_3 \mathbf{a}'_3$ . Navíc, ať  $k_3 \neq 0$  zvolíme jakkoli, indukované projektivní zobrazení  $f = \underline{F} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$  je stále totéž a platí  $f(A_1) = A'_1$ ,  $f(A_2) = A'_2$  a  $f(A_3) = A'_3$ .  $\square$

### Algebraická definice projektivního zobrazení

V předchozím výkladu hrál podstatnou roli předpoklad, že uvažovaná zobrazení byla bijektivní. Pro injektivní zobrazení dostáváme zúžením na obraz bijekci a na předchozí charakterizaci se v podstatě nic nezmění. Pro neinjektivní (singulární) zobrazení není úplně hned jasné, jak předchozí výsledky zobecnit, ale možné to je. Na tomto místě nemůžeme ani nehodláme tento případ moc rozmazávat. . . 

**Definice** (ekvivalentní). Zobrazení mezi projektivními prostory  $f : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$  (libovolných dimenzí) se nazývá *projektivní*, pokud existuje **lineární** zobrazení mezi zastupujícími vektorovými prostory  $F : W \rightarrow W'$  tak, že pro libovolný vektor  $\mathbf{x} \in W \setminus \ker F$  platí

$$f(\langle \mathbf{x} \rangle) = \langle F(\mathbf{x}) \rangle.$$

Projektivní zobrazení  $f$  je injektivní, právě když lineární zobrazení  $F$  je injektivní, což je ekvivalentní s tím, že jeho *jádro*,

$$\ker F = \{\mathbf{x} \in W \mid F(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\},$$

je triviální. Pokud tedy  $f$  není injektivní, potom  $\ker F \subseteq W$  je netriviální vektorový podprostor a body z projektivního podprostoru  $\mathcal{P}(\ker F) \subseteq \mathcal{P}(W)$  tak nemají definován obraz. Proto neinjektivní projektivní zobrazení nikdy nemohou být definována na celém prostoru  $\mathcal{W} = \mathcal{P}(W)$ !<sup>5</sup>

$$\begin{array}{ccc} W \setminus \ker F & \xrightarrow{F} & W' \setminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{P}(W) \setminus \mathcal{P}(\ker F) & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}(W') \end{array}$$

Obrázek 14.11: Zobrazení  $f$  je projektivní, právě když  $F$  existuje, je lineární a diagram komutuje.

### Věta o určenosti projektivního zobrazení

Lineární zobrazení  $F$  jednoznačně určuje projektivní zobrazení  $f = \underline{F}$ , avšak tato korespondence není vzájemně jednoznačná. Už v předchozím pododstavci jsme si uvědomili, že dvě různá lineární zobrazení  $F_1$  a  $F_2$  indukují totéž projektivní zobrazení právě tehdy, když se liší o nějaký

<sup>5</sup>Pro příklad, definiční obor středového promítání trojrozměrného projektivního prostoru do roviny tvoří všechny body kromě středu promítání.

nenulovým násobek:

$$\underline{F}_1 = \underline{F}_2 \iff F_2 = k \cdot F_1 \text{ pro nějaké } k \neq 0.$$

Nyní umíme působivě zobecnit několik pozorování, která máme v malých dimenzích:

**Věta** (o určenosti projektivního zobrazení). *Injektivní projektivní zobrazení projektivního prostoru dimenze  $n$  je určeno obrazy  $n + 2$  bodů, z nichž žádná  $(n + 1)$ -tice neleží v jedné nadrovině.*

Právě popsanou konfiguraci bodů budeme kvůli stručnosti nazývat body ve *skoro obecné poloze*.

Při stejném značení jako okolo rovnosti (14.9) (kde ovšem nyní dosazujeme  $i = 1, \dots, n + 2$ ) chceme ukázat, že čísla  $k_i$  jsou určena jednoznačně až na nějaký společný nenulový násobek. Odtud pak plyne, že zobrazení  $f = \underline{F}$  určeno jednoznačně. Myšlenka důkazu by měla být zřejmá z toho, co jsme ukázali pod obrázkem obr. 14.10, přečtěte se nehodláme opakovat. Obecnou formulaci tak přenecháváme píli čtenářově...



### 14.3 Poznámky a užitek

(1) Zformulovat podobné tvrzení pro **neinjektivní** (singulární) projektivní zobrazení je o poznání subtilnější úkol. Např. projektivní zobrazení roviny ( $n = 2$ ) do přímky je určeno obrazy pěti (tedy  $n + 3$ ) bodů, anebo taky vůbec, pokud jsou tyto body v „nehodných“ polohách. Obecnou odpověď v těchto případech proto hledat nebudeme. Z kurzu konstrukční geometrie však jistě umíme doplnit něco o určenosti projektivního zobrazení z trojrozměrného prostoru do roviny...



(2) Nyní uvažme projektivní rozšíření afinních prostorů  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}$  a  $\tilde{\mathcal{A}}' = \mathcal{A}' \cup \infty_{\mathcal{A}'}$ . Afinní zobrazení mezi afinními prostory  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  indukují lineární zobrazení mezi jejich zaměřenými  $\vec{f} : \vec{\mathcal{A}} \rightarrow \vec{\mathcal{A}}'$ , a to indukují projektivní zobrazení  $\underline{\vec{f}} : \mathcal{P}(\vec{\mathcal{A}}) \rightarrow \mathcal{P}(\vec{\mathcal{A}}')$ . Protože  $\mathcal{P}(\vec{\mathcal{A}}) = \infty_{\mathcal{A}}$  a  $\mathcal{P}(\vec{\mathcal{A}}') = \infty_{\mathcal{A}'}$ , můžeme přirozeně definovat zobrazení

$$\tilde{f} = f \cup \underline{\vec{f}} : \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}' \cup \infty_{\mathcal{A}'}$$



Z uvedeného lze snadno vyvodit, že zobrazení  $\tilde{f}$  je projektivní; budeme mu říkat *projektivní rozšíření afinního zobrazení  $f$* . Projektivní zobrazení  $h : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}'$  je projektivním rozšířením nějakého **afinního** zobrazení právě tehdy, když zobrazuje **vlastní body na vlastní** nebo, ekvivalentně, nevlastní body na nevlastní:

$$h = \tilde{f} \iff h(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}' \iff h(\infty_{\mathcal{A}}) \subseteq \infty_{\mathcal{A}'}.^6$$

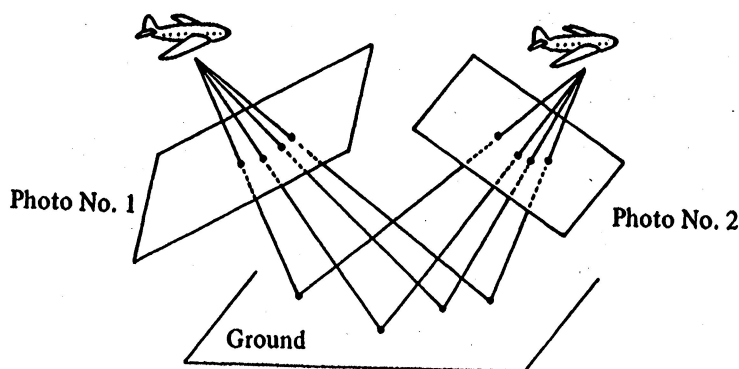
Srovnejte tento poznatek s poselstvím základní věty afinní geometrie (str. 19)...

(3) Pro projektivní rozšíření afinních zobrazení, je podmínka, že nadrovina nevlastních bodů se zobrazuje do nadroviny nevlastních bodů, natolik silná, že k jednoznačnému určení zobrazení stačí méně bodů než v obecném případě: pro zobrazení z prostoru dimenze  $n$  stačí obrazy  $n + 1$  vlastních bodů v obecné poloze. Srovnejte tento poznatek s poselstvím věty o určenosti afinního zobrazení (str. 19)...

<sup>6</sup>V takovém případě zřejmě platí  $f = h|_{\mathcal{A}}$  a  $\vec{f} = h|_{\infty_{\mathcal{A}}}$ .

(4) Typickou aplikací dosud nabytých poznatků je porovnávání různých snímků téže věci, příp. skládání většího snímku z několika dílčích. V takových případech pracujeme s několika referenčními body, které chceme „nějak napasovat“ a zbytek „nějak transformovat“. Pokud se přímky zobrazují jako přímky, všechny neurčitosti v předchozím popisu mizí:

Předpokládejme, že snímáme rovinu jako na obr. 14.12. Korespondence mezi snímkem 1 a snímkem 2 je složením dvou kolineací, je to tedy kolineace. Podle věty o určenosti projektivního zobrazení je toto zobrazení jednoznačně určeno obrazem 4 bodů, z nichž žádné 3 neleží na jedné přímce. V následující kapitole se naučíme, jak s takovými zobrazeními pracovat analyticky. . .



Obrázek 14.12: [Be] Pro porovnání dvou perspektivních obrazů téže roviny nám stačí obrazy 4 bodů, z nichž žádné 3 nejsou kolineární.

## 14.4 Cvičení



- (1) Obecná projektivní transformace projektivní přímky má v homogenních souřadnicích následující vyjádření:

$$f(x_0 : x_1) = (kx_0 + lx_1 : mx_0 + nx_1),$$

kde  $k, l, m, n \in \mathbb{R}$ . Přímým výpočtem ukažte, že  $f$  zachovává dvojpoměry.

- (2) Vzpomeňte si na konstrukční zdůvodnění věty o určenosti projektivního zobrazení pro  $n = 1$  a 2.
- (3) Pomocí vektorové algebry dokažte nějaké tvrzení elementární projektivní geometrie, např. Pappovu větu.<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Pappových vět je víc. . .



O různých geometrických zobrazeních jsme se poměrně zevrubně bavili již v kurzu konstrukční geometrie, viz [Ž, zejména kap. III]. V tomto kurzu odkazujeme právě na tyto znalosti, pročez jsme si mohli dovolit začít rovnou obecně. Zatím jsme si postupně připomněli definice afinních, shodných, podobných, ekviafinních a projektivních zobrazení. Pokusy o ekvivalentní algebraická vymezení vyvrcholily základní větou projektivní geometrie v odst. 14.2. Odtud víme, že každé ze zmiňovaných zobrazení je určeno nějakým **lineárním** zobrazením (mezi zastupujícími vektorovými prostory).

V této kapitole doplníme analytická vyjádření a naučíme se jednotlivé druhy zobrazení v tomto duchu rozeznávat. Zejména se budeme soustředit na transformace, tj. zobrazení nějakého prostoru do sebe, a jejich charakterizace pomocí samodružných prvků. Zvláštní pozornost věnujeme tzv. základním transformacím a jejich skládání. Na závěr uvádíme jemnější klasifikace shodností v rovině a v prostoru a několik dalších poznámek.

## 15 Analytická vyjádření a charakterizace

Nejprve si všechny probrané typy zobrazení a jejich podstatné vlastnosti stručně zopakujeme, a to od těch nejobecnějších po ty nejspeciálnější. V hlavním odstavci této podkapitoly (odst. 15.3) doplníme charakterizaci jednotlivých typů zobrazení na základě jejich analytického vyjádření.

### 15.1 Opakování a přehled

#### Projektivní

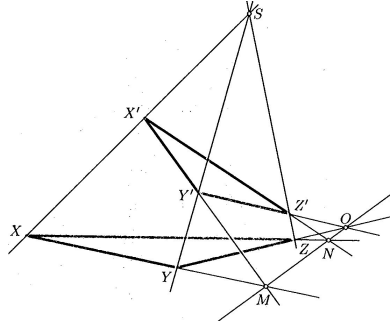
Viz podkap. 14. Projektivní zobrazení je zobrazení mezi projektivními prostory, které zobrazuje přímky na přímky (nebo body) a zachovává dvojpoměry (kdykoli to je možné). S odkazem na základní větu projektivní geometrie je každé projektivní zobrazení  $f : \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W')$  určeno nějakým **lineárním** zobrazením

$$F : W \rightarrow W'$$

mezi zastupujícími vektorovými prostory, a to tak, že obraz  $X' = f(X)$  je reprezentován vektorem  $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$ , kde  $\mathbf{x} \in W$  je libovolný vektor reprezentující bod  $X \in \mathcal{P}(W)$ .

Dva různé vektory  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  reprezentují jeden a ten samý bod  $X$  právě tehdy, když se liší o nějaký nenulový násobek. Proto dvě různá lineární zobrazení  $F_1, F_2$  zadávají jedno a to samé projektivní zobrazení  $f$  právě tehdy, když  $F_1 = k \cdot F_2$  pro nějaké  $k \neq 0$ .

Z uvedeného mimo jiné vyplývá, že projektivní zobrazení je jednoznačně určeno obrazy  $n + 2$  bodů v dostatečně obecné poloze, přičemž  $n = \dim \mathcal{P}(W) = \dim W - 1$ .



Obrázek 15.1: [Ku] Základní kolineace v rovině je osová kolineace.

V tomto kurzu nepracujeme s obecnými projektivními prostory, ale výhradně s projektivními rozšířeními afinních prostorů,

$$\mathcal{P}(W) = \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}.$$

Báze ve  $W$  proto vždycky volíme stejně jako v odst. 13.1, tzn. tak, abychom snadno rozpoznali body vlastní od nevlastních. Naše konvence je taková, že tyto rozlišujeme podle první (lépe řečeno nulté) souřadnice; afinní prostor  $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$  si představujeme jakožto nadrovinu ve  $W$  určenou rovnicí  $x_0 = 1$ .

### Afinní

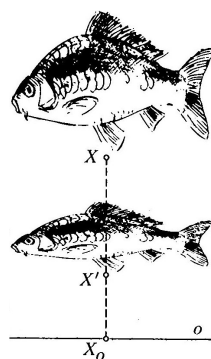
Viz odst. 4.5 a 14.3. Afinní zobrazení je zobrazení mezi afinními prostory, které zobrazuje přímky na přímky nebo body a zachovává rovnoběžnost přímek (ekvivalentně, zachovává dělicí poměry trojic kolineárních bodů). Základní věta afinní geometrie nás dovedla k charakterizaci afinních zobrazení  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  v rámci všech projektivních zobrazení mezi projektivními rozšířeními  $\tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}'}$  jako takových zobrazení, která zobrazují **vlastní body na vlastní**, což je totéž jako nevlastní na nevlastní.

To je ekvivalentní požadavku, aby zastupující lineární zobrazení  $F : W \rightarrow W'$  zobrazovalo podprostor  $\tilde{\mathcal{A}} \subset W$  do podprostoru  $\tilde{\mathcal{A}'} \subset W'$ . Zúžení  $F|_{\tilde{\mathcal{A}}} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}'}$  je potom právě indukované lineární zobrazení  $\vec{f}$  k afinnímu zobrazení  $f$ , o kterém se mluví v definici na str. 18. Odtud také plyne, že obraz libovolného bodu  $X \in \mathcal{A}$  lze vyjádřit ve tvaru

$$f(X) = \vec{f}(\overrightarrow{OX}) + f(O), \quad (15.1)$$

kde  $O \in \mathcal{A}$  je jeden vybraný referenční bod (obvykle počátek souřadné soustavy). To v důsledku znamená, že afinní zobrazení je jednoznačně určeno obrazy  $n + 1$  bodů v obecné poloze, kde  $n = \dim \mathcal{A}$ .





Obrázek 15.2: [Ku] Základní afinita v rovině je osová afinita, neboli škálování v jednom směru.

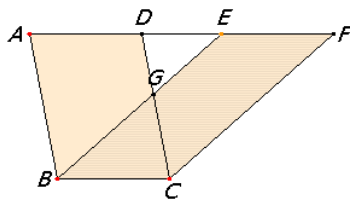
Pokud jsou afinní prostory, mezi kterými zobrazujeme, navíc eukleidovské, rozlišujeme další typy zobrazení, viz odst. 8.2:

### Ekviafinní

Ekviafinní zobrazení jsou taková afinní zobrazení, která zachovávají obsahy rovnoběžníků, resp. objemy rovnoběžnostěn. Objemová forma v eukleidovském prostoru je určena vnějším součinem vektorů, viz odst. 11.3. Proto afinní zobrazení  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  mezi eukleidovskými prostory je ekviafinní, pokud indukované lineární zobrazení  $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}'}$  zachovává **vnější součin** až na znaménko.<sup>1</sup>

Protože vnější součin je multilineární operace, je tato podmínka ekvivalentní s požadavkem, aby se nějaký (následně potom každý) rovnoběžnostěn s jednotkovým objemem zobrazil na rovnoběžnostěn s jednotkovým objemem.

Je zřejmé, že není možné zobrazit větší prostor do menšího ekviafinním způsobem. Dimenze prostoru  $\mathcal{E}'$  je proto nutně větší nebo rovna dimenzi  $\mathcal{E}$ . Pokud je  $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{E}'$ , je každé ekviafinní zobrazení nutně bijektivní. Pokud je  $\dim \mathcal{E} < \dim \mathcal{E}'$ , je každé takové zobrazení injektivní a abychom mohli mluvit o zachování vnějšího součinu, uvažujeme samozřejmě zúžení na obraz, tj. na eukleidovský prostor  $f(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}'$ .



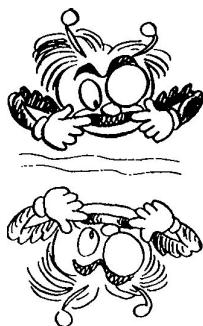
Obrázek 15.3: [Eu<sub>1</sub>] Typická ekviafinita je elace, neboli naklonění.

<sup>1</sup>Objem je vždy nezáporný, vnějším součinem může být libovolné číslo...

## Shodná

Význačnou podmnožinou ekviafinních zobrazení jsou zobrazení shodná. Shodná zobrazení jsou zobrazení, která zachovávají eukleidovskou metriku. Eukleidovská metrika je určena skalárním součinem na zaměření. Proto afinní zobrazení  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  mezi eukleidovskými prostory je shodné, pokud indukované lineární zobrazení  $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}'$  zachovává **skalární součin** vektorů.

Protože skalární součin je bilineární operace, je tato podmínka ekvivalentní s požadavkem, aby se nějaká (následně potom každá) ortonormální báze zaměření  $\vec{\mathcal{E}}$  zobrazovala na ortonormální bázi  $\vec{\mathcal{E}}'$ .



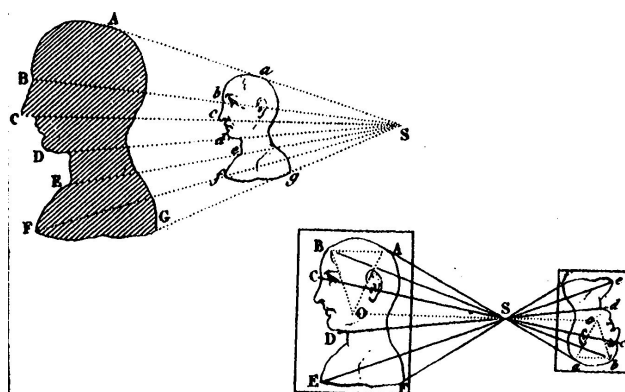
Obrázek 15.4: [Se] Základní shodnost je souměrnost podle nadroviny, neboli zrcadlení.

## Podobná

Význačnou nadmnožinou shodných zobrazení jsou zobrazení podobná. Podobná zobrazení jsou zobrazení, která zachovávají eukleidovskou metriku až na konstantní nenulový násobek (tzv. koeficient podobného zobrazení). To jsou taková afinní zobrazení, jejichž indukované lineární zobrazení zachovává skalární součin **až na nenulový násobek**.

Tato podmínka je ekvivalentní s požadavkem, aby se nějaká (následně potom každá) ortonormální báze zaměření  $\vec{\mathcal{E}}$  zobrazovala na bázi  $\vec{\mathcal{E}}'$ , která je ortogonální a jejíž vektory jsou stejně dlouhé (ovšem ne nutně jednotkové).

Podobné zobrazení s koeficientem 1 je shodné.



Obrázek 15.5: [Be] Základní podobnost je stejnolehlost, neboli škálování (ve všech směrech stejně).

### Poznámky a přehledy

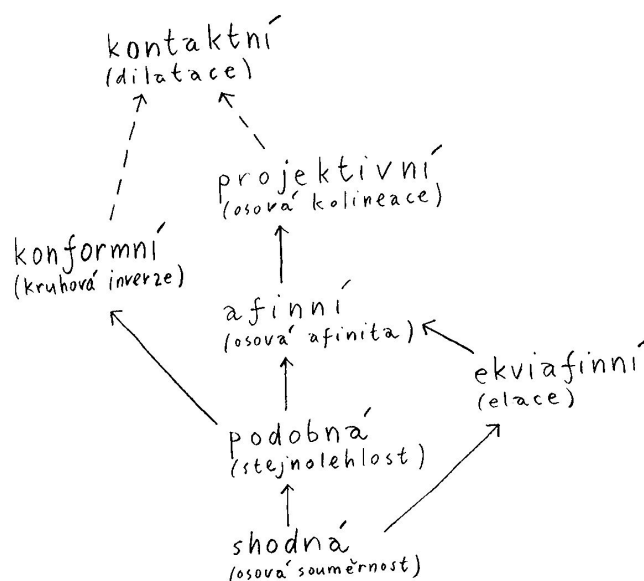
(1) Stručné shrnutí několika jednoduchých poznatků může vypadat např. takto:

- *Projektivní zobrazení, které zobrazuje všechny vlastní body na vlastní (ekvivalentně, nevlastní body na nevlastní), je afinní.*
- *Afinní zobrazení, které zachovává poměry vzdáleností jakýchkoli (tedy i nekolineárních) trojic bodů, je podobné.*
- *Podobné zobrazení, které je ekviafinní, je shodné.*
- *Každé ekviafinní, podobné, resp. shodné zobrazení je nutně injektivní, neboli prosté.*

Důsledkem posledního tvrzení je, že každé ekviafinní, podobné, resp. shodné zobrazení mezi prostory stejné dimenze je nutně bijektivní.

(2) Složením dvou zobrazení stejného typu dostaneme opět zobrazení téhož typu. Proto množina všech ekviafinních, podobných, resp. shodných transformací eukleidovského prostoru (s operací skládání zobrazení) tvoří **grupu**. Ta je podgrupou grupy všech afinít, jež je podgrupou v grupě všech kolineací rozšířeného projektivního prostoru.

Struktura uvedených vložení je znázorněna na obr. 15.6; pro připomenutí jsou na schématu další dva typy zobrazení, které známe z kurzu konstrukční geometrie, avšak na tomto místě nediskutujeme.



Obrázek 15.6: Hierarchie geometrických zobrazení (v závorce uveden typický představitel z každé skupiny).

(3) Přehled dosavadních poznatků shrnujeme v tabulce tab. 15.1. Jako obvykle,  $\mathcal{E}$  značí obecný eukleidovský prostor,  $\mathcal{A}$  afinní prostor a  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}$  jeho projektivní rozšíření. Dále  $W$  je zastupující vektorový prostor pro  $\tilde{\mathcal{A}}$ , tzn.  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(W)$ .

Projektivní zobrazení  $f: \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}'$  je určeno lineárním zobrazením  $F: W \rightarrow W'$ . Pokud je  $f$  afinní, potom  $F|_{\vec{\mathcal{A}}}: \vec{\mathcal{A}} \rightarrow \vec{\mathcal{A}}'$  je právě indukované lineární zobrazení,  $F|_{\vec{\mathcal{A}}} = \vec{f}$ .

Jediný sloupec, který v následující tabulce zatím nemusí být srozumitelný, se týká analytického vyjádření. Všechny případné otazníky odstraníme hned v několika následujících odstavcích. . .

jméno	definice	další vlastnosti	algebraická charakterizace	analytické vyjádření	příklady
projektivní $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$	zobrazuje přímky na přímky nebo body	zachovává dvojpo-měry čtveřic bodů	určeno lineárním zobrazením $F: W \rightarrow W'$	$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & \mathbf{b} \\ c & \mathbf{D} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}$	osová kolineace, středové promítání
afinní $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$	projektivní, které zachovává rovnoběžnost přímek	zachovává dělicí po-měry trojic bodů	$F$ zobrazuje $\vec{\mathcal{A}} \subset W$ na $\vec{\mathcal{A}'} \subset W'$	$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ c & \mathbf{D} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}$	osová afinita, rovnob. promítání
ekviafinní $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$	afinní, které zachovává obsahy, resp. objemy		$\vec{f}$ zachovává vnější součin až na znaménko	$\det \mathbf{D} = \pm 1$	šikmá souměrnost, elace
podobné $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$	afinní, které zachovává vzdálenosti bodů až na konstantní násobek: $ X'Y'  = k \cdot  XY $	zachovává odchylky	$\vec{f}$ zachovává skalární součin až na násobek	$\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} = k^2 \cdot \mathbf{E}$	stejnolehlost
shodné $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$	podobné s koeficientem $k = 1$	zachovává vzdálenosti, odchylky, obsahy, ...	$\vec{f}$ zachovává skalární součin	$\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} = \mathbf{E}$	osová souměrnost

Tabulka 15.1: Přehled geometrických zobrazení.

## 15.2 Analytický zápis

Analytické vyjádření jakéhokoli zobrazení závisí na volbě souřadných soustav. V afinním prostoru  $\mathcal{A}$  uvažujeme afinní souřadnice vzhledem k afinnímu repéru  $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$ . Pokud je navíc afinní prostor eukleidovský, pak zpravidla předpokládáme, že vektory  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$  jsou ortonormální; odpovídající souřadná soustava se pak jmenuje *kartézská*.

V projektivním rozšíření  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}$  afinního prostoru  $\mathcal{A}$  budeme pracovat výhradně s homogenními souřadnicemi, které jsou tzv. standardním rozšířením nějakých souřadnic afinních. Všechny konvence a značení jsou stejné jako v odst. 13.1: rozšířená báze  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  zastupujícího vektorového prostoru  $W$  je právě taková báze, že vektory  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \in \tilde{\mathcal{A}}$  jsou jako výše a vektor  $\mathbf{e}_0 \notin \tilde{\mathcal{A}}$  reprezentuje právě bod  $O$ . . .

Uvažujme projektivní zobrazení  $f: \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}'$  mezi projektivními rozšířeními afinních prostorů. Odpovídající lineární zobrazení mezi zastupujícími vektorovými prostory značíme  $F: W \rightarrow W'$ . Každé lineární zobrazení  $F$  je vzhledem k vybraným bázím určeno maticí  $\mathbf{F}$  tak, že

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} \quad (15.2)$$

pro libovolný vektor  $\mathbf{x} \in W$ , resp. jeho souřadnice psány do sloupce. Pokud je  $\dim \tilde{\mathcal{A}} = m$  a  $\dim \tilde{\mathcal{A}}' = n$ , pak matice  $\mathbf{F}$  má  $m+1$  sloupců a  $n+1$  řádků.

Obraz libovolného bodu  $X \in \tilde{\mathcal{A}}$  značíme  $X' \in \tilde{\mathcal{A}}'$  a vzhledem k předchozím konvencím jej budeme vyjadřovat jako

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}, \quad (15.3)$$

kde  $a$  je reálné číslo,  $\mathbf{b}$  je  $m$ -tice čísel v řádku,  $\mathbf{c}$  je  $n$ -tice čísel ve sloupci a  $\mathbf{D}$  je matice o rozměrech  $n \times m$ .

Zápisu (21.4), resp. (15.3) říkáme *analytické vyjádření* zobrazení  $f$ . Konkrétní rozepsání takového vyjádření uvidíme za chvíli. Důvod, proč rozdělujeme matici  $\mathbf{F}$  právě na uvedené bloky, bude zřejmý z odst. 15.3.

### Důležité poznámky

(1) Je-li  $\mathbf{F}$  matice zastupujícího lineárního zobrazení  $F$  vzhledem k vybraným bázím, pak v této matici po sloupcích postupně čteme souřadnice obrazů bázových vektorů  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots$ . Vzhledem k předchozím konvencím:

- v prvním sloupci jsou homogenní souřadnice obrazu počátku afinní souřadné soustavy,
- ve druhém sloupci jsou homogenní souřadnice obrazu nevlastního bodu první souřadné osy,
- ve třetím sloupci jsou homogenní souřadnice obrazu nevlastního bodu druhé souřadné osy,
- atd.

Tento jednoduchý postřeh má velice užitečné důsledky jak při interpretaci zobrazení  $f$  daného maticí  $\mathbf{F}$ , tak při určování této matice v případě, že  $f$  je zadáno např. obrazy několika bodů; viz cvičení 15.5 a další.

(2) Analytické vyjádření (15.3) bývá často vyjádřeno přímo v homogenních souřadnicích. Jedná se jen o jinou formu zápisu, takže tady není třeba hledat žádný problém — z maticového vyjádření lze vždy snadno určit souřadnicové a naopak. Pro představu, např. obecná projektivní transformace přímky

$$f(x_0 : x_1) = (kx_0 + lx_1 : mx_0 + nx_1)$$

ze cvičení 14.4(1) je reprezentována maticí

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}.$$

(3) Předpokládejme, že  $f$  a  $g$  jsou projektivní zobrazení,  $F$  a  $G$  jsou zastupující lineární zobrazení a  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{G}$  jsou jejich matice. Pokud lze tato zobrazení složit,<sup>2</sup> potom **složené zobrazení**  $g \circ f$  je reprezentováno lineárním zobrazením  $G \circ F$ , jehož matice je právě součinem matic  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{F}$ . Při skládání zobrazení je proto obvykle výhodnější pracovat s odpovídajícími maticemi než se souřadnicovým vyjádřením.

(4) Zobrazení  $f$  je injektivní, surjektivní, resp. bijektivní právě tehdy, když zastupující lineární zobrazení  $F$  má tutéž vlastnost. Na základě jednoduchých poznatků z lineární algebry můžeme směle tvrdit, že pro projektivní zobrazení  $f$  reprezentované maticí  $\mathbf{F}$  platí:

- $f$  je injektivní, právě když  $\mathbf{F}$  má triviální jádro,
- $f$  je surjektivní, právě když hodnost  $\mathbf{F}$  je rovna počtu jejích řádků,
- $f$  je bijektivní, právě když matice  $\mathbf{F}$  je čtvercová a  $\det \mathbf{F} \neq 0$ .

Zobrazení s netriviálním jádrem se nazývají *singulární*; typickými příklady jsou různá promítání většího prostoru do menšího. Matice  $\mathbf{F}$  je čtvercová, právě když  $f$  zobrazuje mezi prostory stejné dimenze. V případě obecných projektivních zobrazení, nemá hodnota  $\det \mathbf{F}$  žádný geometrický význam (rozlišujeme pouze, zda je determinant nulový či nenulový).

### 15.3 Charakterizace

Nyní konečně umíme nabídnout charakterizaci jednotlivých typů zobrazení podle jejich analytického vyjádření.

**Věta.** Předpokládejme, že projektivní zobrazení  $f$  mezi projektivními rozšířeními afinních prostorů je v homogenních souřadnicích vyjádřeno jako v (15.3). Potom platí, že

- $f$  je **afinní** právě tehdy, když  $a \neq 0$  a  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

*Důkaz.* Zobrazení  $f$  je afinní, právě když zobrazuje všechny nevlastní body na nevlastní a všechny vlastní body na vlastní. Z první podmínky vzhledem k předchozím volbám plyne, že  $\mathbf{b}$  musí sestávat ze samých nul. Ze druhé podmínky plyne, že  $a \neq 0$  (jinak by se úplně všechny body zobrazovali na nevlastní body).  $\square$

Pokud tedy je zobrazení  $f$  afinní, můžeme je reprezentovat jednoznačně určenou maticí  $\mathbf{F}$ , ve které platí  $a = 1$ :

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{c} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}. \quad (15.4)$$

<sup>2</sup>Pokud je obraz  $f$  obsažen v definičním oboru  $g$ .

Pro vzory tvaru  $\mathbf{x} = (1, x_1, x_2, \dots)$  jsou také obrazy tvaru  $\mathbf{x}' = (1, x'_1, x'_2, \dots)$ , takže celá první (nultá) složka v předchozím vyjádření je vlastně zbytečná. (15.4) je proto ekvivalentní následujícímu vyjádření v afinních souřadnicích:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{D} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{c}. \quad (15.5)$$

Afinní zobrazení mezi prostory stejné dimenze dále rozlišujeme takto:<sup>3</sup>

- pokud  $\det \mathbf{D} > 0$ , pak  $f$  je *přímá* afinita,
- pokud  $\det \mathbf{D} < 0$ , pak  $f$  je *nepřímá* afinita.

➡ Determinant  $\det \mathbf{D}$  se nazývá *modul* afinního zobrazení  $f$ . Uvědomte si, že pro transformace, tj. zobrazení  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , modul nezávisí na volbě souřadné soustavy! Absolutní hodnota modulu odpovídá tomu, jak se mění obsahy, resp. objemy. Znaménko modulu je kladné/záporné, právě když afinita zachovává/mění orientaci prostoru.

**Věta.** Předpokládejme, že afinní zobrazení  $f$  mezi eukleidovskými prostory je v kartézských souřadnicích vyjádřeno jako v (15.5), resp. v rozšířených homogenních souřadnicích jako v (15.4). Potom platí, že

- $f$  je **ekviafinní** právě tehdy, když  $\det \mathbf{D} = \pm 1$ ,
- $f$  je **podobné** s koeficientem  $k$  právě tehdy, když  $\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} = k^2 \cdot \mathbf{E}$ ,
- $f$  je **shodné** právě tehdy, když  $\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} = \mathbf{E}$ ,

Aby první tvrzení věty mělo vůbec nějaký význam, musí být matice  $\mathbf{D}$  čtvercová. Zobrazení  $f$  je tedy buď zobrazením mezi prostory stejné dimenze, nebo se uvažuje jeho restrikce na obraz. Pro zbylé dvě části žádný takový předpoklad nepotřebujeme. Jako obvykle,  $\mathbf{E}$  značí jednotkovou matici (jejíž rozměry odpovídají dimenzi cílového prostoru).

*Důkaz.* Všechny tři části plynou přímo z algebraických charakterizací, jež jsme připomněli v úvodním opakování v odst. 15.1, a ze znalosti pojmu matice lineárního zobrazení. V matici  $\mathbf{D}$  jsou totiž po sloupcích shromážděny souřadnice obrazů báze vektorů  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ . Tyto vektory podle předpokladu tvoří ortonormální bázi, tzn.  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 1$  nebo  $0$  podle toho, zda  $i = j$  nebo  $i \neq j$ . Báze vektorů tvoří krychli s objemem 1.

Absolutní hodnota  $\det \mathbf{D}$  je rovna objemu rovnoběžnostěnu určeného obrazem  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots$  báze vektorů; odtud plyne první část věty.

V součinu matic  $\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D}$  se na  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci nalézá právě hodnota skalárního součinu  $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j$ ; odtud plynou zbylá dvě tvrzení.  $\square$

## 15.4 Obzvlášť jednoduché případy

Tady jmenujeme zobrazení s nejjednoduššími analytickými vyjádřeními. Ve všech případech se jedná o afinní transformace, jejichž indukované lineární zobrazení je násobkem identity. V dalších odstavcích jsou tyto transformace zmiňovány jako takové základní transformace, které mají samodružné všechny směry. Jinými slovy můžeme tyto transformace charakterizovat jako takové afinní transformace, které zobrazují libovolnou přímku na přímku s ní rovnoběžnou (nebo bod).

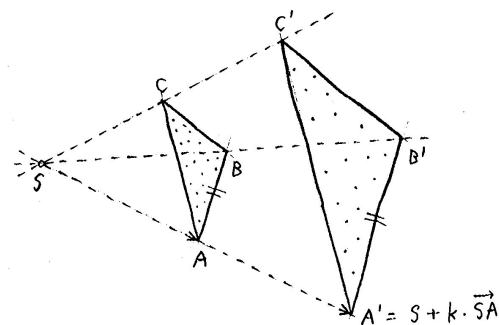
Nejzákladnějším zobrazením v následujícím seznamu je **stejnolehlost**, všechny ostatní položky lze chápat jako její speciální, resp. mezní případy.

<sup>3</sup>Vzhledem k vyjádření (15.4) je  $\det \mathbf{F} = \det \mathbf{D}$ .



**Definice.** *Stejnolehlost* je afinní transformace určená středem  $S$  a koeficientem  $k \in \mathbb{R}$ , a to tak, že

$$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}, \quad \text{neboli} \quad X' = S + k \cdot \overrightarrow{SX}.$$



Obrázek 15.7: Stejnolehlost se středem  $S$  a koeficientem  $k \doteq 2$ .

Vedle jména a obecného analytického vyjádření uvádíme také matici zastupujícího lineárního zobrazení:

- identita:  $X' = X$ ,  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix}$ ,

- posunutí o vektor  $\mathbf{v}$ :  $X' = X + \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & \mathbf{E} \end{pmatrix}$ ,

- stejnolehlost se středem  $S$  a koeficientem  $k$ :

$$X' = kX + (1 - k)S, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ (1 - k)\mathbf{S} & k\mathbf{E} \end{pmatrix}, \quad (15.6)$$

- středová souměrnost se středem  $S$ :  $X' = -X + 2S$ ,  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 2\mathbf{S} & -\mathbf{E} \end{pmatrix}$ ,

- promítání do bodu  $S$ :  $X' = S$ ,  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ .

Identita, středová souměrnost, resp. promítání do bodu jsou speciálními, resp. degenerovanými případy stejnolehlosti odpovídající hodnotám  $k = 1, -1$ , resp.  $0$ . Posunutí je možné interpretovat jako stejnolehlost se středem v nekonečnu (a tedy koeficientem  $k = 1$ )...

Identita, posunutí a stejnolehlost s koeficientem  $k > 0$  jsou přímé afinity. Stejnolehlost s koeficientem  $k < 0$  je přímá právě tehdy, když dimenze afinního prostoru je sudá. Promítání do bodu je maximálně degenerované (singulární) zobrazení, často přezdívané jako *nulové zobrazení*.

Ve všech těchto případech jsme schopni během několika sekund rozhodnout o druhu zobrazení, známe-li jeho analytické vyjádření. V ostatních případech se tomu budeme učit, a to zejména analyzováním tzv. samodružných prvků...



## 15.5 Cvičení

(1) Projektivní transformace v rovině jsou dány maticemi zastupujících lineárních zobrazení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

V každém z těchto čtyř případů:

- začněte s obrázkem a pokuste se odhadnout typ transformace,
- určete typ transformace a rozhodněte, zda je transformace regulární/singulární,
- v případě afinít určete modul a rozhodněte, zda je transformace přímá/nepřímá/upřímná,
- určete obraz několika dalších bodů, např. bodu  $E = [1, 1]$  či nevlastních bodů odpovídajících souřadným osám.

(2) Další čtyři projektivní transformace jsou dány obrazy bodů

$$A = [0, 0], B = [2, 0], C = [0, 2], D = [2, 2],$$

a to následujícími způsoby:

- $A' = [6, 2], B' = [9, 2], C' = [7, 4], D' = [9, 3]$ ,
- $A' = [6, 2], B' = [9, 2], C' = [7, 4], D' = [10, 4]$ ,
- $A' = [9, 4], B' = [9, 1], C' = [6, 4], D' = [6, 1]$ ,
- $A' = [9, 4], B' = [9, 2], C' = [7, 4], D' = [7, 2]$ .

Určete analytická vyjádření těchto transformací a řešte předchozí sérii úloh.

- (3) Určete analytické vyjádření osové souměrnosti v rovině (resp. v prostoru) podle osy určené body  $A = [2, 0]$  a  $B = [0, 2]$  (resp.  $A = [2, 0, 0]$  a  $B = [0, 2, 0]$ ).
- (4) Určete analytické vyjádření středového promítání se středem  $S = [0, 0, 4]$  trojrozměrného prostoru do roviny  $\alpha = \{x_1 + x_2 = 3\}$ .
- (5) Pokud toho ještě nemáte dost, složte některé z výše uvedených transformací a řešte znovu některé z předchozích úloh.
- (6) Konfrontujte svoje předchozí výsledky s nějakou vhodnou názornou pomůckou.<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Viz např. <http://www.geogebraTube.org/student/mWpijCH4E>

## 16 Samodružné prvky

Ve zbytku této kapitoly diskutujeme téměř výhradně **transformace**  $f : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  projektivního rozšíření nějakého afinního prostoru  $\mathcal{A}$ , tj. zobrazení takového prostoru do sebe. Velmi užitečnou informaci o druhu dané transformace poskytují samodružné, neboli invariantní prvky. Několik příkladů klasifikací podle samodružných prvků uvádíme v podkap. 18.

*Samodružná* podmnožina  $M \subset \tilde{\mathcal{A}}$  transformace  $f$  je taková podmnožina, která se zobrazuje sama do sebe, tj.

$$f(M) \subseteq M.$$

Speciálně, *samodružné body* jsou právě pevné body transformace. Samodružné body mohou být jak vlastní, tak nevlastní. Nevlastním samodružným bodům se říká *samodružné směry*.

Nezapomeňte, že je nutné rozlišovat mezi samodružnými podmnožinami a podmnožinami samodružných bodů!



### 16.1 Samodružné body (a směry)

Bod  $X \in \tilde{\mathcal{A}}$  je samodružným bodem transformace  $f$ , pokud

$$f(X) = X,$$

což je ekvivalentní podmínce

$$F(\mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{x}, \quad (16.7)$$

kde  $\mathbf{x} \in W$  je vektor reprezentující bod  $X \in \tilde{\mathcal{A}}$ ,  $F : W \rightarrow W$  je lineární transformace odpovídající projektivní transformaci  $f : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  a  $\lambda$  je nějaké reálné číslo. To znamená, že:

*Samodružné body projektivní transformace  $f$  odpovídají právě (nenulovým) **charakteristickým vektorům** zastupující lineární transformace  $F$ .*

Určit charakteristické vektory lineární transformace  $F$  bychom měli umět z lineární algebry. Pro jistotu si základní myšlenky stručně připomeneme. . .

#### Algebraická odbočka

Podmínka (16.7) je v souřadnicích ekvivalentní soustavě lineárních rovnic

$$(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (16.8)$$

kde  $\mathbf{F}$  je matice zobrazení  $F$  a  $\mathbf{E}$  je jako obvykle jednotková matice. Tato soustava má netriviální řešení právě tehdy, když

$$\det(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}) = 0. \quad (16.9)$$

Determinant na levé straně je polynom v proměnné  $\lambda$ , jehož kořeny jsou tzv. charakteristická čísla transformace  $F$ .<sup>5</sup>

Charakteristické vektory odpovídající příslušným charakteristickým číslům získáme řešením soustavy (16.8), kam postupně tato čísla dosazujeme za  $\lambda$ . Zejména, charakteristické vektory odpovídající témuž charakteristickému číslu tvoří vektorový podprostor ve  $W$ . Naopak, nenulové charakteristické vektory odpovídající různým charakteristickým číslům jsou nutně lineárně nezávislé.

<sup>5</sup>Místo přívlastku *charakteristický/-á/-é* se v algebře zpravidla stručněji říká *vlastní*. Z pochopitelných důvodů se raději držíme prvního pojmenování.

### Afinní případ

Pokud je transformace  $f$  afinní, pak vzhledem k charakterizacím z odst. 15.3 můžeme soustavu (16.8) psát jako

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{c} & \mathbf{D} - \lambda \mathbf{E} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (16.10)$$

Odtud vidíme, že vlastní samodružné body ( $x_0 = 1$ ) afinní transformace  $f$  nutně odpovídají charakteristickému číslu  $\lambda = 1$  a jsou řešením soustavy

$$(\mathbf{D} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = -\mathbf{c}, \quad (16.11)$$

zatímco samodružné směry, tj. nevlastní samodružné body ( $x_0 = 0$ ) mohou odpovídat jakýmkoli charakteristickým číslům  $\lambda$  a jsou řešením soustavy

$$(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (16.12)$$

Všimněte si, že (16.11) je ekvivalentní s (15.5) po dosazení  $X' = X \dots$

## 16.2 Jednoduchá pozorování

Z předchozího výkladu bezprostředně vyplývá několik geometricky zajímavých výsledků s velmi jednoduchým algebraickým zdůvodněním. Samodružný bod bez dalšího přívlastku může být jak vlastní, tak nevlastní; tyto případy rozlišujeme pouze tam, kde to je nutné.

### Projektivní

**Věta.** (1) Každá projektivní transformace projektivního prostoru **sudé** dimenze má aspoň jeden samodružný bod.

(2) Samodružné body odpovídající **témuž** charakteristickému číslu, tvoří projektivní podprostor.

*Důkaz.* (1) Matice zastupujícího lineárního zobrazení má rozměry o 1 větší než je dimenze prostoru. To znamená, že charakteristický polynom (16.9) je lichého stupně. Protože je to polynom s reálnými koeficienty, má nutně aspoň jeden reálný kořen. Pro každý takový kořen máme garantováno netriviální řešení soustavy (16.8), jež určuje samodružné body transformace.

(2) Samodružné body odpovídající charakteristickému číslu  $\lambda$  jsou určeny řešením homogenní soustavy lineárních rovnic (16.8). Všechna tato řešení tvoří vektorový podprostor v zastupujícím vektorovém prostoru  $W$ , jež zastupuje projektivní podprostor v projektivním prostoru  $\mathcal{P}(W)$ .  $\square$

Povšimněte si, že neříkáme nic o samodružných bodech odpovídajícím různým charakteristickým číslům. Úplně klidně se tak může stát, že projektivní transformace má několik izolovaných navzájem různých samodružných bodů. (Tyto body pak nutně odpovídají různým charakteristickým číslům, takže jich nemůže být víc než je dimenze zastupujícího vektorového prostoru. . .)

## Afinní

**Věta.** (1) Projektivní rozšíření každé afinní transformace afinního prostoru libovolné dimenze má aspoň jeden samodružný bod (vlastní nebo nevlastní).

(2) Projektivní rozšíření každé afinní transformace afinního prostoru **liché** dimenze má aspoň jeden nevlastní samodružný bod.

(3) Pokud má afinní transformace nějaké vlastní samodružné body, pak všechny tyto body tvoří afinní podprostor.

*Důkaz.* (1) Matice zastupujícího lineárního zobrazení je tvaru (15.4). Odtud plyne, že  $\lambda = 1$  je vždy kořenem charakteristického polynomu, viz též zápis (16.10).

(2) Nevlastní samodružné body jsou řešením soustavy (16.12). Charakteristický polynom  $\det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{E})$  je polynom s reálnými koeficienty a je lichého stupně. Proto má aspoň jeden reálný kořen.

(3) Vlastní samodružné body jsou určeny jakožto řešení (nehomogenní) soustavy lineárních rovnic (16.11). Množina všech vlastních samodružných bodů je proto buď prázdná, nebo tvoří afinní podprostor v  $\mathcal{A}$ .  $\square$

Z uvedeného mimo jiné vyplývá, že pokud má afinní transformace dva různé vlastní samodružné body, potom jsou samodružné také všechny body na přímce, která tyto body spojuje. Pro nevlastní samodružné body (samodružné směry) něco podobného platí, pouze když odpovídají témuž charakteristickému číslu, viz předchozí diskuzi. . .

## Podobné a shodné

Nyní zúžíme naši pozornost na podobnosti a shodnosti. V následující větě jsou shodnosti zahrnuty jakožto podobnosti s koeficientem  $k = 1$ :

**Věta.** Pro každou podobnost  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  s koeficientem  $k$  platí:

(1) Modul transformace  $f$  je roven  $\pm k^n$ , kde  $n = \dim \mathcal{E}$ .

(2) Je-li  $\lambda$  reálné charakteristické číslo transformace  $\vec{f}$ , pak  $\lambda = \pm k$ .

(3) Samodružné směry odpovídající **různým** charakteristickým číslům jsou navzájem kolmé.

(4) Je-li  $U \subseteq \vec{\mathcal{E}}$  samodružný podprostor transformace  $\vec{f}$ , pak také kolmý doplněk  $U^\perp$  je samodružným podprostorem.

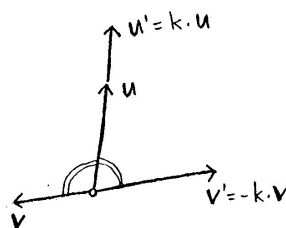
*Důkaz.* (1) Modul  $f$  je podle definice právě determinant  $\det \mathbf{D}$ , přičemž matice  $\mathbf{D}$  je tvořena obrazy vektorů ortonormální báze. Modul  $f$  je tedy (orientovaný) objem obrazu jednotkové krychle. Pokud je  $f$  podobnost, může to být jedině  $\pm k^n$ .

(2) Indukované zobrazení  $\vec{f}$  zachovává velikosti vektorů až na konstantní násobek  $k$ .

(3) Charakteristické vektory odpovídající různým charakteristickým číslům jsou lineárně nezávislé; vybrané vektory označíme  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ . Přitom charakteristická čísla jsou v našem případě pouze  $k$  a  $-k$ , tudíž jeden z vektorů se zobrazuje na svůj  $k$ -násobek a druhý na  $-k$ -násobek; řekněme  $\mathbf{u}' = k\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}' = -k\mathbf{v}$ . Odchylka vektorů se zachovává  $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sphericalangle(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$  a současně

$$\pi = \sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}') = \sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \sphericalangle(\mathbf{u}', \mathbf{v}').$$

Odtud plyne, že  $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sphericalangle(\mathbf{u}', \mathbf{v}') = \frac{\pi}{2}$ .



Obrázek 16.8: Charakteristické vektory odpovídající různým charakteristickým číslům jsou lineárně nezávislé

(4) Uvažme libovolný vektor  $\mathbf{w} \in U^\perp$ , tzn.  $\mathbf{w} \perp U$ . Podle předpokladu je také  $\mathbf{w}' \perp U'$ , kde  $U' \subseteq U$  značí obraz podprostoru  $U$ . Zúžení podobnosti na jakýkoli invariantní podprostor je zase podobnost (tedy bijekce), proto je obrazem  $U$  tentýž podprostor (tedy nikoli nějaký menší podprostor). Proto je  $\mathbf{w}' \perp U$ , neboli  $\mathbf{w}' \in U^\perp$ .  $\square$

$\Rightarrow$  Díky druhému tvrzení nemusíme při určování samodružných směrů podobných (tedy i shodných) transformací pracně hledat kořeny charakteristického polynomu! Stačí jenom ověřit jedině dva možné kandidáty  $\lambda = k$  a  $\lambda = -k$ .

**Věta.** Každá podobná transformace, která **není** shodností, má právě jeden vlastní samodružný bod.

*Důkaz.* Vlastní samodružné body jsou řešením soustavy rovnic (16.11). Tato soustava má jednoznačné řešení právě tehdy, když determinant matice  $\mathbf{D} - \mathbf{E}$  je nenulový.

Kdyby byl tento determinant nulový, znamenalo by to, že indukovaná lineární transformace by měla charakteristické číslo 1. To by však bylo v rozporu s tvrzením (2) v předchozí větě. Proto je  $\det(\mathbf{D} - \mathbf{E}) \neq 0$  a soustava má jednoznačné řešení.  $\square$

### $\Rightarrow$ 16.3 Cvičení

- (1) Pro každou transformaci ze cvičení 15.5 určete všechny její samodružné body.
- (2) Zapřemýšlejte, zda některý z předchozích výsledků neumíte vymezit konstrukčně.
- (3) Udejte příklad projektivní transformace v rovině (včetně analytického vyjádření), která má vlastní samodružný bod  $B = [1, 0]$  a bod  $C = [0, -1]$  zobrazuje na  $C' = [3, 2]$ .

## 17 Základní transformace

Z dřívějšíka známe několik příkladů základních transformací, a to zejména v rovině. V této části tento přehled okomentujeme, doplníme a jako obvykle zobecníme.

### 17.1 Základní transformace v rovině

Základní bijektivní (regulární) transformace v rovině jsou:

- osová kolineace (základní kolineace),
- osová afinita (základní afinita),
- stejnolehlost (základní podobnost),
- osová souměrnost (základní shodnost).


Důvod, proč těmto zobrazením říkáme základní, tkví v tom, že skládáním základních transformací je možné vyjádřit všechny transformace určitého typu (viz odst. 17.3). Kromě toho všechny transformace v uvedeném výčtu mají něco společného — všechny základní transformace mají:

- *osu* = přímku samodružných bodů,
- *střed* = samodružný bod takový, že každá přímka jdoucí tímto bodem je samodružná.

Osa a střed mohou být jak vlastní, tak nevlastní a podle toho taky můžeme jednotlivé typy základních transformací rozlišovat. Před tím, než tak učiníme, připomeneme si několik základních informací o úplně nejzákladnější transformaci v rovině, tj. o **osové kolineaci**. Všechny ostatní základní transformace chápeme jako speciální, resp. limitní případy osové kolineace.

Mezi takové mezní případy samozřejmě patří:

- středové promítání do přímky (projektivní),
- rovnoběžné promítání do přímky (afinní).

Tyto příklady chápeme jako základní **singulární** transformace v rovině. Obě tyto transformace mají přímku samodružných bodů, tedy *osu*. Střed promítání však není *středem* ve výše vymezeném smyslu — obraz tohoto bodu není vůbec definován, tudíž nemůže být samodružný! Tyto poznatky nebudeme v dalším zrovna důsledně opakovat, měli bychom je však mít vždy důsledně na paměti. . . 

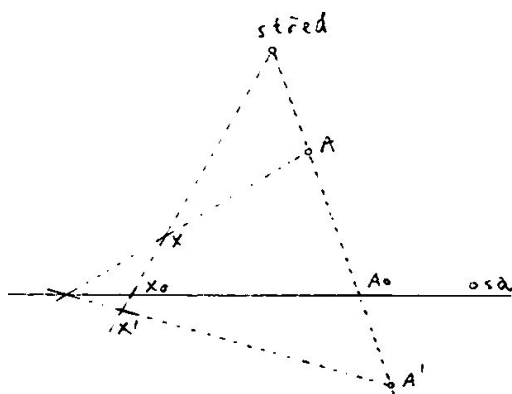
#### Osová kolineace

Konstrukci obrazu bodu  $X$  v osové kolineaci určené osou  $o$ , středem  $S$  a obrazem jednoho dalšího bodu  $A$  připomínáme na obr. 17.9. Konstrukce je odvozena z následující definice (a Pappovy věty).

**Definice.** *Osová kolineace* je transformace projektivní roviny určená osou  $o$ , středem  $S$  a obrazem  $A'$  bodu  $A$  ( $A \notin o$ ,  $A \neq S$ ), a to tak, že pro obraz  $X'$  libovolného bodu  $X$  platí

$$XX' \cap AA' = S \quad \text{a} \quad (X'X X_0S) = (A'A A_0S) = \text{konst.}, \quad (17.13)$$

kde  $X_0$ , resp.  $A_0$ , značí průsečík přímky  $XX'$ , resp.  $AA'$ , s osou  $o$ .



Obrázek 17.9: Obraz bodu  $X$  v osové kolineaci určené osou, středem a obrazem bodu  $A$ .

Konstantě  $(A'A A_0 S)$  se říká *charakteristika* nebo *modul* osové kolineace.<sup>6</sup> V obecné projektivní rovině umíme rozlišovat pouze následující tři případy:

- (1)  $A' \in o$ , tzn.  $A' = A_0$  a  $(A'A A_0 S) = 0$ : v tomto případě je obraz libovolného bodu  $X$  na ose  $o$  a transformace je promítání ze středu  $S$  do přímky  $o$ .
- (2)  $S \in o$ , tzn.  $S = A_0$  a  $(A'A A_0 S) = 1$ : v tomto případě se jedná o regulární zobrazení, kterému budeme říkat *projektivní elace*.
- (3)  $A' \notin o$  a  $S \notin o$ : obecná osová kolineace.

V projektivním rozšíření afinní roviny můžeme rozlišovat další případy podle toho, zda určující prvky osové kolineace jsou vlastní/nevlastní:

- (a)  $S$  nevlastní,  $o$  vlastní: osová afinita s modulem  $(A'A A_0 S_\infty) = (A'A A_0)$ .
- (b)  $S$  vlastní,  $o$  nevlastní: stejnoolehlost se středem  $S$  a koeficientem  $(A'A A_0 S) = (A'A S)$ .
- (c)  $S$  nevlastní,  $o$  nevlastní: posunutí.

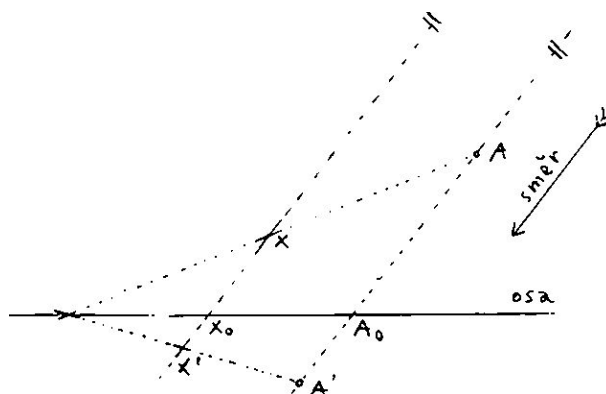
## Přehled

Přehled všech základních transformací v rovině podle typu a vzájemné polohy určujících prvků je v tab. 17.2. V tomto přehledu navíc rozlišujeme podle specifických hodnot modulu. Všimněte si, že v případě, že základní transformace je afinní, je tento modul totéž co modul afinní transformace ve smyslu definice na str. 108.

Případ identické transformace, resp. promítání do bodu uvádíme v závorkách, protože se jedná o triviální, resp. degenerovaný případ, který do tohoto přehledu sice patří, ale není základní transformací ve výše vymezeném smyslu. Termín „*harmonická souměrnost*“ není úplně obvyklý, pročez je raději v uvozovkách; v tomto případě je modul roven  $-1$ , což znamená, že každá čtveřice  $(X', X, X_0, S)$  je v harmonickém poměru. Šikmá souměrnost je harmonická souměrnost

<sup>6</sup>Definici dvojpoměru čtveřice bodů najdete v odst. 13.3. Pojmenování modul se může zdát vzhledem k předchozímu užití pro afinní transformace nevhodné — níže vysvětlujeme, že tomu tak není.





Obrázek 17.10: Obraz bodu  $X$  v osově afinitě určené osou, směrem a obrazem bodu  $A$ .

s nevlastním středem a osová souměrnost je navíc charakterizována tím, že směr souměrnosti je kolmý k ose.

Uvědomte si, že podmínky v jednotlivých sloupcích nejsou úplně nezávislé! Z předchozího např. víme, že pokud  $S \in o$ , potom je modul nutně roven 1. Taky se jistě nemůže stát, aby  $S$  i  $o$  byly nevlastní a současně  $S \notin o$ ...

střed $S$	osa $o$	$S \in o$	modul	druh
vlastní	vlastní	ne	0	středové promítání do přímky
		ano	1	projektivní elace
		ne	-1	„harmonická souměrnost“
		ne	jinak	osová kolineace
nevlastní	vlastní	ne	0	rovnoběžné promítání do přímky
		ano	1	elace
		ne	-1	šikmá, resp. osová souměrnost
		ne	jinak	osová afinita
vlastní	nevlastní	ne	0	(promítání do bodu)
		ne	1	(identita)
		ne	-1	středová souměrnost
		ne	jinak	stejnolehlost
nevlastní	nevlastní	ano	1	posunutí

Tabulka 17.2: Klasifikace základních transformací v rovině

## 17.2 Základní transformace obecně

V předchozím přehledu základních transformací v rovině jsme začali postřehem, že každá taková transformace má osu a střed. V tomto odstavci ukážeme, že existence těchto prvků spolu velmi úzce souvisí. Úvodní definice vypadají takto:

**Definice.** *Střed* projektivní transformace je samodružný bod takový, že každá přímka procházející tímto bodem je samodružná.

*Nadosa* projektivní transformace je nadrovina samodružných bodů.

Projektivní transformace, která má nadosu, se nazývá *základní transformace*.

Jinak můžeme říct, že základní transformace jsou neidentické transformace s maximálním možným podprostorem samodružných bodů.

Nejzákladnější transformací v obecném projektivním prostoru je **nadosová kolíneace** a podobně modifikujeme ostatní pojmenování z předchozího odstavce. Základní singulární transformací je promítání do nadroviny. Klasifikace základních transformací je až na tyto změny v názvosloví úplně stejná jako v tab. 17.2, proto se jí dále nezabývat nebudeme.

Místo toho dokážeme dvě obecná tvrzení, jež jsme zatím přehlíželi. Jedná se o působivé zobecnění **Desarguesovy věty**:

**Věta.** *Předpokládejme, že  $f$  je neidentická regulární projektivní transformace. Potom platí:*

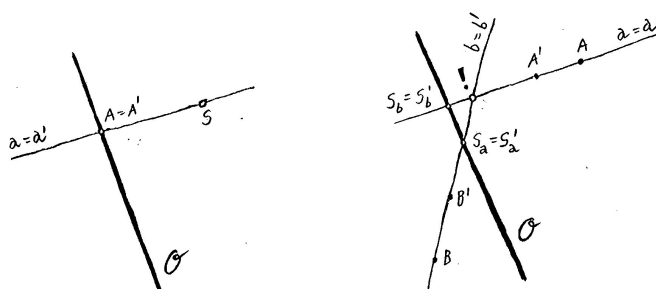
(1)  *$f$  má nadosu právě tehdy, když  $f$  má střed.*

(2)  *$f$  má buď právě jednu nadosu (a právě jeden střed), nebo žádnou nadosu (a žádný střed).*

Nejdřív trochu značení: dimenze projektivního prostoru je  $n$ , tzn. dimenze zastupujícího vektorového prostoru je  $n + 1$  (což je také stupeň charakteristického polynomu (16.9)).

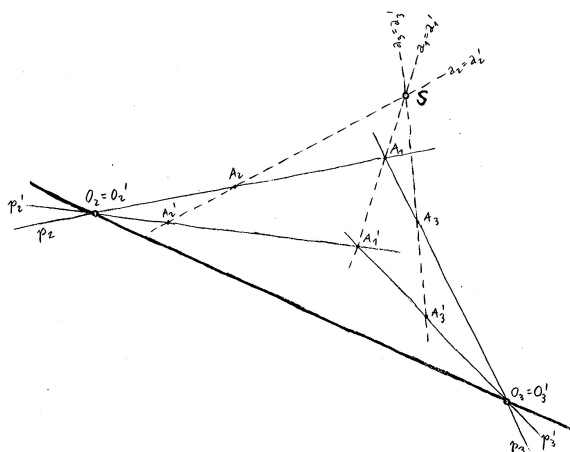
*Důkaz.* (1) Nadosa  $\mathcal{O}$  je nadrovina samodružných bodů, jež odpovídá všem řešením soustavy (16.8). Odpovídající charakteristické číslo  $\lambda$  proto musí být kořenem charakteristického polynomu s násobností alespoň  $n$ . Protože má tento polynom reálné koeficienty a známe  $n$  jeho reálných kořenů, musí mít ještě jeden reálný kořen, který si označíme třeba  $\mu$ .

- (a) Pokud je  $\mu \neq \lambda$ , pak charakteristický vektor odpovídající  $\mu$  je lineárně nezávislý vzhledem ke všem vektorům odpovídajícím číslu  $\lambda$ . To znamená, že tento vektor reprezentuje samodružný bod  $S$ , který neleží v nadosě  $\mathcal{O}$ . Libovolná přímka jdoucí bodem  $S$  protíná nadrovinu  $\mathcal{O}$  v bodě, který je samodružný. Proto je libovolná přímka jdoucí bodem  $S$  samodružná, tudíž  $S$  je střed.
- (b) Pokud je  $\mu = \lambda$ , pak střed musí ležet v nadosě  $\mathcal{O}$  a v následujícím jej vymezíme. Uvažme libovolný bod  $A \notin \mathcal{O}$  a jeho obraz  $A'$ . Protože transformace není identita, platí  $A' \neq A$  a tyto dva body určují přímku, kterou označíme  $a$ . Přímka  $a$  protíná nadosu  $\mathcal{O}$  v samodružném bodě  $S_a$ , a proto je  $a$  samodružná. Podobně pro libovolný jiný bod  $B \notin \mathcal{O}$  platí, že  $b = BB'$  je samodružná přímka; průsečík  $b$  s nadosou  $\mathcal{O}$  označíme  $S_b$ . Protože  $a$  i  $b$  jsou samodružné přímky, je jejich průsečík samodružným bodem, a proto musí ležet v nadosě  $\mathcal{O}$ . Odtud plyne, že  $S_a = S_b$  je hledaný střed.



Obrázek 17.11: Pokud existuje nadosa  $\mathcal{O}$ , potom existuje střed: (a)  $S \notin \mathcal{O}$ , (b)  $S \in \mathcal{O}$  jakožto společný bod  $S_a = S_b = S'_b = S'_a$ .

Naopak, předpokládejme, že  $S$  je středem transformace  $f$ . Uvažme  $n + 1$  libovolných bodů  $A_1, A_2, \dots$  takových, že spolu s bodem  $S$  jsou v nejobecnější možné poloze (tzn. žádná  $(n + 1)$ -tice neleží v jedné nadrovině). Podle předpokladu se aspoň jeden z těchto bodů musí zobrazit někam jinam než sám na sebe; řekněme, že  $A'_1 \neq A_1$ . Nyní postupně uvažujeme dvojice přímk  $p_i = A_1A_i$  a  $p'_i = A'_1A'_i$ , kde  $i = 2, 3, \dots$ . Protože každý bod  $A'_i$  leží na přímce  $SA_i$ , patří každá dvojice přímek  $p_i, p'_i$  do nějaké roviny. Proto se  $p_i$  a  $p'_i$  protínají, a to v samodružném bodě, který označíme  $O_i$ . Z úvodních předpokladů lze vydedukovat, že body  $O_2, O_3, \dots$  tvoří nadrovinu  $\mathcal{O}$ , jejíž každý bod je samodružný. Proto je  $\mathcal{O}$  nadosou.



Obrázek 17.12: Pokud existuje střed  $S$ , potom existuje nadosa  $\mathcal{O}$  jakožto nadrovina určená body  $O_1, O_2, \dots$

(2) Přemýšlejme, co by se stalo, kdyby transformace  $f$  měla dvě různé nadosy: Uvažme dvě libovolné přímky  $a$  a  $b$  jdoucí libovolným bodem  $C$ , který neleží ani v jedné nadosě. Jak  $a$ , tak  $b$  by protínala každou z nados v samodružných bodech, proto by jak  $a$ , tak  $b$  byla samodružnou přímkou. Odtud by plynulo, že  $C$  by byl samodružný bod, což by v důsledku znamenalo, že transformace by byla identická.

Podobně, se by se dalo zdůvodnit, že kdyby transformace měla dva různé středy, pak by to nutně byla identita, což by opět bylo ve sporu s předpokladem věty. □

Tvrzení věty lze rozšířit také pro **singulární** projektivní transformace, ovšem střed v takovém případě má trochu jiný význam, než jak jsme jej vymezili výše (zejména nemusí mít definován obraz). Z pochopitelných důvodů toto téma dál rozvádět nebudeme. . .

### 17.3 Skládání základních transformací

Na úvod začneme s tvrzením, které zobecňuje sérii pozorování v rovině, jimiž jsme se bavili v konstrukční geometrii.

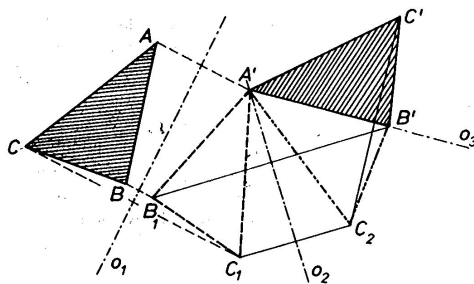
**Věta.** (1) Každá **regulární** projektivní transformace v prostoru dimenze  $n$  lze vyjádřit jako složení nejvýše  $n + 2$  základních transformací.

(2) Každá **afinní** transformace v prostoru dimenze  $n$  lze vyjádřit jako složení nejvýše  $n + 1$  základních transformací.

Maximální počet základních transformací ve zmiňovaném rozkladu zřejmě souvisí s určeností projektivních, resp. afinních zobrazení, viz větu 14.2 na str. 96, resp větu 4.5 na str. 19:

Idea důkazu je poměrně prostá — v podstatě zobecňuje celkem jasnou konstrukci v případě shodných transformací, kterou připomínáme na obr. 17.13. Zdůvodnění pro afinní transformace lze najít např. v [Sek, str. 38–39 ve II. díle]. Uvědomte si, že čím obecnější je typ transformace,

☞ tím více máme volnosti v možných rozkladech. . .



Obrázek 17.13: [Sek] Každá shodnost v rovině je složením nejvýše tří osových souměrností.

#### Poznámky

☞ (1) Vzhledem k předchozí jemnější klasifikaci základních transformací se můžeme ptát, co lze získat skládáním základních transformací jistého druhu. Úvahy tohoto typu doporučujeme jako užitečné cvičení. Jistou náповědou může být, že v afinním případě je modul složené transformace roven součinu modulů transformací, z nichž je tato složena. Na ukázkou uvádíme jeden z možných výsledků:

☞ Každá **ekviafinita** v prostoru dimenze  $n$  lze vyjádřit jako složení nejvýše  $n + 1$  **šikmých** souměrností.

Šikmá souměrnost je tedy o něco „základnější“ ekviafinita než oblíbená elace.

(2) Skládáním základních transformací, které mají stejnou nadosu, musí být zase základní transformace s toutéž nadosou. Speciálně, složením transformací s **nevlastní** nadosou (posunutí, stejnolehlost) dostáváme transformaci se stejnou vlastností. Jinými slovy, posunutí a stejnolehlost (a její speciální, příp. degenerované podoby) jsou jediné transformace, které mají všechny směry samodružné, a jejich skládáním nemůžeme dostat nic typově jiného. Triviálním poznatkem tohoto druhu je:

*Složením posunutí o vektor  $\mathbf{u}$  a posunutí o vektor  $\mathbf{v}$  je posunutí o vektor  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ .*

Méně triviální poznatek je zformulován v následující větě:

**Věta** (o skládání stejnolehlostí). *V libovolném eukleidovském prostoru uvažujme stejnolehlosti  $h_i$  se středy  $S_i$  a koeficienty  $k_i$  ( $i = 1, 2$ ); složené zobrazení  $h_2 \circ h_1$  označíme  $h$ .*

(a) *Pokud  $k_1 k_2 = 1$  a  $S_1 = S_2$ , potom je  $h$  identita.*

(b) *Pokud  $k_1 k_2 = 1$  a  $S_1 \neq S_2$ , potom je  $h$  posunutí o vektor  $\mathbf{v} = (1 - k_2) \overrightarrow{S_1 S_2}$ .*

(c) *V ostatních případech je  $h$  stejnolehlost s koeficientem  $k = k_1 k_2$  a středem*

$$S = S_1 + \frac{1 - k_2}{1 - k_1 k_2} \overrightarrow{S_1 S_2}.$$

Konstrukční zdůvodnění téměř celé věty v eukleidovské rovině známe z kurzu konstrukční geometrie.<sup>7</sup> Všechno najednou a úplně obecně dokážeme z explicitního vyjádření složeného zobrazení pomocí (15.6).

*Důkaz.* Stejnolehlost  $h_1$ , resp.  $h_2$  je určena předpisem  $h_1(X) = k_1 X + (1 - k_1)S_1$ , resp.  $h_2(X) = k_2 X + (1 - k_2)S_2$ . Složené zobrazení  $h = h_2 \circ h_1$  je tedy určeno předpisem

$$h(X) = h_2(k_1 X + (1 - k_1)S_1) = \dots = k_2 k_1 X + k_2(1 - k_1)S_1 + (1 - k_2)S_2.$$

Odtud postupně vyvozujeme:

(a) Pokud je  $k_1 k_2 = 1$  a  $S_1 = S_2$ , potom po dosazení dostáváme

$$h(X) = X + 0,$$

což jsou transformační rovnice identického zobrazení.

(b) Pokud je  $k_1 k_2 = 1$  a  $S_1 \neq S_2$ , potom po dosazení a úpravě dostáváme

$$h(X) = X + (1 - k_2)(S_2 - S_1),$$

což jsou transformační rovnice posunutí o vektor  $\mathbf{v} = (1 - k_2) \overrightarrow{S_1 S_2}$ .

<sup>7</sup>Podstatná část tvrzení (3) tkví v tom, že střed  $S$  leží na přímce  $S_1 S_2$ .

- (c) V ostatních případech je  $h$  obecná stejnolehlost s koeficientem  $k = k_1 k_2$ . Pokud  $S$  značí střed stejnolehlosti  $h$ , pak její transformační rovnice jsou  $h(X) = kX + (1 - k)S$ . Porovnáním s předchozím vyjádřením  $h$  dostáváme

$$S = \frac{k_2(1 - k_1)}{1 - k} S_1 + \frac{1 - k_2}{1 - k} S_2,$$

což je ekvivalentní s vyjádřením ve větě. □

Všechny stejnolehlosti, posunutí a identické zobrazení tvoří grupu, které se říká *Mongeova grupa*. Bezprostředním důsledkem předchozí věty je tzv. **Mongeova věta** (o středech stejnolehlostí tří kružnic v rovině)...

## 17.4 Cvičení



- (1) Pro každou transformaci ze cvičení 15.5 rozhodněte, zda je nebo není základní; pokud je, tak ji pojmenujte.
- (2) Udejte příklad transformace v rovině (včetně analytického vyjádření), která má vlastní osu, nevlastní střed a modul = 1.
- (3) Transformace eukleidovské roviny je dána analytickým vyjádřením:

$$f(x_1, x_2) = (x_2 + 4, -x_1).$$

Dokažte, že  $f$  je shodnost a vyjádřete  $f$  jako složení osových souměrností.

- (4) Jsou dány dvě transformace v rovině:

$f_1$  = stejnolehlost se středem  $S_1 = [2, 1]$  a koeficientem  $k_1 = 2$ ,

$f_2$  = stejnolehlost se středem  $S_2 = [4, -1]$  a koeficientem  $k_2 = \frac{1}{2}$ .

Určete druh a určující prvky transformace  $f_2 \circ f_1$ , resp.  $f_1 \circ f_2$ .

## 18 Další klasifikace a poznámky

V této části doplníme ještě několik postřehů k jednotlivým typům transformací, zejména ke shodnostem a podobnostem.

### 18.1 Shodnosti

Již od útlého mládí známe všechny shodnosti v rovině a navíc je umíme pojmenovat. V tomto odstavci nabízíme zdůvodnění, proč jich není víc, představíme jejich klasifikaci pomocí samodružných prvků a současně řekneme něco o jejich analytickém vyjádření. Poté naznačíme, jak to vypadá se shodnostmi v obecném eukleidovském prostoru.

### Klasifikace shodností v rovině

V rovině rozlišujeme následující druhy shodností:

- (1) identita,
- (2) posunutí,
- (3) otáčení,
- (3') středová souměrnost,
- (4) osová souměrnost,
- (5) posunutá souměrnost.

Středová souměrnost je otáčení o přímý úhel, proto ji podřazujeme obecnému otáčení. První tři transformace jsou přímé, poslední dvě nepřímé. Při prvním pokusu o vyjmenování všech shodností v rovině se obvykle zapomíná na posunutou souměrnost, což je složenina osové souměrnosti a posunutí (ve směru osy).



Obrázek 18.14: [Mar] Nezapomínejme na posunutou souměrnost!

Skládáním shodností můžeme dostat zase jenom shodnost — skládáním všech možných dvojic výše vyjmenovaných shodností lze ukázat, že tento výčet je úplný. ◀

Alternativní zdůvodnění téhož plyne z faktu, že každá shodnost v rovině je jednoznačně určena (shodným) obrazem  $A'B'C'$  nějakého trojúhelníku  $ABC$ . Postupně můžeme uvažovat všechny typově různé (shodné) obrazy úsečky  $AB$ , obraz bodu  $C$  je pak určen dvojnásobně s tím, že jedna možnost odpovídá přímé shodnosti, druhá nepřímé. Tímto způsobem umíme vyčerpat všechny druhy shodností z výše uvedeného seznamu, viz obr. 18.15.

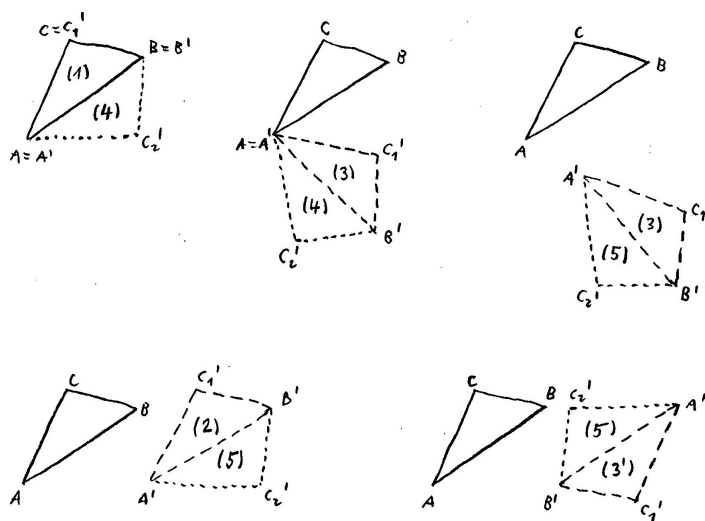
### Klasifikace podle samodružných prvků

Při předchozím důkladném rozboru jsme si mohli povšimnout, že všechny typy shodností lze jednoznačně identifikovat podle samodružných prvků. Tento postřeh představuje možný návod k rozpoznávání shodností, a to zejména v případech, kdy jsou tyto dány transformačními rovnicemi. Přehledné shrnutí je v tab. 18.3.

### Analytické vyjádření, určující prvky a kanonický tvar

V tabulce 18.3 je o něco víc informací, než jsme zatím diskutovali. Obsahuje také transformační rovnice v tzv. kanonickém tvaru, což jsou nejjednodušší možná analytická vyjádření vzhledem k obzvláště vhodně zvoleným souřadným soustavám. Takové volby úzce souvisí s **určujícími prvky** toho kterého zobrazení, a ty jsou následující:

- (1) k identitě není co dodat,
- (2) posunutí je určeno vektorem,



Obrázek 18.15: Přehled shodností v rovině pomocí obrazů trojúhelníku: (a)  $A'B' = AB$ , (b)  $A' = A$  a  $B' \neq B$ , (c)  $A' \neq A$  a  $B' \neq B$ , (c<sub>1</sub>)  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ , (c<sub>2</sub>)  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BA}$ .

- (3) otáčení je určeno středem a úhlem,  
 (3') středová souměrnost je určena středem,  
 (4) osová souměrnost je určena osou,  
 (5) posunutá souměrnost je určena osou a vektorem posunutí.

Vhodných souřadných soustav lze vždy najít více (nikoli však libovolně mnoho). Návod k určení takové soustavy tkví v porozumění pojmu matice zastupujícího lineárního zobrazení, viz odst. 15.2. Na základě předchozího přehledu určujících prvků by mělo být snadným cvičením zvolit souřadnou soustavu pro každou shodnost tak, aby transformační rovnice byly v kanonickém tvaru.



Analytické vyjádření shodnosti vzhledem k obecné kartézské souřadné soustavě není o moc komplikovanější než výše uvedené. Podmínka

$$\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} = \mathbf{E}$$

z druhé věty v odst. 15.3 je natolik omezující, že matice  $\mathbf{D}$  může být pouze dvojího typu, a to

$$\text{buď } \mathbf{D}_+ = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \text{ nebo } \mathbf{D}_- = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (18.14)$$

kde  $\alpha \in \mathbb{R}$  a znaménka zřejmě rozlišují shodnost přímou a nepřímou. Názornou interpretaci parametru  $\alpha$  najdete na obr. 18.16.



Z uvedeného by mělo být zřejmé, že pro jakoukoli shodnost v rovině je velmi snadné určit její transformační rovnice, viz cvičení 18.4.



Samodružné směry \ Samodružné body	Žádný	Právě dva na sebe kolmé	Každý
Žádný		$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$ $N$ Posunutá souměrnost	$X' = X + \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$ $P$ $e \neq 0$ Posunutí
Právě jeden	$X' = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} X$ $P$ $\alpha \neq k\pi, \quad k \text{ celé}$ Rotace o úhel $\alpha$ se středem v počátku		$X' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$ $P$ Středová souměrnost podle počátku
Vyplní přímku		$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$ $N$ Souměrnost podle osy $x$	
Každý			$X' = X$ $P$ Identita

Tabulka 18.3: [Ř1<sub>2</sub>] Klasifikace shodností v rovině podle samodružných prvků.

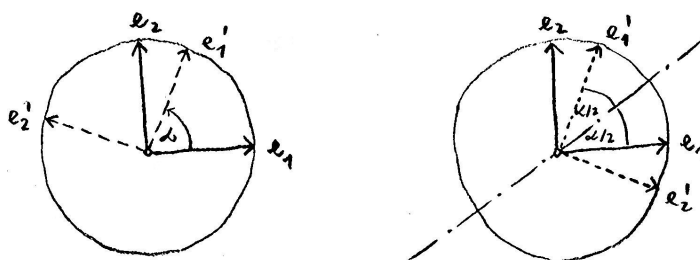
### Shodnosti v prostoru

Shodností v prostoru je o něco víc než v rovině, jejich klasifikace se však velmi rychle redukuje na předchozí klasifikaci v rovině. Stačí si všimnout, že:

*Každá shodnost v trojrozměrném prostoru má aspoň jeden samodružný směr.*

(To je důsledkem druhé části věty 16.2 na str. 113.) Kolmý doplněk k tomuto směru má dimenzi 2 a je to nutně samodružný podprostor (viz čtvrtou část věty 16.2 na str. 113). Zúžení shodnosti na tento podprostor je opět shodností, takže to musí být některá z výše diskutovaných shodností v dimenzi 2. Klasifikace shodností v prostoru je tedy odvozena z předchozí klasifikace v rovině — úplný výčet je následující:

- (1) identita,
- (2) posunutí,
- (3) otáčení,
- (3') osová souměrnost,
- (4) posunuté otáčení,



Obrázek 18.16: Přímý a nepřímý obraz ortonormální báze podle (18.14).

- (4') posunutá osová souměrnost,
- (5) souměrnost podle roviny (zrcadlení),
- (6) posunuté zrcadlení,
- (7) otočené zrcadlení,
- (7') středová souměrnost.

Prominentní postavení základní shodnosti v prostoru zaujímá souměrnost podle roviny neboli zrcadlení. Osová souměrnost v prostoru je přímá transformace, jakožto speciální případ otáčení kolem přímky. Středová souměrnost v prostoru je transformace nepřímá, zde chápána jako speciální případ otočeného zrcadlení, což je složenina otočení a zrcadlení podle roviny kolmé k ose otáčení...

Stejně jako v rovině platí, že všechny druhy shodností v prostoru je možné charakterizovat podle jejich samodružných prvků — přehled je uveden v tab. 18.4.

Transformační rovnice v této tabulce jsou opět v tzv. kanonickém tvaru. Shodnost v prostoru má aspoň jeden samodružný směr, který je generován vektorem odpovídajícím charakteristickému číslu  $\pm 1$ . Bereme-li takový vektor jako první a doplníme k němu další vektory do ortonormální báze celého prostoru, pak matice indukovaného lineárního zobrazení ke každé shodnosti vzhledem k takto vybrané bázi bude mít některý z následujících tvarů:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_- \end{pmatrix},$$

kde bloky  $\mathbf{D}_\pm$  jsou právě matice (18.14). (Aby to bylo zajímavější, v tabulce 18.4 vystupuje  $\mathbf{D}_+$  pod pseudonymem  $\mathbf{B}_\alpha$ .)

### Shodnosti obecně

Obecné závěry v eukleidovském prostoru obecné dimenze se dají vytušit z předchozí zkratky v dimenzi 3 a cvičení 18.4(2):

Charakteristický polynom může mít za reálné kořeny jedině  $\pm 1$  a komplexní kořeny jsou vždy v (komplexně sdružených) párech. Každý polynom má nad komplexními čísly právě tolik kořenů (včetně násobností), jaký je jeho stupeň, tzn. jaká je dimenze okolního prostoru. Reálným kořenům odpovídají reálné charakteristické vektory, které určují samodružné směry shodnosti. Komplexně sdruženým kořenům odpovídají dvojrozměrné samodružné podprostory takové, že

Samodružné směry Samodružné body	právé jeden	alespoň dva různé ale ne každý	každý
žádný	<p style="text-align: right;">P</p> $X' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_\alpha \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p><math>\alpha \neq k\pi, k \text{ celé}, c \neq 0</math></p> <p><b>Přemístění po šroubovici s osou <math>x_1</math></b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin: 10px;"> <math>\alpha = \pi</math> </div>	<p style="text-align: right;">N</p> $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$ <p><math>(c, d) \neq (0, 0)</math></p> <p><b>Posunutě zrcadlení se samodružnou rovinou <math>\rho \equiv x_3 = 0</math></b></p> <p style="text-align: right;">P</p> $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p><math>c \neq 0</math></p> <p><b>Posunutá osová souměrnost se samodružnou přímkou <math>x_1</math></b></p>	<p style="text-align: right;">P</p> <p><math>X' = X + C</math></p> <p><math>C \neq \mathbf{0}</math></p> <p><b>Posunutí</b></p>
právé jeden	<p style="text-align: right;">N</p> $X' = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_\alpha \end{pmatrix} X$ <p><math>\alpha \neq k\pi, k \text{ celé}</math></p> <p><b>Otočené zrcadlení</b> složené z otočení kolem osy <math>x_1</math> o úhel <math>\alpha</math> a souměrnosti podle roviny <math>\rho \equiv x_1 = 0</math></p>		<p style="text-align: right;">N</p> <p><math>X' = -X</math></p> <p><b>Středová souměrnost se středem v počátku</b></p>
vyplní přímku	<p style="text-align: right;">P</p> $X' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_\alpha \end{pmatrix} X$ <p><math>\alpha \neq k\pi, k \text{ celé}</math></p> <p><b>Otočení kolem osy <math>x_1</math> o úhel <math>\alpha</math></b></p>	<p style="text-align: right;">P</p> $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X$ <p><b>Souměrnost podle osy <math>x_1</math></b></p>	
vyplní rovinu	<p style="text-align: right;">N</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin: 10px;"> <math>\alpha = \pi</math> </div>	<p style="text-align: right;">N</p> $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X$ <p><b>Souměrnost podle roviny <math>\rho \equiv x_3 = 0</math></b></p>	
každý			<p style="text-align: right;">P</p> <p><math>X' = X</math></p> <p><b>Identita</b></p>

Tabulka 18.4: [Ř<sub>12</sub>] Klasifikace shodností v prostoru podle samodružných prvků.

zúžení na tyto podprostory je právě otáčení o úhel rovný argumentu odpovídajícího komplexního charakteristického čísla.

Na první pohled není zcela jasné, jakou roli hrají vyšší algebraické násobnosti kořenů, což na tomto místě nehodláme rozklíčovat. Bez dalšího zdůvodňování uvádíme následující charakterizaci, viz [Z1]:

**Věta.** Zobrazení  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  je shodnost právě tehdy, když platí, že zaměření  $\vec{\mathcal{E}}$  je přímým součtem navzájem kolmých jedno- a dvourozměrných invariantních podprostorů takových, že zúžení  $\vec{f}$  na kterýkoli jednorozměrný podprostor je  $\pm \text{id}$  a zúžení na kterýkoli dvourozměrný podprostor je otáčení o úhel rovný argumentu odpovídajícího komplexního charakteristického čísla.

Libovolnou shodnost lze tedy ve vhodné souřadné soustavě vyjádřit maticí, která má na hlavní diagonále právě čísla  $\pm 1$  nebo bloky  $\mathbf{D}_{\pm}$  a jinak samé 0. . .

## 18.2 Podobnosti

V tomto odstavci doplníme několik typických poznámek k podobnostem, které by bylo škoda opomenout.

### Rozklady podobností

Pokud obecnou podobnost  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  s koeficientem  $k$  složíme s nějakou stejnolehlostí  $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  s koeficientem  $\frac{1}{k}$ , pak výsledná transformace  $g := h \circ f$  je zřejmě shodná. Protože každá stejnolehlost je invertibilní, platí  $f = h^{-1} \circ g$ . Protože inverzní transformace ke stejnolehlosti je opět stejnolehlost, právě jsme zdůvodnili následující tvrzení:

**Věta.** Každou podobnost lze vyjádřit (mnoha různými způsoby) jako složení shodnosti a stejnolehlosti.

Ve čtvrté větě v odst. 16.2 jsme dokázali, že každá podobnost, která není shodností, má právě jeden vlastní samodružný bod. Tento bod může hrát docela zajímavou roli při rozkladech zmiňovaných v předchozí větě:

Uvažme podobnost  $f$  s koeficientem  $k$  a samodružným bodem  $S$ . Chceme vyjádřit  $f$  jako složení nějaké shodnosti  $g$  a stejnolehlosti  $h$  tak, aby platilo např.  $f = h \circ g$ . To lze samozřejmě realizovat tisícovým způsobem, ale pokud zvolíme střed stejnolehlosti  $h$  právě ve význačném bodě  $S$ , pak nutně musí být  $S$  také pevným bodem shodnosti  $g$ . Pro tento specificky zvolený rozklad navíc platí, že je jedno, v jakém pořadí stejnolehlost a shodnost skládáme, což rozhodně nemůžeme tvrdit obecně! Jinými slovy, pro takto (a právě takto) zvolený rozklad platí:

$$f = h \circ g = g \circ h.$$

### Klasifikace podobností

Odtud také plyne, že klasifikace podobností v libovolném eukleidovském prostoru se omezuje pouze na kompozice stejnolehlosti a shodnosti s nějakým pevným bodem. Např. v **rovině** tak dostáváme pouze tři typy podobností:

- (1) stejnolehlost,

- (2) stejnolehlost složená s otáčením (kolem středu stejnolehlosti),  
 (3) stejnolehlost složená s osovou souměrností (jejíž osa prochází středem stejnolehlosti).

Bez ohledu na znaménko koeficientu stejnolehlosti platí, že první dva případy představují přímé podobnosti, třetí je nepřímá.

### 18.3 Afinity

Většinu afinit nemáme vůbec pojmenovánu. Přitom všechny, které pojmenovány máme, jsme zmínili mnohem dříve. Pro zajímavost a porovnání přikládáme přehled všech afinit v **rovině** podle jejich samodružných prvků, viz tab. 18.5. Seznam je pořád relativně malý a jen mírně rozšiřuje/zobecňuje klasifikaci shodností, která je v tab. 18.3. Všimněte si zejména míst, která byla v přehledu shodností prázdná.



	Žádný samodružný směr	právě jeden samodružný směr	alespoň dva různé samodružné směry ale ne každý	každý směr samodružný
Žádný samodružný bod		1 $x' = x + by$ $y' = y + q$ $b \neq 0$	2 $x' = x + p$ $y' = dy$ $p \neq 0, d \neq 0, d \neq 1$	3 $x' = x + p$ $y' = y + q$ $(p, q) \neq (0, 0)$
právě jeden samodružný bod	4 $x' = ax + by$ $y' = -bx + ay$ $b \neq 0$	5 $x' = ax + by$ $y' = ay$ $a \neq 0, a \neq 1, b \neq 0$	6 $x' = ax$ $y' = dy$ $ad \neq 0, a \neq d, a \neq 1, d \neq 1$	7 $x' = ax$ $y' = ay$ $a \neq 0, a \neq 1$
množinou všech samodružných bodů je přímka		8 $x' = x + by$ $y' = y$ $b \neq 0$	9 $x' = x$ $y' = dy$ $d \neq 0, d \neq 1$	
každý bod samodružný				10 $x' = x$ $y' = y$

1. Afinita složená z elace a translace
2. Afinita složená z osově afinity a translace
3. Translace
4. Afinita složená z rotace a stejnolehlosti
5. Afinita složená z elace a stejnolehlosti
6. Afinita složená z osově afinity a stejnolehlosti
7. Stejnolehlost
8. Elace
9. Osová afinita
10. Identita

Tabulka 18.5: [Ří<sub>2</sub>] Klasifikace afinit v rovině.

Transformační rovnice v tabulce jsou opět v tzv. kanonickém tvaru, tj. vzhledem k velmi vhodně zvolené afinní (ne nutně kartézské) souřadné soustavě...

## 18.4 Cvičení



- (1) Pojmenujte všechny dosud nepojmenované shodnosti z předchozích cvičení.
- (2) Odvoďte charakterizaci (18.14) přímým výpočtem. Vyjádřete charakteristická čísla a charakteristické vektory transformací určených těmito maticemi a porovnejte výsledek s obr. 18.16.
- (3) V eukleidovské rovině určete transformační rovnice
  - otáčení kolem bodu  $S = [0, 2]$  o úhel  $\alpha = +60^\circ$ ,
  - osové souměrnosti podle přímky určené rovnicí  $2x - y = 2$ .
  - posunuté souměrnosti určené osou  $y = x + 1$  a vektorem  $\mathbf{v} = (-1, 1)$ .
- (4) Všechny podobnosti z předchozích cvičení vyjádřete jako složení shodnosti a stejnoolehlosti.
- (5) Řešte tutéž úlohu tak, aby rozklad nezávisel na pořadí dílčích transformací.
- (6) Podle tab. 18.5 klasifikujte všechny afinity z předchozích cvičení.

## 19 Pseudo-eukleidovské prostory

Pseudo-eukleidovský prostor je vektorový, resp. afinní prostor vybavený *pseudo-skalárním součinem*, což je něco jako obyčejný skalární součin (symetrická a bilineární forma), akorát nemusí být pozitivně definitní. To znamená, že existují nenulové vektory, které mají nulovou „velikost“ ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$  neznámá nutně, že  $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ ). Pseudo-skalární součin však je — stejně jako skalární součin — nedegenerovaný. To znamená, že neexistují nenulové vektory, které by byly „kolmé“ ke všem ostatním (pokud je  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$  pro všechna  $\mathbf{x}$ , potom  $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ ).

Stejně jako v obyčejném eukleidovském prostoru máme k dispozici ortogonální báze ( $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$  pro  $i \neq j$ ). Na rozdíl od obyčejného eukleidovského prostoru máme problém s ortonormálními bázemi ( $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i$  může mít libovolné znaménko, tedy nelze trvat na  $+1$ ). Pro lib. ortogonální bázi však nemůže být  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 0$  (plyne z nedegenerovanosti) a počet kladných a záporných znamének mezi čísly  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , kupodivu nezávisí na volbě báze (plyne z tzv. věty o setrvačnosti). Tato dvojice čísel představuje základní charakteristiku pseudo-skalárního součinu, tzv. *signaturu*. Ve vhodné ortogonální bázi má tedy kvadratická forma  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$  souřadnicový tvar

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2,$$

což odpovídá signatuře  $(p, n - p)$ . Obyčejný skalární součin můžeme chápat jako pseudo-skalární součin signatury  $(n, 0)$ .

Stejně jako jsou shodnosti eukleidovského prostoru zobrazení zachovávající skalární součin, jsou *pseudo-shodnosti* pseudo-eukleidovského prostoru zobrazení zachovávající pseudo-skalární součin. Jejich maticová charakterizace je obdobná jako v odst. 15.3: v zavedeném značení můžeme tuto vlastnost vyjádřit jako

$$\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{E}, \quad (19.1)$$

kde  $\mathbf{E}$  značilo jednotkovou matici (tedy matici skalárního součinu vzhledem k ortonormální bázi). Pro pseudo-shodnosti je akorát potřeba  $\mathbf{E}$  nahradit odpovídající maticí pseudo-skalárního součinu (pro signaturu  $(p, n - p)$ ) a vhodnou volbu báze by to byla diagonální matice s  $p$  jedničkami a  $n - p$  mínus jedničkami).

Na rozdíl od eukleidovské geometrie nelze ve studiu té pseudo-eukleidovské příliš spoléhat na intuici — mnoho věcí funguje jinak anebo vůbec (viz např. Cauchyova–Schwarzova nebo trojúhelníková nerovnost). Přesto existuje několik dobrých důvodů, proč se pseudo-objekty zabývat. Kromě ryze matematických souvislostí (viz následující podkapitoly) zdomácněly i ve fyzice. Např. matematické pozadí speciální teorie relativity spočívá ve čtyřrozměrném pseudo-eukleidovském prostoru signatury  $(1, 3)$ , odpovídající pseudo-shodnosti jsou tzv. Lorentzovy transformace.

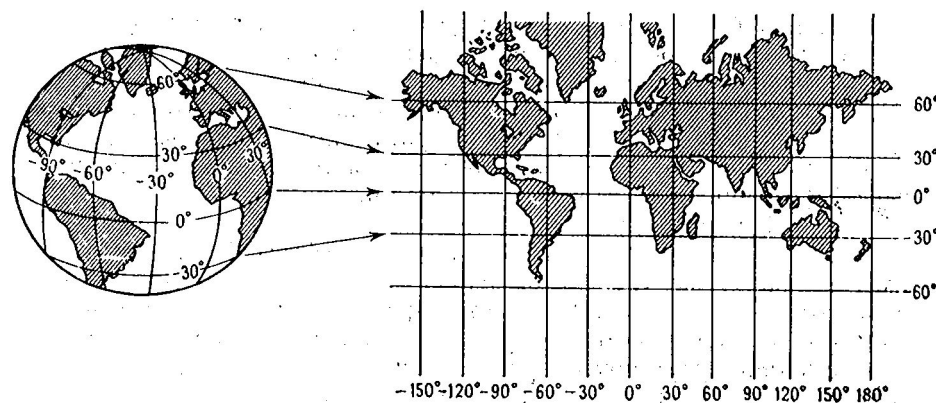
## 20 Další geometrická zobrazení

V tomto kurzu jsme při studiu geometrických zobrazení nevybočili z linie shodná—podobná—afinní—projektivní. Jenom ze slušnosti jsme si na obr. 15.6 připomněli další dva typy (kontaktní a konformní), které jsme zmiňovali v kurzu konstrukční geometrie a ke kterým máme dva sym-patické a užitečné příklady (dilatace a kruhová inverze).

Díky základní větě projektivní geometrie umíme každé projektivní (tedy i afinní, podobné a shodné) zobrazení reprezentovat nějakým lineárním zobrazením. Vzhledem k volbě báze je každé takové zobrazení jednoduše určeno maticí, a to tak, že obraz bodu odpovídá součinu matice a zastupujícího vektoru a skládání zobrazení odpovídá násobení matic. Přitom bod projektivního prostoru je zastoupen vektorem z vektorového prostoru, který je o jednu dimenzi větší. Projektivní transformace  $n$ -rozměrného prostoru proto odpovídají maticím řádu  $n + 1$ .

Je zajímavé, že také konformní (a některá kontaktní) zobrazení je možné reprezentovat podobně jednoduchým způsobem. Příslušné matice jsou akorát o něco větší. Např. konformní transformace  $n$ -rozměrného eukleidovského prostoru odpovídají pseudo-shodnostem jistého pseudo-eukleidovského prostoru signatury  $(n + 1, 1)$ , tedy maticím řádu  $n + 2$  splňujícím podmínku typu (19.1).

Mezi známé příklady konformních zobrazení patří kromě kruhové (resp. sférické) inverze ještě např. stereografická nebo Mercatorova projekce...

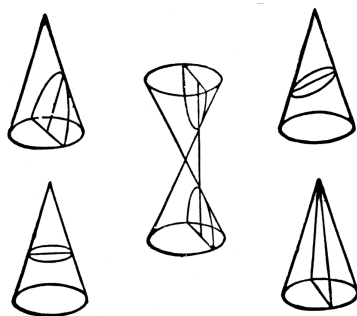


Obrázek 20.1: [Be] Mercatorovo zobrazení je konformní.

## 21 Kuželosečky a kvadriky

Jak napovídá název, kuželosečky jsou sečky (rovinné řezy) kužele (přesněji kuželové plochy). Kuželosečky mohou být degenerované, resp. nedegenerované, podle toho, zda sečná rovina prochází, resp. neprochází vrcholem kužele.





Obrázek 21.2: Několik kuželo-seček.

Degenerovanými kuželosečkami se teď zaobírat nebudeme, nedegenerované kuželosečky jsme zvyklí rozdělovat do tří skupin: *elipsy*, *paraboly*, *hyperboly*. Toto dělení vlastně odpovídá afinní klasifikaci — jakékoli dvě kuželosečky ze stejné skupiny jsou afinně ekvivalentní, tzn. jednu lze zobrazit na druhou pomocí nějaké afinity. Např. každá elipsa je afinním obrazem kružnice. Jakmile začneme rozlišovat různě šišaté elipsy a různě velké kružnice, díváme se na kuželosečky metrickými očima — odtud metrická klasifikace. Z projektivního hlediska jsou všechny nedegenerované kuželosečky navzájem ekvivalentní. Zejména každá taková kuželosečka je projektivním obrazem kružnice (viz středový průmět podstavy kužele z vrcholu kužele do roviny řezu).

Kuželosečky, jakožto rovinné křivky, lze vymezit mnoha dalšími a navzájem ekvivalentními způsoby. Např. analyticky, vzhledem k velmi vhodně zvolené souřadné soustavě, výše uvedené typy odpovídají řešením kvadratických rovnic následujících tří typů:<sup>1</sup>

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2, \quad y^2 = 2px, \quad y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2,$$

kde  $a$  i  $p$  jsou kladná reálná čísla (s jistým metrickým významem). Vzhledem k obecné souřadné soustavě mohou tato vyjádření vypadat nejhůře nějak takto:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (21.2)$$

V takovém vyjádření je typ kuželosečky (natož pak parametry  $a$  a  $p$ ) těžko rozpoznatelný, ale i to je možné. Jednou z nejlepších možností, jak se ve věci vyznat, je opět zaměstnat lineární algebru.

Nejprve rovnici (21.2) přepíšeme pomocí matic takto:

$$(1 \quad x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} F & D & E \\ D & A & B \\ E & B & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0. \quad (21.3)$$

Vyčíslení na levé straně můžeme chápat jako dosazení vektoru  $\mathbf{x} = (1, x, y)$  do kvadratické formy  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ , resp. symetrické bilineární formy  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  s právě uvedenou maticí. Rovnici kuželosečky pak zkráceně píšeme jako

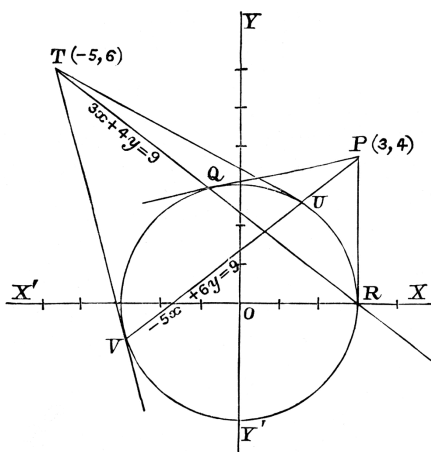
$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0. \quad (21.4)$$

<sup>1</sup>Mimochodem, odtud je odvozeno řecké pojmenování uvedených typů kuželoseček.

Pokud vektor  $\mathbf{x} = (1, x, y)$  interpretujeme v duchu odst. 13.1 jako homogenní souřadnice (vlastního) bodu s afinními souřadnicemi  $X = [x, y]$ ,<sup>2</sup> můžeme si s uspokojením uvědomit, že problém geometrického studia kuželoseček je tímto přeložen do algebraického studia kvadratických, resp. symetrických bilineárních forem. Podstatné je, že se nejedná o samoúčelný překlad: většinu vlastností kuželosečky, které jsou v zápise (21.2) jen těžko viditelné, lze pomocí matice (21.3) odvodit velmi snadno a rychle. Např. kuželosečka je nedegenerovaná, právě když zastupující matice je nedegenerovaná.

Jako obvykle, s tímto algebraickým popisem dostáváme jednoduchá zobecnění vzhledem k dimenzi: řešení kvadratické rovnice (21.4) v  $(n+1)$ -rozměrném vektorovém prostoru  $V$  odpovídají bodům na  $(n-1)$ -rozměrné kvadrice v  $n$ -rozměrném projektivním prostoru  $\mathcal{P}(V)$ .

Důležitým pojmem, jenž zobecňuje kolmost vektorů vzhledem k (pseudo-)skalárnímu součinu a z něhož je odvozeno mnoho dalších věcí, je *polární sdruženost*: vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  jsou polárně sdružené vzhledem k formě  $f$ , resp.  $F$ , pokud  $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ . Odpovídající body v projektivním prostoru  $\mathcal{P}(V)$  jsou pak polárně sdružené vzhledem k příslušné kvadrice. Jako obvykle, i tento algebraický nápad má hezkou geometrickou interpretaci, která je již nejméně 150 let hojně používána v různých konstrukcích (viz hesla pól, polára, polární reciprocita, konkrétně např. Gergonnovo řešení obecné Apollóniový úlohy)...



Obrázek 21.3: Tečna  $QP$  je pólem bodu  $Q$ , tečna  $RP$  je pólem bodu  $R$ , přímka  $QR$  je polárou bodu  $P$ , přímka  $UV$  je polárou bodu  $T$ , neoznačený průsečík těchto dvou přímek je pólem přímky  $PT$  atd.

## 22 Lieova geometrie kružnic

Obecné kvadriky lze potkat ledaskde. Např. všechny cykly (orientované kružnice) v rovině lze identifikovat s body na jisté 3-rozměrné kvadrice. Stručně naznačíme, jak toto ztotožnění funguje a k čemu může být dobré.

Cyklus v eukleidovské rovině je určen středem a orientovaným poloměrem, celkem tedy třemi reálnými čísly. Pokud homogenní souřadnice středu označíme  $(1 : s_1 : s_2)$  a poloměr označíme  $r$ ,

<sup>2</sup>Nevlastní body kuželosečky (podle jejichž počtu lze rozpoznat afinní typ) odpovídají řešením téže rovnice (21.4) s dosazením vektorem  $\mathbf{x} = (0, x, y)$ .

potom cyklu  $c$  můžeme přiřadit bod ve 4-rozměrném projektivním prostoru  $\mathcal{P}(V)$  takto:

$$\mathbf{c} := (1 : s_1 : s_2 : r : s_1^2 + s_2^2 - r^2). \quad (22.5)$$

Divné číslo v poslední složce je vymyšleno tak, aby tento bod ležel na 3-rozměrné kvadrice určené kvadratickou formou  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  s maticí

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{c} = 0$ . Této kvadrice se přezdívá *Lieova*. Máme tedy dobře definované přiřazení

$$\text{cyklus } c \text{ v rovině} \quad \mapsto \quad \text{bod } \mathbf{c} \text{ na Lieově kvadrice.}$$

První základní vlastností tohoto přiřazení je, že je prosté. Pokud navíc rozšíříme náš zájem také o body (které chápeme jako cykly s nulovým poloměrem) a orientované přímky (které chápeme jako cykly s nekonečně velkým poloměrem) v celé projektivní rovině, potom uvedené přiřazení bude vzájemně jednoznačné. Druhou základní vlastností (a smyslem) tohoto přiřazení je:

**Věta.** *Cykly  $c$  a  $d$  v rovině se dotýkají právě tehdy, když odpovídající body  $\mathbf{c}$  a  $\mathbf{d}$  na Lieově kvadrice jsou polárně sdružené, tedy  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = 0$ .*

Nyní vidíme, že úlohy související s dotykem cyklů v rovině lze pohodlně řešit osvědčenými prostředky lineární algebry. Např. řešení úlohy Apollóniový vypadá schematicky takto:<sup>3</sup>

- (1) pro tři dané cykly  $a, b, c$  v rovině uvažme odpovídající body  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  na Lieově kvadrice v  $\mathcal{P}(V)$ ,
- (2) všechny body v  $\mathcal{P}(V)$ , které jsou polárně sdružené současně k  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  vzhledem k Lieově kvadrice, tvoří přímku (řešení soustavy 3 lineárních rovnic),
- (3) tato přímka protíná Lieovu kvadriku ve dvou bodech  $\mathbf{m}, \mathbf{n}$  (řešení 1 kvadratické rovnice),
- (4) tyto body odpovídají dvěma hledaným cyklům  $m, n$ .

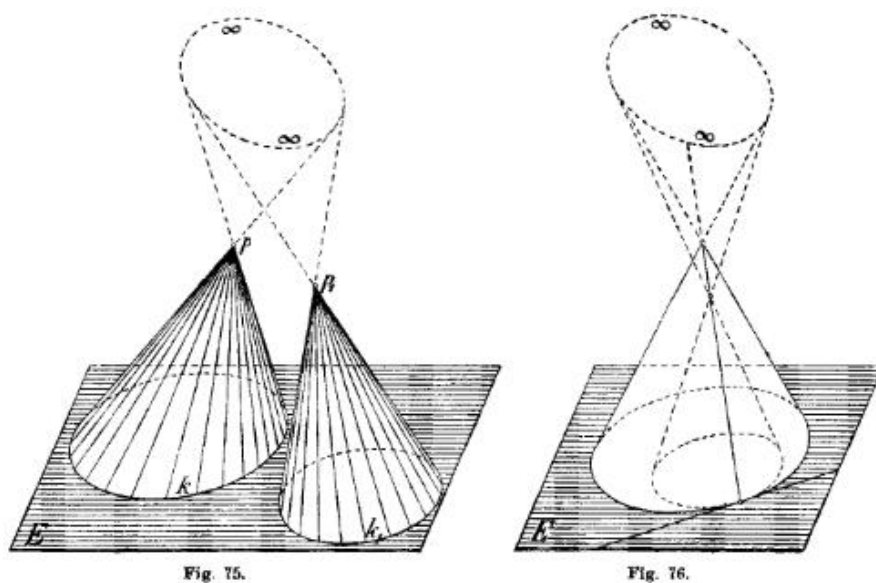
Aby toho nebylo málo: pokud se cykly nedotýkají, pak nás může zajímat úhel, pod kterým se protínají. Odpovídající body na Lieově kvadrice nejsou polárně sdružené, tedy  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} \neq 0$ . Kupodivu lze z tohoto čísla příslušný úhel vydolovat. . .

Všechny uvedené úvahy lze snadno rozšířit do prostorů vyšší dimenze (např. orientované sféry v 3-rozměrném prostoru odpovídají bodům na 4-rozměrné Lieově kvadrice). Jako obvykle, v malých dimenzích lze obecné algebraické nápady konkrétně geometricky interpretovat. . .

## 23 Kleinova geometrie přímek

Jinou klasickou ukázkou pokročilé algebraizace nějakého geometrického problému je popis množiny přímek v 3-rozměrném prostoru. V tomto případě je nasnadě, že tato množina je 4-rozměrná.

<sup>3</sup>Toto schéma odpovídá zadání  $a, b, c$  v dostatečně obecné poloze, ve speciálních případech může být řešení víc, nebo taky žádné.



Obrázek 22.4: [LiSch] K dotyku cyklů v rovině.

Pro dva body určující danou přímku lze z jejich homogenních souřadnic vymyslet přiřazení do 5-rozměrného projektivního prostoru, obdobné (22.5), které vyhovuje jisté kvadratické podmínce (viz Plückerovy souřadnice). Tak dospíváme k vzájemně jednoznačné korespondenci mezi přímkami v 3-rozměrném projektivním prostoru a body na 4-rozměrné kvadrice, které se říká *Kleinova*. Analogie věty z předchozí podkapitoly (tedy smysl celé konstrukce) je následující:

**Věta.** *Přímky v prostoru se protínají právě tehdy, když odpovídající body na Kleinově kvadrice jsou polárně sdružené.*

Tento popis je vhodný v řadě polohových úloh obcujících s přímkami (viz např. příčky mimoběžek, přímkové plochy apod.). Zejména, pokud se přímky protínají, pak jejich průnik lze vyjádřit pomocí jednoduchých algebraických operací se zastupujícími vektory, tedy vlastně dosazením do vzorce — bez řešení soustav lineárních rovnic. Aby toho nebylo málo: pokud se přímky neprotínají, pak mají nenulovou vzdálenost, a i tu je možné vyjádřit podobně snadným způsobem. Proto je tento přístup využíván např. v počítačové grafice, kde se takových úkonů provádí tisíce a je třeba šetřit každou milisekundu...

## 24 Grupové akce

### 24.1 Působení grupy na množině

Všechny bijektivní transformace na (jakékoli) množině  $X$  tvoří grupu (s operací skládání zobrazení), kterou značíme  $S_X$ .<sup>4</sup> Grupa  $S_X$ , stejně jako jakákoli její podgrupa  $G \subseteq S_X$ , přirozeně působí na množině  $X$ ; jedná se o nejjednodušší příklady *akce grupy na množině*. Např. grupa

<sup>4</sup>Pokud je množina  $X$  konečná a má  $n$  prvků, místo  $S_X$  zpravidla píšeme  $S_n$  a mluvíme o *symetrické grupě* nebo *grupě permutací*.

symetrií krychle působí na vrcholech krychle jakožto podgrupa  $S_8$ , grupa lineárních izomorfismů vektorového prostoru  $V$  je podgrupou  $S_V$  apod.

Obecnou akci grupy  $G$  na množině  $X$  se myslí přiřazení, kdy každému prvku grupy  $G$  odpovídá nějaká bijekce na množině  $X$  tak, že násobení v  $G$  koresponduje se skládáním odpovídajících bijekcí. Stručněji můžeme říct, že

**Definice.** Akce grupy  $G$  na množině  $X$  je grupový homomorfismus  $\phi : G \rightarrow S_X$ .

Akci (nebo působení) konkrétního prvku  $g \in G$  na  $X$ , obvykle zapisujeme jako  $x \mapsto g(x)$  místo správnějšího  $x \mapsto \phi(g)(x)$ .

## 24.2 Další příklady

- (1) Přirozená akce  $GL(V)$  (= grupa lineárních izomorfismů vektorového prostoru  $V$ ) na  $V$  indukuje také akci na množině všech  $k$ -rozměrných podprostorů ve  $V$ .
- (2) Grupa  $O(n+1)$  (= grupa shodností eukleidovského prostoru  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) působí na sféře  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , a to zúžením přirozené akce na  $\mathbb{R}^{n+1}$ .
- (3)  $\mathbb{R}^*$  (=  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  s operací násobení) působí na libovolném reálném vektorovém prostoru  $V$  takto:  $r(\mathbf{v}) = r\mathbf{v}$ .
- (4)  $V$  (vektorový prostor jakožto komutativní grupa) působí na každém afinním prostoru  $\mathcal{A}$  se zaměřením  $\vec{\mathcal{A}} = V$  takto:  $\mathbf{v}(A) = A + \mathbf{v}$ .
- (5) Libovolná grupa  $G$  působí sama na sobě, a to buď zprava  $g(h) = hg$ , nebo zleva  $g(h) = gh$ .
- (6)  $S_X$  působí na množině všech zobrazení  $X$  do  $Y$  takto:  $g(f) = f \circ g$ .

## 24.3 Orbity, tranzitivní a efektivní akce

Orbita prvku  $x \in X$  vzhledem k akci grupy  $G$  na  $X$  je podmnožina

$$G(x) = \{g(x) \mid g \in G\} \subseteq X.$$

Dvě různé orbity se nikdy neprotínají a sjednocení všech orbit je celá množina  $X$ . Akce grupy na množině tedy definuje relaci ekvivalence, jejíž třídy rozkladu jsou právě orbity akce. Např. akce grupy symetrií krychle na množině jejích vrcholů má jedinou orbitu (každý vrchol krychle lze zobrazit na kterýkoli jiný), akce  $GL(V)$  na  $V$  má dvě orbity (jednoprvková orbita  $\{\mathbf{o}\}$  a komplementární podmnožina  $V \setminus \{\mathbf{o}\}$ ) apod.

Akce  $G$  na  $X$  je *tranzitivní*, pokud má jedinou orbitu. Jinými slovy, jeden vybraný (ekvivalentně, každý) prvek z  $X$  lze zobrazit na kterýkoli jiný působením nějakého prvku z  $G$ . Množina  $X$  s tranzitivní akcí grupy  $G$  se jmenuje *homogenní prostor* grupy  $G$ . Každá orbita je tedy homogenním prostorem.

Akce je *efektivní* (nebo *věrná*), pokud jediný prvek z  $G$ , který působí jako identita na  $X$ , je neutrální prvek grupy  $G$ . Ekvivalentně, odpovídající homomorfismus  $\phi : G \rightarrow S_X$  je injektivní.

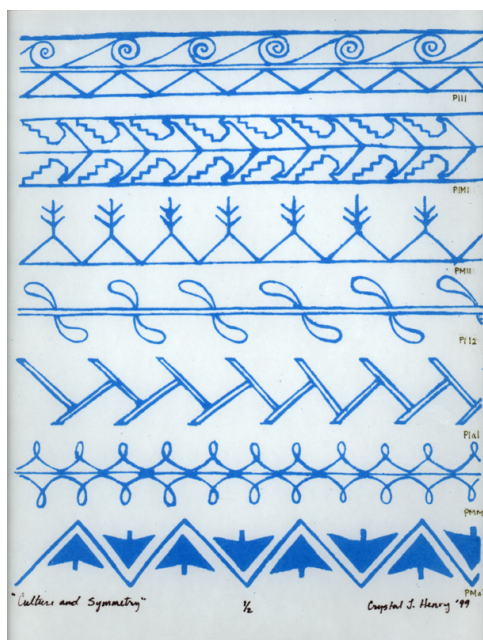
Rozhodněte, zda výše zmiňované akce jsou efektivní a tranzitivní; pokud nejsou tranzitivní, určete jejich orbity.

## 25 Frízové a tapetové vzory

Specifickým příkladem grupové akce je akce grupy symetrií nějaké podmnožiny v eukleidovském prostoru: *Symetrie* podmnožiny  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je shodnost v  $\mathbb{R}^n$ , která zobrazuje  $X$  na sebe. Všechny symetrie  $X$  (s operací skládání) tvoří grupu, která může mít různé vlastnosti podle typu podmnožiny  $X$ .

Frízové a tapetové vzory v  $\mathbb{R}^2$  lze celkem jednoduše charakterizovat podle odpovídajících grup symetrií, které jsou sice nekonečné, ale diskrétní. Grupa symetrií frízového, resp. tapetového vzoru se nazývá frízová, resp. tapetová grupa. (Často se také mluví o jedno- a dvourozměrných krystalografických grupách, což naznačuje, že toto téma má přirozené vícerozměrné analogie.) Srozumitelný úvod do problematiky najdou zájemci např. v [Po].

**Věta.** *Až na izomorfismus existuje právě 7 frízových a právě 17 tapetových grup.*



Obrázek 25.5: Sedm frízových vzorů s různými grupami symetrií.

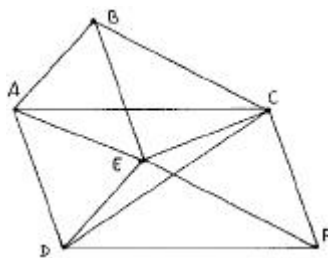
## 26 Třetí Hilbertův problém

Tady doplňujeme diskuzi, kterou jsme vyprovokovali za větou 11.4 na str. 78, jež popisuje objem  $k$ -rozměrného simplexu jako  $\frac{1}{k!}$  objemu jím určeného rovnoběžnostěnu. Připomínáme, jak klasikové nahlížíjí tento problém pro  $k = 2$  a  $3$ ; veškeré nespecifikované citace jsou z [Eu]:

$k = 2$ : Jinými slovy můžeme říct, že úhlopříčka v rovnoběžníku jej rozděljuje na dva trojúhelníky se stejným obsahem. To je přesně obsahem tvrzení I.41, jež odkazuje na I.37. Těmto

tvrzením perfektně rozumíme z kurzu konstrukční geometrie, a to s pouhým pravítkem, kružítkem a nůžkami v ruce!

$k = 3$ : V tomto případě stačí ukázat, že trojboký (obecně šikmý) hranol lze rozdělit na tři čtyřstěny se stejným objemem, což je právě tvrzení XII.7, viz obr. 26.6. Toto tvrzení se odkazuje na větu XII.5, jejíž zdůvodnění je však překvapivě mnohem komplikovanější než analogický výsledek v dimenzi 2.



Obrázek 26.6: [Ha] Objem trojbokého jehlanu je roven třetině objemu opsaného hranolu.

Věta XII.5 je dokázána Eudoxovou exhaustivní metodou, což je technicky poměrně komplikovaná procedura, která starověkými prostředky legitimizuje **infinitesimální** úvahy, jak je známe z matematické analýzy. Přirozenou otázkou je, zda to nejde udělat lépe. Právě tato pozorování jsou prazdrojem velice zajímavého Hilbertova problému č. 3:<sup>5</sup>

- Platí pro libovolné dva mnohostěny se stejným objemem, že jeden lze rozstříhat na konečný počet menších mnohostěnů, z nichž lze složit ten druhý?

Odpověď (z roku 1900) je záporná:

- Mnohostěny, pro které je toto možné, musí mít stejný tzv. Dehnův invariant.

Řešení je veskrze algebraické; celou zápletku i s rozumnými podrobnostmi lze najít např. v [Ha, podkap. 27].

<sup>5</sup>[http://cs.wikipedia.org/wiki/Hilbertovy\\_prob1%C3%A9my](http://cs.wikipedia.org/wiki/Hilbertovy_prob1%C3%A9my)





## Kapitola II



### 4.4, str. 16 — Cvičení

(3) Všechna řešení uvedené rovnice jsou  $\{c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x + 2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ .

### 6.2, str. 29 — Zdůvodnění věty

- (1)  $\vec{\mathcal{B}}$  a  $\vec{\mathcal{C}}$  jsou komplementární, pokud  $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{A}}$  a  $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{\mathbf{o}\}$ . Z první rovnosti plyne, že každý vektor  $\vec{BC}$  patří do  $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ , tudíž podprostory se protínají. Z druhé rovnosti plyne  $\dim(\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}) = \dim(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = 0$ , tudíž průnikem je bod.
- (2) Jistě je  $\dim \mathcal{B}$  a  $\dim \mathcal{C} \geq 1$ , jinak by  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  byly rovnoběžné. Z mimoběžnosti také plyne  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ , což podle předchozí věty a rovnosti (4.2) znamená, že  $\dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}) = \dim(\vec{\mathcal{B}}) + \dim(\vec{\mathcal{C}}) + 1$ . Dále zřejmě platí  $\dim \vec{\mathcal{A}} \geq \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}})$  a podle (6.8) můžeme psát  $\dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}) = \dim \vec{\mathcal{B}} + \dim \vec{\mathcal{C}} - \dim(\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}})$ . Celkem tedy dostáváme

$$\dim \vec{\mathcal{A}} \geq \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}) = \dim(\vec{\mathcal{B}}) + \dim(\vec{\mathcal{C}}) - \dim(\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}) + 1.$$

Z mimoběžnosti dále plyne, že  $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$  není roven ani  $\vec{\mathcal{B}}$  ani  $\vec{\mathcal{C}}$  (jinak by  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  byly rovnoběžné), tzn. jak  $\dim \vec{\mathcal{B}}$ , tak  $\dim \vec{\mathcal{C}}$  je  $> \dim \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$ . Jinými slovy jak rozdíl  $\dim \vec{\mathcal{C}} - \dim(\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}})$ , tak rozdíl  $\dim \vec{\mathcal{B}} - \dim(\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}})$  je  $\geq 1$ . Dosazením do pravé strany v předchozím výrazu vidíme, že platí jak  $\dim \mathcal{A} \geq \dim \mathcal{B} + 2$ , tak  $\dim \mathcal{A} \geq \dim \mathcal{C} + 2$ .

- (3) Protože  $\mathcal{C}$  je nadrovina a  $\mathcal{B}$  je s ní různoběžný podprostor, platí  $\mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathcal{A}$ . Odtud plyne  $\dim \vec{\mathcal{C}} = \dim \vec{\mathcal{A}} - 1$  a  $\dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}) = \dim \vec{\mathcal{A}}$ . Podle (6.8) můžeme psát

$$\dim(\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}) = \dim \vec{\mathcal{B}} + \dim \vec{\mathcal{C}} - \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}) = \dots,$$

což spolu s předchozími dvěma rovnostmi dává

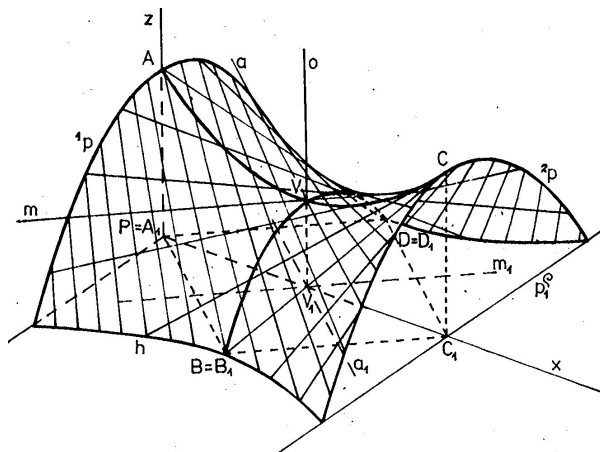
$$\dots = \dim \vec{\mathcal{B}} + \dim \vec{\mathcal{A}} - 1 - \dim \vec{\mathcal{A}} = \dim \vec{\mathcal{B}} - 1.$$

Celkem vskutku vidíme, že  $\dim(\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}) = \dim \vec{\mathcal{B}} - 1$ .

□

## 6.5, str. 33 — Cvičení

(4) viz obr. 26.7.



Obrázek 26.7: [Ma] Příčky ke dvěma mimoběžkám, jež jsou rovnoběžné s danou rovinou, tvoří tzv. parabolický hyperboloid.

## 7.5, str. 42 — Cvičení

(6) viz obr. 26.8:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{2\frac{x_1+x_3}{2} + 2\frac{x_2+x_4}{2}}{4} = \frac{3\frac{x_1+x_2+x_3}{3} + x_4}{4} = \dots$$

## 13.4, str. 91 — Cvičení

2 Jsou-li  $A, B, C, D$  kolineární body takové, že  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$ , pak jejich dvojpoměr podle (13.6) vychází

$$(ABCD) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

## Kapitola III

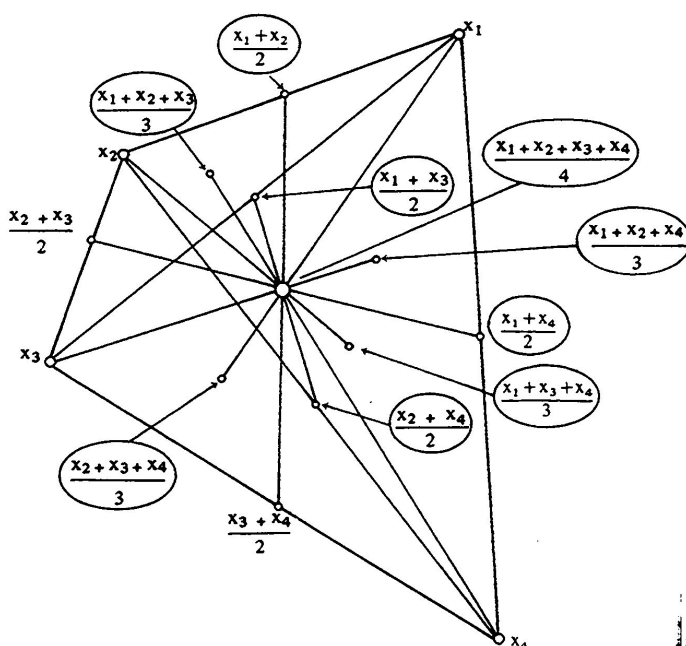


## 9.1, str. 56 — Zdůvodnění věty

Místo  $\vec{c} \subseteq \vec{E}$  píšeme  $U \subseteq V$ .

- $U^\perp$  je vektorový podprostor (plyne z definicí a bilinearity skalárního součinu):

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U^\perp \implies \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ a } \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ (pro lib. } \mathbf{u} \in U) \implies (\mathbf{ax} + \mathbf{by}) \cdot \mathbf{u} = 0 \implies \mathbf{ax} + \mathbf{by} \in U^\perp.$$

Obrázek 26.8: [Be] Konstrukce bodu  $\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ 

- $U \cap U^\perp = \{\mathbf{o}\}$  (plyne z pozitivní definitnosti skalárního součinu):

$$\mathbf{u} \in U \quad \text{a} \quad \mathbf{u} \in U^\perp \implies \mathbf{u} \perp \mathbf{u} \implies \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$

- $U + U^\perp = V$  (plyne z definice a věty o součtu a průniku vektorových podprostorů):

Je-li  $\dim U = k$ ,  $\dim V = n$  a  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  je nějaká báze  $U$ , pak  $U^\perp$  je určeno soustavou  $k$  (nezávislých) rovnic v  $n$  neznámých:

$$U^\perp = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \dots, \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k = 0\}.$$

Proto je  $\dim U^\perp = n - k$ . Navíc platí

$$\dim(U + U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp - \dim(U \cap U^\perp) = k + n - k - 0 = n.$$

Protože  $n = \dim V$ , musí být  $U + U^\perp = V$ . □

## 9.2, str. 57 — Podivné vlastnosti kolmosti

Uvažme 4-rozměrný eukleidovský prostor  $\mathcal{E}$  a nějakou kolmou bázi  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$  zaměření  $\vec{\mathcal{E}}$ . Stačí zvolit např. podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ , jejichž zaměření jsou  $\vec{\mathcal{B}} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ ,  $\vec{\mathcal{C}} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle$  a  $\vec{\mathcal{F}} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ .

V eukleidovském prostoru  $\vec{\mathcal{F}}$  platí  $\vec{\mathcal{B}}^\perp = \langle \mathbf{e}_3 \rangle \subset \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = \vec{\mathcal{C}}$ , tedy  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  jsou kolmé v  $\mathcal{F}$ .

Avšak v eukleidovském prostoru  $\vec{\mathcal{E}}$  pozorujeme:  $\vec{\mathcal{B}}^\perp = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$ , což v žádném případě neobsahuje, ani není obsaženo v  $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = \vec{\mathcal{C}}$ , tedy  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  nejsou kolmé v  $\mathcal{E}$ .



- [Ar] B. Artmann, *Euclid: The Creation of Mathematics*, Springer, 1999
- [Be] M. Berger, *Geometry I, II*, Springer, 1987
- [Co] H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley, 1989
- [Dv] T. Dvořáková, *Přínos Jánoše Bolyaie k základům neeuklidovské geometrie*, UK Praha, 2012
- [El] J. Elbelová, *Vektorové metody v euklidovské geometrii*, MU Brno, 2011,  
[http://is.muni.cz/th/13813/prif\\_d/dizerJE.pdf](http://is.muni.cz/th/13813/prif_d/dizerJE.pdf)
- [Eu] Eukleides, *Základy*, Alexandrie, –300  
(pro specifická vydání viz [Eu<sub>1</sub>, Eu<sub>2</sub>, Eu<sub>3</sub>] níže)
- [Ha] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000
- [Ha<sub>2</sub>] R. Hartshorne, *Teaching geometry according to Euclid*, Notices of AMS, 2000,  
<http://www.ams.org/notices/200004/fea-hartshorne.pdf>
- [Hi] D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 1902,  
<http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf>
- [HiCV] D. Hilbert, S. Cohn–Vossen, *Geometry and the imagination*, Chelsea, 1999
- [HoJa] P. Horák, J. Janyška, *Analytická geometrie*, Brno, 1997
- [Ku] F. Kuřina, *Deset geometrických transformací*, Prometheus, 2002
- [LiSch] S. Lie, G. Scheffers, *Geometrie der berührungstransformationen*, Teubner, 1896
- [Ma] F. Machala, *Plochy technické praxe*, Olomouc, 1986
- [MaSl] F. Machala, V. Slezák, *Geometrie grup kolineací*, Olomouc, 2001
- [Mar] G.E. Martin, *Transformation geometry*, Springer, 1982

- [Po] A. Pokorný, *Tapetové vzory a grupy*, MU Brno, 2008  
[http://is.muni.cz/th/106039/pedf\\_b/tapetove\\_vzory.pdf](http://is.muni.cz/th/106039/pedf_b/tapetove_vzory.pdf)
- [Rek] K. Rektorys a kol., *Přehled užití matematiky*, SNTL, 1968
- [Ří] O. Říha, *Konstrukční geometrie I, II*, Brno, 2002
- [Ří<sub>2</sub>] O. Říha, *Pomocné materiály do geometrie*, Brno, 2000
- [Sek] M. Sekanina a kol., *Geometrie I, II*, SPN, 1986
- [Se] O. Sekora, *Brouk Pytlík*, Albatros, 1969
- [St] J. Stillwell, *The four pillars of Geometry*, Springer, 2005
- [Š] J. Šimša, *Archimédova statika v geometrii*, Brno, 1993
- [Zl] P. Zlatoš, *Lineární algebra a geometria*, Bratislava, 2011,  
[http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/1a/LAG\\_A4.pdf](http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/1a/LAG_A4.pdf)
- [Ž] V. Žádník, *Konstrukční geometrie*, 2018,  
[http://is.muni.cz/el/1441/jaro2018/MA2BP\\_PKG/um/osnova.pdf](http://is.muni.cz/el/1441/jaro2018/MA2BP_PKG/um/osnova.pdf)

\* \* \*

- [Eu<sub>1</sub>] *Euclid's elements*, interaktivní edice D. Joyce podle překladu T. Heatha (1908–28),  
<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>
- [Eu<sub>2</sub>] *The elements of Euclid*, atraktivní vydání prvních 6 knih od O. Byrneho (1847),  
<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/byrne.html>
- [Eu<sub>3</sub>] *Eukleides, Základy, Knihy I–IV*, české vydání prvních 4 knih, jež zpracoval a komentářem opatřil P. Vopěnka podle překladu F. Servíta (1907), O.P.S., 2008

---

## Seznam obrázků

---

1.1	Eukleidův dodatečný postulát . . . . .	6
3.2	Hierarchie geometrií . . . . .	10
4.1	Kritérium rovnoběžnosti přímek . . . . .	11
4.2	Axiómy obecné afinní struktury . . . . .	12
4.3	Průnik a součet afinních podprostorů . . . . .	15
4.4	Charakterizace neprázdného průniku podprostorů . . . . .	15
4.5	Osová afinita . . . . .	17
4.6	Afinní zobrazení indukují lineární zobrazení mezi zaměřenými . . . . .	18
4.7	Definice afinního zobrazení . . . . .	18
4.8	Středové promítání mezi rovinami. . . . .	20
5.9	Afinní souřadnice . . . . .	21
5.10	Přechod mezi dvěma afinními repéry . . . . .	21
5.11	Dvojitě vyjádření téže roviny . . . . .	23
5.12	Obecné vyjádření přímky . . . . .	23
5.13	Podprostor jako průnik nadrovin . . . . .	24
5.14	Několikeré vyjádření téže přímky . . . . .	25
5.15	[Rek] Interpretace konstant z různých vyjádření přímky . . . . .	26
6.16	Vzájemné polohy afinních podprostorů. . . . .	29
6.17	[LiSch] Ke dvěma mimoběžkám existuje $\infty^2$ různých příček. . . . .	32
6.18	[Ma] Krov hradní věže ve Štramberku . . . . .	33
7.19	Uspořádání bodů na přímce . . . . .	34
7.20	Afinní poloprostor . . . . .	35
7.21	Konvexní množina . . . . .	36
7.22	Konvexní obal množiny . . . . .	36
7.23	Bod $X$ na přímce $AB$ . . . . .	37
7.24	Nejednoznačnost vyjádření bodu $X$ na přímce $ABC$ . . . . .	38
7.25	Redukční princip . . . . .	39
7.26	[Be] Těžiště mnohoúhelníku obecně není totéž co těžiště bodové hmotné soustavy . . . . .	39
7.27	Rovnoběžník je určen bodem a dvěma vektory. . . . .	42
7.28	Stopy . . . . .	43

8.1	Skalární součin . . . . .	47
8.2	Kosinová věta . . . . .	49
8.3	Obsah rovnoběžníku a determinant . . . . .	50
8.4	Vektorový součin . . . . .	51
8.5	[Eu <sub>1</sub> ] Trojúhelníky jsou shodné, právě když se shodují ve všech stranách. . . . .	51
8.6	[Eu <sub>1</sub> ] Trojúhelníky jsou podobné, právě když mají po dvou shodné vnitřní úhly, což je ekvivalentní s tím, že strany u shodných úhlů jsou úměrné. . . . .	53
8.7	[Eu <sub>1</sub> ] Rovnoběžníky se stejnou základnou a výškou mají stejný obsah . . . . .	54
9.8	Kolmé podprostory v eukleidovském prostoru . . . . .	56
9.9	Kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}$ do podprostoru $U$ . . . . .	57
9.10	Kolmý průmět vektoru do jednorozměrného podprostoru. . . . .	59
10.11	Vzdálenost bodu od podprostoru . . . . .	60
10.12	Vzdálenost podprostorů . . . . .	61
10.13	Vzdálenost bodu od nadroviny. . . . .	63
10.14	Vzdálenost bodu od roviny a výška rovnoběžnostěny . . . . .	65
10.15	K definici odchylky . . . . .	66
10.16	Odchylka přímek. . . . .	67
10.17	Odchylka přímky a obecného podprostoru. . . . .	68
10.18	Odchylka přímky a nadroviny . . . . .	68
10.19	Odchylka nadrovin. . . . .	69
10.20	K obecné diskuzi o odchylce. . . . .	71
11.21	K objemu rovnoběžnostěny. . . . .	72
11.22	Vlastnosti obsahu/objemu se nápadně podobají vlastnostem determinantu . . . . .	74
12.1	Středové promítání. . . . .	82
12.2	Středová projekce je projektivní zobrazení . . . . .	82
12.3	Projektivní rozšíření afinní přímky má jeden nevlastní bod. . . . .	83
12.4	Na projektivní přímce relaci „mezi“ nemáme . . . . .	83
12.5	Projektivní rozšíření afinního prostoru . . . . .	84
13.6	Homogenní souřadnice . . . . .	88
13.7	Vyjádření nadroviny v projektivním prostoru . . . . .	89
13.8	[St] Která čtveřice bodů je projektivním obrazem stejně vzdálených bodů? . . . . .	91
14.9	[Be] Ukázka z Lambertovy Perspektivy (1759) . . . . .	92
14.10	Projektivní zobrazení přímky . . . . .	94
14.11	Charakterizace projektivního zobrazení . . . . .	95
14.12	[Be] Porovnání perspektivních průmětů téže roviny . . . . .	97
15.1	[Ku] Základní kolineace v rovině je osová kolineace. . . . .	100
15.2	[Ku] Základní afinita v rovině je osová afinita, neboli škálování v jednom směru. . . . .	101
15.3	[Eu <sub>1</sub> ] Typická ekviafinita je elace, neboli naklonění. . . . .	101
15.4	[Se] Základní shodnost je souměrnost podle nadroviny, neboli zrcadlení. . . . .	102
15.5	[Be] Základní podobnost je stejnolehlost, neboli škálování (ve všech směrech stejně). . . . .	103
15.6	Hierarchie geometrických zobrazení . . . . .	104
15.7	Stejnolehlost se středem $S$ a koeficientem $k \doteq 2$ . . . . .	109
16.8	Charakteristické vektory odpovídající různým charakteristickým číslům jsou lineárně nezávislé . . . . .	114
17.9	Obraz bodu v osově kolineaci . . . . .	116
17.10	Obraz bodu v osově afinitě . . . . .	117
17.11	Pokud existuje nadosa, potom existuje střed . . . . .	119



17.12	Pokud existuje střed, potom existuje nadosa . . . . .	119
17.13	[Sek] Každá shodnost v rovině je složením nejvýše tří osových souměrností. . . . .	120
18.14	[Mar] Nezapomínejme na posunutou souměrnost! . . . . .	123
18.15	Přehled shodností v rovině pomocí obrazů trojúhelníku . . . . .	124
18.16	Přímý a nepřímý obraz ortonormální báze . . . . .	126
20.1	[Be] Mercatorovo zobrazení je konformní. . . . .	132
21.2	[etc.usf.edu/clipart/6100/6177/conics_1.htm] Několik kuželo-seček . . . . .	133
21.3	Tečna $QP$ je pólem bodu $Q$ , tečna $RP$ je pólem bodu $R$ , přímka $QR$ je polárou bodu $P$ , přímka $UV$ je polárou bodu $T$ , neoznačený průsečík těchto dvou přímek je pólem přímky $PT$ atd. . . . .	134
22.4	[LiSch] K dotyku cyklů v rovině. . . . .	136
25.5	[www.oswego.edu/~baloglou/103/crystal.html] Sedm frízových vzorů . . . . .	138
26.6	[Ha] Objem trojbokého jehlanu je roven třetině objemu opsaného hranolu. . . . .	139
26.7	[Ma] Parabolický hyperboloid . . . . .	142
26.8	[Be] Konstrukce bodu $\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ . . . . .	143



---

## Seznam tabulek

---

15.1	Přehled geometrických zobrazení . . . . .	105
17.2	Klasifikace základních transformací v rovině . . . . .	117
18.3	[Ř <sub>12</sub> ] Klasifikace shodností v rovině podle samodružných prvků. . . . .	125
18.4	[Ř <sub>12</sub> ] Klasifikace shodností v prostoru podle samodružných prvků. . . . .	127
18.5	[Ř <sub>12</sub> ] Klasifikace afinit v rovině. . . . .	129



- úhel, 35  
úsečka, 34
- afinita, 16, 129  
  ekvi-, 121  
  nepřímá, 108  
  osová, 17, 101, 117  
  přímá, 108
- afinní  
  obal, 16  
  podprostor, 13  
  poloprostor, 35  
  prostor, 12  
    standardní, 13  
  repér, 20  
  souřadnice, 20  
  zobrazení, 18, 100
- Archimédés, 41
- bod  
  nevlastní, 83  
  samodružný, 111  
  vlastní, 83
- Bolyai, J., 9
- Cantor, G., 9
- charakteristický  
  číslo, 111  
  polynom, 111  
  vektor, 111
- cvičení, 13, 16, 19, 22, 26, 33, 42, 54, 59, 71, 79,  
  91, 97, 110, 114, 122, 130
- Dedekind, R., 6, 9
- Dehn, M., 139
- Desargues, G., 9, 118
- Descartes, R., 8
- determinant  
  Gramův, 74
- doplňek, 28  
  kolmý, 55
- dvojpoměr, 89
- ekviafinita, 54
- elace, 101, 117  
  projektivní, 116
- Eudoxos, 139
- Eukleides, 5
- Euler, L., 8
- Frobenius, F.G., 31
- Gauss, C.F., 9
- geometrie  
  absolutní, 7  
  afinní, 7, 11–43  
  eukleidovská, 7, 45–79  
  hierarchie —, 10  
  neeuclidovské, 7  
  projektivní, 7, 81–97
- Gergonne, J.D., 9
- Gram, J.P., 72, 74
- grupa  
  akce, 13, 137  
  frízová, 138  
  tapetová, 138  
  transformační, 8
- Hamilton, W.R., 9
- Hilbert, D., 6, 139
- hyperboloid  
  eliptický, 33

- parabolický, 33
- incidence, 6
- Jacobi, C.G.J., 78
- Klein, F., 8, 9
- kolineace, 92
  - nadosová, 118
  - osová, 100, 115
- kolmý
  - doplňek, 55
  - průmět, 56
- kolmost, 5, 47, 55–57
- Komenský, J.A., 1
- konvexní
  - množina, 35
  - obal, 36
- Laplace, P.S., 76
- Lie, S., 8, 78
- Lobačevský, N.I., 9
- Möbius, A.F., 9
- mimoběžnost, 28
- modul
  - afinní transformace, 108
  - osové kolineace, 116
- Monge, G., 122
- nadosa, 118
- nadrovina, 14
- nerovnost
  - Cauchyova–Schwarzova, 47
  - trojúhelníková, 47
- obal
  - afinní, 16
  - konvexní, 36
- objem, 71–79
- obsah, 71–79
- odchylka, 49, 65–71
- orbita, 137
- osa, 62, 115
  - nad-, 118
- páka, 37
- příčka, 31
- Pappos, 9, 93
- Pascal, B., 9
- Plücker, J., 9
- podobné
  - zobrazení, 102
- podobnost, 53, 128–129
- poměr
  - dělicí, 17
  - dvoj-, 89
  - harmonický, 90
- Poncelet, V., 9
- postulát, 6
- posunutí, 13, 109, 116, 121
- projektivní
  - podprostor, 84
  - prostor, 84
  - repér, 87
  - rozšíření, 83, 96
  - zobrazení, 92, 99
- prostor
  - afinní, 12
  - eukleidovský, 48
  - metrický, 46
  - polo-, 35
  - projektivní, 84
- rovnoběž-
  - ky, 11, 17
  - ník, 41, 71
  - nost, 6, 14, 28, 64, 87
  - nostěn, 71
- Schmidt, E., 72
- shodnost, 6, 45, 52, 122–128
- simplex, 36, 78
- součet, 14, 85
- součin
  - skalární, 47
  - vektorový, 77
  - vnější, 50
  - vnitřní, 47
- souřadnice
  - afinní, 20
  - barycentrické, 40
  - homogenní, 87
  - kartézské, 106
- souměrnost
  - šikmá, 117, 121
  - harmonická, 116
  - osová, 102, 117
  - posunutá, 123
  - středová, 109

- spojitost, 6
- střed, 115, 118
- Staudt, K. von, 93
- Steiner, J., 9
- stejnolehlost, 103, 109, 116, 121
  
- těžiště, 37, 40
- trúba
  - štramberská, 33
- transformace, 111–130
  - základní, 115–122
  
- uspořádání, 6, 34
  
- věta
  - kosinová, 48
  - o existenci a poloze těžiště, 40
  - o Gramově determinantu, 75
  - o nadose a středu, 118
  - o odchylce podprostorů, 67, 70
  - o samodružných bodech, 112–114
  - o skládání transformací, 120, 121
  - o určenosti zobrazení, 19, 96
  - o vektorovém součinu, 77
  - o vnějším součinu, 76
  - o vzájemných polohách podprostorů, 31, 64, 86
  - o vzdálenosti podprostorů, 61, 79
  - o zachovávání dvojpoměru, 93
  - základní, 19, 93
- velikost
  - úhlu, 48
  - úsečky, 48
  - vektoru, 47
- vyjádření podprostoru
  - neparametrické, rovnicové, 23
  - parametrické, 22
- vzdálenost, 59–65, 79
  
- Weyl, H., 8
  
- Základy, 5–6
- zaměření, 12
- zobrazení
  - afinní, 18, 100
  - ekviafinní, 53, 54, 101
  - podobné, 53, 102
  - projektivní, 92, 99
  - shodné, 52, 102