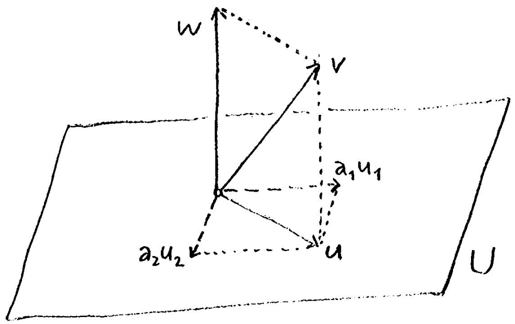
# POZNÁMKY KE ⊥ ROZKLADŮM A POČÍTÁNÍ

- kolmý doplněk podprostoru
- kolmé rozklady / průměty
- početní přístupy obecné / speciální
- poznámky a souvislosti



# KOLMÝ DOPLNĚK



- $U \subseteq V$ ... vektorový podpr. v prostoru se skal. součinem

- $U^\perp =$ kolmý doplněk $U$ ve $V$
  $=$ {všechno ve $V$ kolmé ke všemu v $U$}
  $= \{ v \in V \mid v \perp u \text{ pro } \forall u \in U \}$

- Pro lib. bázi $(u_1, \dots, u_k)$ podpr. $U$:

  $$U^\perp = \{ v \in V \mid \boxed{v \cdot u_1 = \dots = v \cdot u_k = 0} \}$$

  soustava lin. homog. rovnic

- Zřejmě platí:

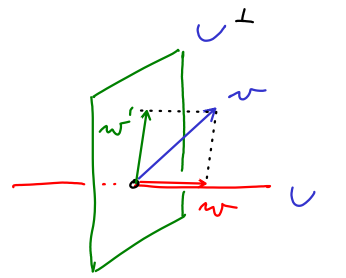
  $U^\perp \subseteq V$ je vektorový podpr.

  $U^\perp \cap U = \{0\}$ a $U^\perp + U = V$

$\rightsquigarrow$ TEDY $U$ a $U^\perp$ jsou vskutku KOMPLEMENTÁRNÍ (= DOPLŇKOVÉ)!

# DŮSLEDKY

## Kolmý rozklad




- Lib. $v \in V$ lze VYJÁDŘIT JEDNOZNAČNĚ jako

$$v = w + w', \quad \text{kde } w \in U \text{ a } w' \in U^\perp \; !$$

**kolmý průmět** $v$ do $U^\perp$

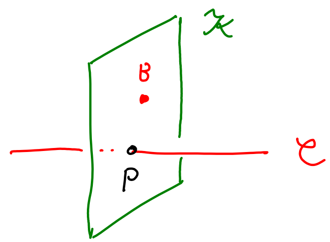
**kolmý průmět** $v$ do $U$

## Totální kolmost

- Podpr. $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ jsou **totálně kolmé**, pokud $\vec{\mathcal{B}}^\perp = \vec{\mathcal{C}}$.
- Totálně kolmé podpr. se PROTÍNAJÍ V BODĚ!

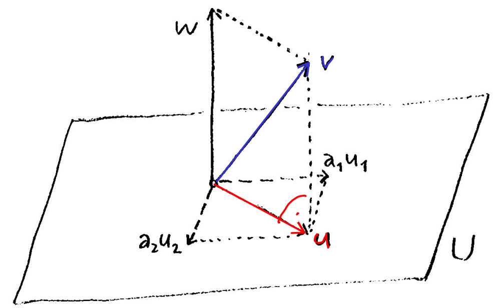
⇝ jednoznačně určená **pata "kolmice"** z bodu $B$ k podpr. $\mathcal{C}$ ... $P = \mathcal{X} \cap \mathcal{C}$,

kde $\mathcal{X} = B + \vec{\mathcal{C}}^\perp$



# POČÍTÁNÍ KOLMÉHO PRŮMĚTU

89,5




- $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle \leq V$
- $v \in V$ lib
- $u$ = kolmý průmět $v$ do $U$

  $\iff u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$, pro nějaké $a_i \in \mathbb{R}$

  a $v - u \perp U$,

  tj. $(v-u) \cdot u_i = 0$, pro $i = 1, \dots, k$,

  tj. $$\boxed{\begin{array}{c} a_1(u_1 \cdot u_1) + \dots + a_k(u_k \cdot u_1) = v \cdot u_1 \\ \vdots \\ a_1(u_1 \cdot u_k) + \dots + a_k(u_k \cdot u_k) = v \cdot u_k \end{array}}$$

  "symetrická" soustava

  k LIN. rovnic

  k neznámých

- spec. $\dim U = 1$:

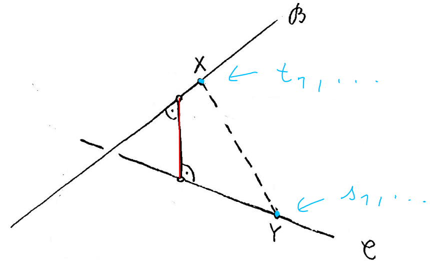
$$\boxed{a_1(u_1 \cdot u_1) = v \cdot u_1} \rightsquigarrow \boxed{u = \left(\frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\right) u_1},$$

zejména $\|u\| = \dfrac{|v \cdot u_1|}{\|u_1\|}$.

# POČÍTÁNÍ VZDÁLENOSTÍ

dim $\mathcal{B} = k$, dim $\mathcal{C} = \ell$

- $\mathcal{B} = \{ B + t_1 u_1 + \dots \}$, $\mathcal{C} = \{ C + s_1 v_1 + \dots \} \subseteq \mathcal{E}$
- $X \in \mathcal{B}$, $Y \in \mathcal{C}$ $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{BC} + s_1 v_1 + \dots - t_1 u_1 - \dots$
- $v(t_1, \dots, s_1, \dots) = |XY| = \sqrt{\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XY}} = \sqrt{f(t_1, \dots, s_1, \dots)}$




nezáp. KVADR. polynom

## (A) podle DEFINICE

$v = \min \iff \frac{\partial v}{\partial t_1} = \dots = \frac{\partial v}{\partial s_1} = \dots = 0$

$\iff \boxed{\frac{\partial f}{\partial t_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial s_1} = \dots = 0}$

$k + \ell$ LINEÁRNÍCH rovnic

## (B) kolmá PŘÍČKA

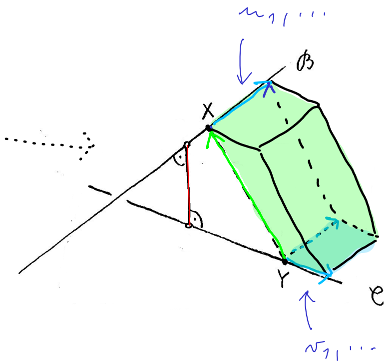
$v = \min \iff \overrightarrow{XY} \perp \mathcal{B}$ a $\overrightarrow{XY} \perp \mathcal{C}$

$\iff \boxed{\overrightarrow{XY} \cdot u_1 = \dots = \overrightarrow{XY} \cdot v_1 = \dots = 0}$

## (C) výška ROUNOBĚŽNOSTĚNU

$v = \min \iff v =$ výška rovnob.

$\iff \boxed{v = \frac{\text{objem}(u_1, \dots, v_1, \dots, \overrightarrow{XY})}{\text{objem}(u_1, \dots, v_1, \dots)}}$



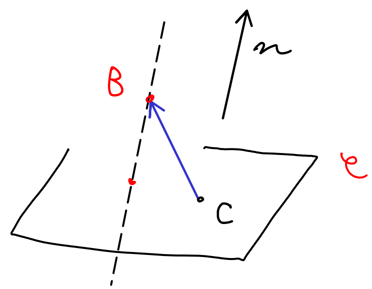
# POZNÁMKY A ZKRATKY

- Vyznačené soustavy v (A) a (B) jsou STEJNÉ.
- Příčky (tedy i kolmé) umíme dělat RŮZNĚ!
- $|XY| = \min \iff \overrightarrow{XY} = $ KOLMÝ PRŮMĚT $\overrightarrow{BC}$ do $(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{E}})^{\perp}$ . . .

  . . . obzvlášť snadné zejména pro $\dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{E}})^{\perp} = 1 \rightsquigarrow$ "VZOREČKY"
- Např. $\mathcal{B}$ = bod, $\mathcal{E}$ = nadrovina :

  $C \in \mathcal{E}$, $n \in \vec{\mathcal{E}}^{\perp}$ lib.

  $$\rightsquigarrow \boxed{v(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot n|}{\|n\|}}$$




- Další "VZOREČKY" podle (C) . . .

  . . . OBSAHY a OBJEMY řešíme dále . . .