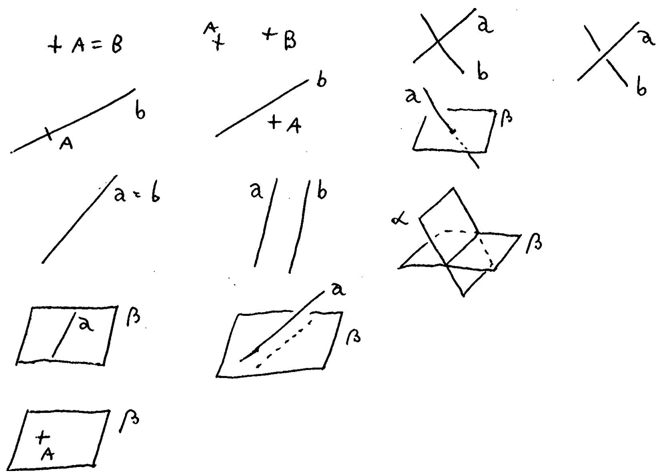
VZÁJEMNÉ POLOHY AF. PODPR.

- průniky, součty a af. obaly
- vzájemné polohy
- postřehy, dodatky



PRŮNIK A SOUČET

- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \leq \mathcal{A}$ ... af. podprostory, $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \leq \vec{\mathcal{A}}$ ... zaměření

- PRŮNIK $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ je buď $\emptyset$,
  nebo af. podprostor
  se zaměřením $\overrightarrow{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$.

- SJEDNOCENÍ $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ může a nemusí být af. podprostor.

- SOUČET $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ = AFINNÍ OBAL $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$
  = nejmenší AFINNÍ podprostor obsahující $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

- ZAMĚŘENÍ $\overrightarrow{\mathcal{B} + \mathcal{C}}$ může a nemusí být rovno $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ ...

všechno to NĚJAK souvisí se vzájemnými polohami podpr...

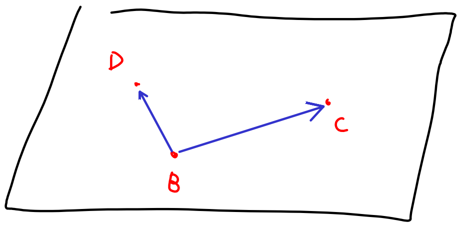
dim $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$	1	0	–	–
dim $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$	1	0	1	0
dim $\mathcal{B} + \mathcal{C}$	1	2	2	3
dim $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$	1	2	1	2

POZNÁMKA

- Body $\underline{B, C, D, \ldots}$ jsou v OBECNÉ POLOZE $\leftarrow k$

$\iff$ vektory $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \ldots$ jsou lin. NEZÁVISLÉ $\leftarrow k-1$

$\iff$ dim součtu $B+C+D+\ldots$ je MAX. možná. $\leftarrow k-1$



součet $B+C+D = \{ B + r\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BD} \mid r, s \in \mathbb{R} \}$

$= \{ \text{"} t_0 B + t_1 C + t_2 D \text{"} \mid t_0 + t_1 + t_2 = 1 \}$

B, C, D v OBECNÉ POLOZE $\iff$ parametry určeny JEDNOZNAČNĚ.

OBECNÁ SOUVISLOST

- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \leq \mathcal{A}$ ... af. podprostory, $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \leq \vec{\mathcal{A}}$ ... zaměření

- Platí

$$\boxed{\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \overset{!}{\iff} \overrightarrow{\mathcal{B}+\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} \iff \overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} \text{ pro lib. } B \in \mathcal{B} \text{ a } C \in \mathcal{C}.}$$

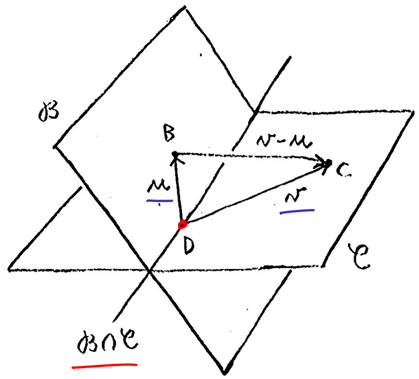
- Důkaz:

(a) $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$

$\implies$ ex. D : $D \in \mathcal{B}$ a $D \in \mathcal{C}$

$\implies$ $\overrightarrow{DB} \in \vec{\mathcal{B}}$ a $\overrightarrow{DC} \in \vec{\mathcal{C}}$ ...

$\implies$ $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ ...



(b) $\overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ ...

$\implies$ $\overrightarrow{BC} = C - B = u + v$, kde $u \in \vec{\mathcal{B}}$ a $v \in \vec{\mathcal{C}}$

$\implies$ $\underbrace{C - v}_{\mathcal{C}} = \underbrace{B + u}_{\mathcal{B}}$

$\implies$ $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

POČETNÍ SOUVISLOST

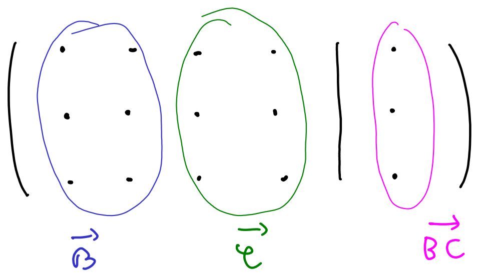
- $\mathcal{B} = \{ B + t_1 u_1 + \dots \}$, $\quad \mathcal{C} = \{ C + s_1 v_1 + \dots \}$

- $D \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \iff D = B + t_1 u_1 + \dots = C + s_1 v_1 + \dots$

$$\Updownarrow$$

$$t_1 u_1 + \dots - s_1 v_1 - \dots = C - B$$

$$\Updownarrow$$



- $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \iff$ soustava má řešení $\iff$

$\iff \vec{BC}$ = lin. kombinace $u_1, \dots, v_1, \dots \iff$

$\iff \vec{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$

VZÁJEMNÉ POLOHY

- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ … af. podprostory, $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{A}}$ … zaměření

- **Obecné definice:**

  předp. $\dim \mathcal{B} \leq \dim \mathcal{C}$

  - INCIDENTNÍ $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ … tj. $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{B} =$ max. možný
  - RŮZNOBĚŽNÉ $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ … pokud $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, ale NE max. možný
  - ROVNOBĚŽNÉ $\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$ … pokud $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ a $\boxed{\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}}$
  - MIMOBĚŽNÉ $\mathcal{B} \not\times \mathcal{C}$ … jinak (tj. $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ a $\vec{\mathcal{B}} \nsubseteq \vec{\mathcal{C}}$)

- **Poznámka:**

  - $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \iff \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{B} =$ max.
  - $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}} \iff \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} =$ max.

- **Přehledně:**

$\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ \ $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$	je max	není max
není $\emptyset$	$\subseteq$	$\times$
je $\emptyset$	$\parallel$	$\not\times$

POČETNÍ SOUVISLOSTI

- $\mathcal{B} = \{ B + t_1 u_1 + \dots \}$; $\mathcal{C} = \{ C + s_1 v_1 + \dots \}$

- $\underline{D \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}}$

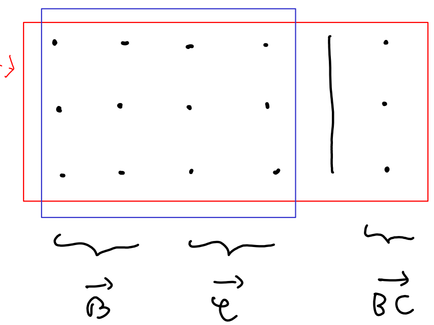
  $D = B + t_1 u_1 + \dots \overset{?}{=} C + s_1 v_1 + \dots$

  $t_1 u_1 + \dots - s_1 v_1 - \dots \overset{?}{=} C - B$

- $\underline{w \in \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}}$

  $w = t_1 u_1 + \dots \overset{?}{=} s_1 v_1 + \dots$

  $t_1 u_1 + \dots - s_1 v_1 - \dots \overset{?}{=} 0$



- ozn:

  $m = \max\{\dim \vec{\mathcal{B}}, \dim \vec{\mathcal{C}}\}$

  $n = \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}) =$ hodnost $\square$

  $o = \dim(\overrightarrow{\mathcal{B} + \mathcal{C}}) =$

  $= \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} + \vec{BC}) =$ hodnost $\square$

- zřejmě $m \leq n \leq o$

- přičemž $m = n \iff \vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}$ či $\vec{\mathcal{B}} \supseteq \vec{\mathcal{C}}$

  $n = o \iff \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$

- TEDY:

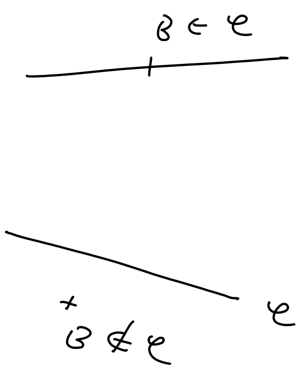
	$\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$ / $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$	$m = n$	$m < n$
		je max	není max
$n = o$	není $\emptyset$	$\subseteq$	X
$n < o$	je $\emptyset$	//	X

POZNÁMKY

- Předchozí OBECNÉ definice zahrnují jisté TRIVIÁLNÍ případy:

  $\mathcal{B}$ = bod, $\mathcal{C}$ = cokoli ... buď INCIDENTNÍ

  nebo ROVNOBĚŽNÉ



- Mezi všemi polohami,

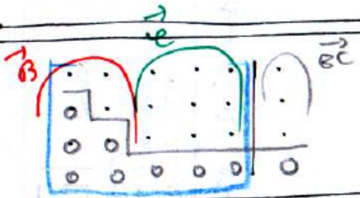
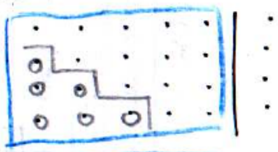
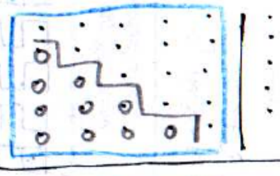
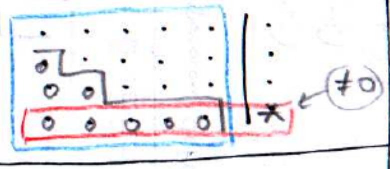
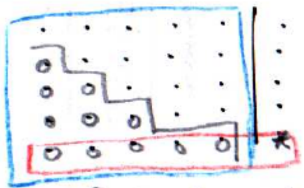
  MIMOBĚŽNOST potřebuje "nejvíc místa"...

- Pokud je místa "opravdu hodně", může se stát, že $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$ je netriv. (ex. společné vektory)

  $\rightsquigarrow$ ČÁSTEČNĚ ROVNOBĚŽNÉ

PŘÍKLAD

$\underset{\text{dim } 2}{\mathcal{B}}, \underset{\text{dim } 3}{\mathcal{C}} \subseteq \underset{\text{dim } \underline{N}}{\mathcal{A}}$

SOUSTAVA (*)	ŘEŠENÍ ($\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$)	VZÁJEMNÁ POLOHA	
	∞^2 (rovina)	$\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$	$N \geq 3$
	∞^1 (přímka)	$\mathcal{B} \times \mathcal{C}$	$N \geq 4$
	1 (bod)	$\mathcal{B} \times \mathcal{C}$	$N \geq 5$
	0	$\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$	$N \geq 4$
	0	$\mathcal{B} \not\times \mathcal{C}$	$\underline{\underline{N \geq 5}}$

↑ hodnost □ nemůže být < $\underline{3}$ = dim $\mathcal{C}$

"kolik místa potřeba"

OBECNĚ $\quad \mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$

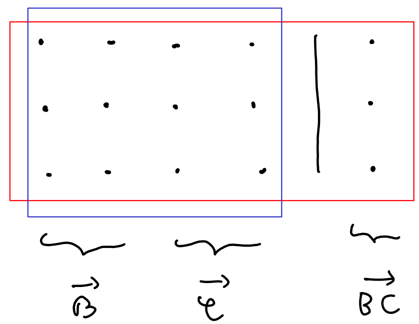
- ozn:

  $m = \max\{\dim \vec{\mathcal{B}}, \dim \vec{\mathcal{C}}\}$

  $n = \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}})$

  $o = \dim(\overrightarrow{\mathcal{B} + \mathcal{C}}) = \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} + \vec{BC})$

  $N = \dim \mathcal{A}$



- zřejmě $\quad m \le n \le o \le N \quad \ldots$

- Platí

  - Předp. $\mathcal{B} \not\parallel \mathcal{C}$

    $\Longrightarrow \quad m < n < o \le N$

    $\Longrightarrow \quad m \le N - 2$.

  - Zejména NADROVINA nemůže být s ničím mimoběžná.

  - Předp. $\vec{\mathcal{B}}$ a $\vec{\mathcal{C}}$ KOMPLEMENTÁRNÍ

    $\Longrightarrow \quad n = o = N \quad$ a $\quad \overrightarrow{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} = \{0\}$

    $\Longrightarrow \quad \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = $ BOD.

  - Apod.

SHRNUTÍ

- VZÁJEMNÉ POLOHY obecně pomocí
  - inkluzí $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}$
  - průniků $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$
  - součtů $\mathcal{B} + \mathcal{C}$, $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \iff \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{B} \iff \mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$$

- početně vidíme vše NARÁZ

- některé polohy vyžadují více MÍSTA než jiné