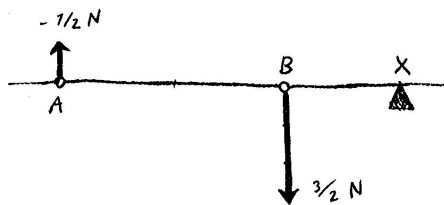


TĚŽIŠTĚ A P.O.D.

- jiný pohled na af. kombinace bodů
- těžiště a těžišťové (= barycentrické) souřadnice
- typické užití a poznámky

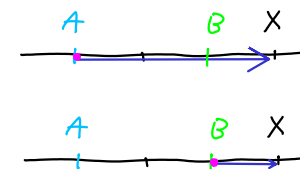


AFINNÍ KOMBINACE JINAK

• Známe: $X = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B$

$$= \left(1 - \frac{3}{2}\right)A + \frac{3}{2}B = A + \frac{3}{2}\vec{AB}$$

$$= -\frac{1}{2}A + \left(1 + \frac{1}{2}\right)B = B - \frac{1}{2}\vec{BA}$$

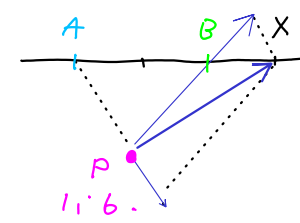


← obvyklé
← PARAMETRIZACE
bodů na přímce

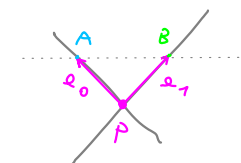
• Obecněji: $X = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B$

$$= -\frac{1}{2}(P + \vec{PA}) + \frac{3}{2}(P + \vec{PB})$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)}_1 P - \frac{1}{2}\vec{PA} + \frac{3}{2}\vec{PB}$$



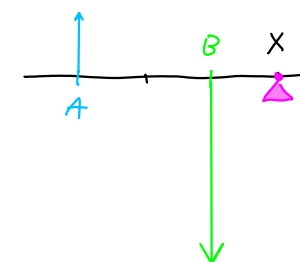
← přímka $t_0 + t_1 = 1$
v SOUŘADNICÍCH:



• Rovnováha: $X = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B$

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)}_1 X = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B$$

$$0 = -\frac{1}{2}\vec{XA} + \frac{3}{2}\vec{XB}$$



← těžiště
HMOTNÉ SOUSTAVY:

A(-1) B(3)

PŘEHLEDNĚ

- AFINNÍ KOMBINACE BODŮ :

$$\begin{array}{c} t_A A + t_B B \\ \hline t_A + t_B = 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{cccccccc} t_A & \dots & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & -1 & -3/2 \\ t_B & \dots & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 3/2 & 2 & 5/2 \end{array} \right.$$

A B

$$\text{Přímka } AB = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1 \}$$

$$\text{Polopřímka } AB = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1, t_B \geq 0 \}$$

$$\text{Polopřímka } BA = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1, t_A \geq 0 \}$$

$$\text{Úsečka } AB = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1, t_A \geq 0, t_B \geq 0 \}$$

- BODOVÉ HMOTNÉ SOUSTAVY :

$$m_A + m_B \neq 0$$

A(m_A) B(m_B) T(m_A+m_B)

↑ ↑ ↓
váhy

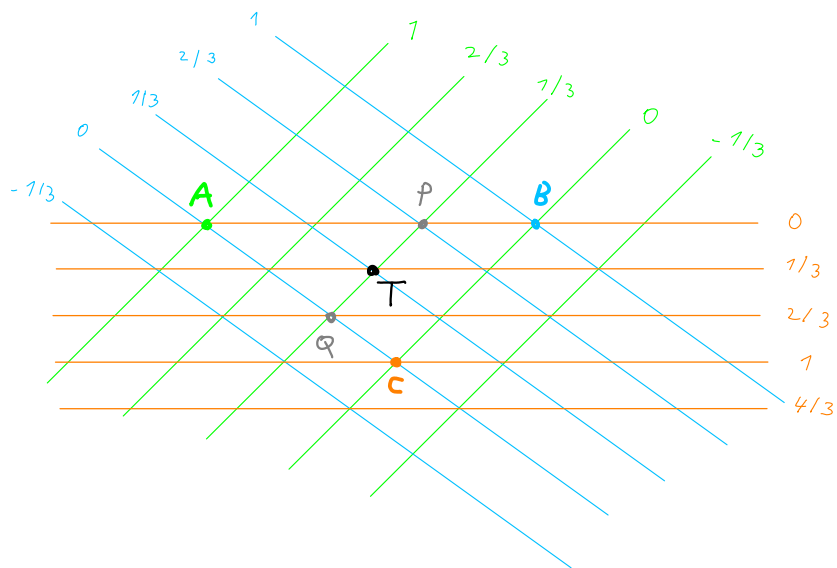
$$T = \text{těžiště}, \text{ pokud } m_A \vec{TA} + m_B \vec{TB} = 0,$$

$$\text{tj. } T = \frac{m_A}{m_A + m_B} A + \frac{m_B}{m_A + m_B} B$$

← ↑
barycentrické souřadnice

VÍČ BODŮ

- AFINNÍ KOMBINACE BODŮ :



$$P = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$$

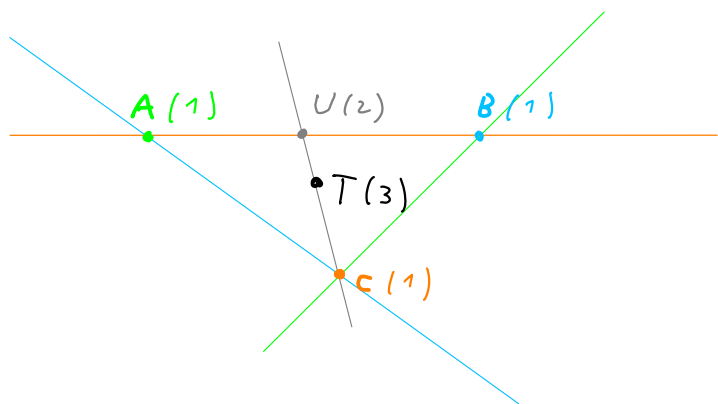
$$Q = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}C$$

$$T = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}C \right)$$

$$= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

- BODOVÉ HMOTNÉ SOUSTAVY :



$$U = \frac{1}{1+1}A + \frac{1}{1+1}B$$

$$= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$$

$$T = \frac{2}{1+2}U + \frac{1}{1+2}C$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \right) + \frac{1}{3}C$$

$$= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

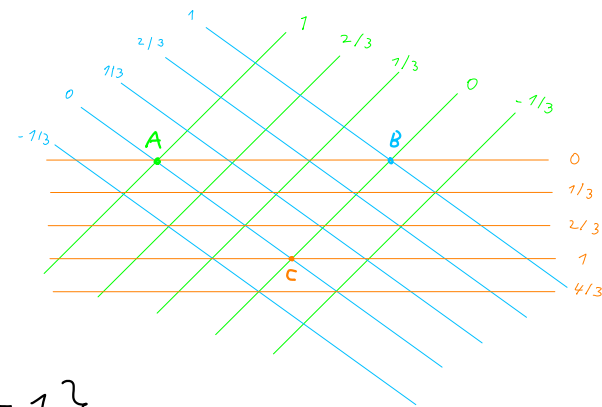
$$\epsilon_j \cdot 1\vec{UA} + 1\vec{UB} = 0$$

$$\epsilon_j \cdot 2\vec{TU} + 1\vec{TC} = 0$$

$$\epsilon_j \cdot 1\vec{TA} + 1\vec{TB} + 1\vec{TC} = 0$$

VÍČ BODŮ - PŘEHLEDNĚ

- AFINNÍ KOMBINACE BODŮ :



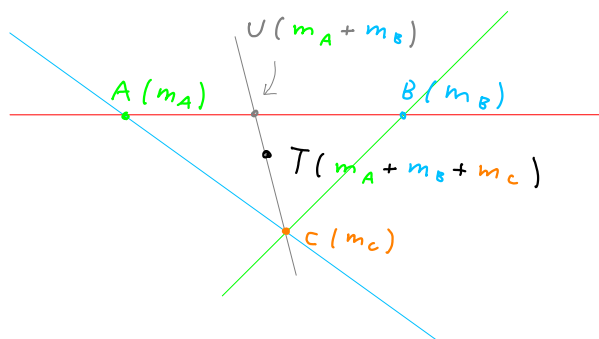
$$\text{Rovina } ABC = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1 \}$$

$$\text{Polorovina } AB + C = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1, t_C \geq 0 \}$$

$$\text{Úhel } ABC = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1, t_A \geq 0, t_C \geq 0 \}$$

$$\text{Trojúhelník } ABC = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1, t_A \geq 0, t_B \geq 0, t_C \geq 0 \}$$

- BODOVÉ HMOTNÉ SOUSTAVY :



$$U = \frac{m_A}{m_A + m_B} A + \frac{m_B}{m_A + m_B} B$$

$$T = \frac{m_A + m_B}{m_A + m_B + m_C} U + \frac{m_C}{m_A + m_B + m_C} C = \dots$$

$$= \frac{m_A}{m_A + m_B + m_C} A + \frac{m_B}{m_A + m_B + m_C} B + \frac{m_C}{m_A + m_B + m_C} C$$

$$t.j. m_A \vec{UA} + m_B \vec{UB} = 0$$

$$t.j. (m_A + m_B) \vec{TU} + m_C \vec{TC} = 0$$

$$t.j. m_A \vec{TA} + m_B \vec{TB} + m_C \vec{TC} = 0$$

OBECNĚ

- \mathcal{a} = afinní prostor, \mathcal{B} = afinní obal $\{A_0, \dots, A_k\}$,
kde $\{A_0, \dots, A_k\}$ = množina bodů v OBECNĚ poloze.
- BARYCENTRICKÉ souřadnice bodu $X \in \mathcal{B}$ vzhledem k (A_0, \dots, A_k)
= souřadnice vektoru \vec{PX} vzhledem k BÁZI $(\vec{PA}_0, \dots, \vec{PA}_k)$,
kde $P \notin \mathcal{B}$ lib...
... píšeme " $X = t_0 A_0 + \dots + t_k A_k$ ", kde NUTNĚ $t_0 + \dots + t_k = 1$!
viz s. 41, 62
- $\{B_1, \dots, B_\ell\}$ = množina bodů $\subset \mathcal{a}$,
 $\{m_1, \dots, m_\ell\}$ = množina VAH $\subset \mathbb{R}$, $m_1 + \dots + m_\ell \neq 0$.
- $T =$ TĚŽIŠTĚ bodové hmotné soustavy $\{B_1(m_1), \dots, B_\ell(m_\ell)\}$,
pokud $m_1 \vec{TB}_1 + \dots + m_\ell \vec{TB}_\ell = 0$.
viz s. 63, 65
+ INDUKCE
- PLATÍ

$$T = \text{těžiště} \iff T = t_1 B_1 + \dots + t_\ell B_\ell,$$
$$\text{kde } t_i = \frac{m_i}{m_1 + \dots + m_\ell}.$$

OBECNĚ

- a = afinní prostor, B = afinní obal $\{A_0, \dots, A_k\}$,
kde $\{A_0, \dots, A_k\}$ = množina bodů v OBECNĚ poloze.

- PLATÍ

$$B = \text{af. obal } \{A_0, \dots, A_k\} = \{t_0 A_0 + \dots + t_k A_k \mid t_0 + \dots + t_k = 1\}$$

$$\begin{aligned} \text{Poloprostor } B \text{ určený } A_0 \text{ a hranici obal } \{A_1, \dots, A_k\} &= \\ &= B \cap \{t_0 \geq 0\} \end{aligned}$$

$$\text{konvexní obal } \{A_0, \dots, A_k\} = B \cap \{t_0 \geq 0\} \cap \dots \cap \{t_k \geq 0\}$$

viz s. 41, 63, 65
+ indukce

- HLAVNĚ

Zobrazení $f: a \rightarrow a'$ je AFINNÍ

\Leftrightarrow zachovává AFINNÍ KOMBINACE bodů


\Leftrightarrow zachovává BARYCENTRICKÉ souř.

\Leftrightarrow zachovává TĚŽIŠTĚ bodových hmotných soustav.

viz definice s. 32-33, 41, 66

POZNÁMKY



- Pokud $\{A_0, \dots, A_k\}$ NEJSOU v obecné poloze, pak "souřadnice" $X = t_0 A_0 + \dots + t_k A_k \in B$ NEJSOU určeny jednoznačně...

např.  $X = -A_0 + 2A_1 = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 = \dots$

- ... nicméně mnohé z předchozího má stále DOBRÝ VÝZNAM!

- TĚŽIŠTĚ bodové hmotné soustavy se STEJNÝMI VAHAMÍ

= může,

body v OBECNÉ poloze ,
SYMETRICKÉ věci  a pod.

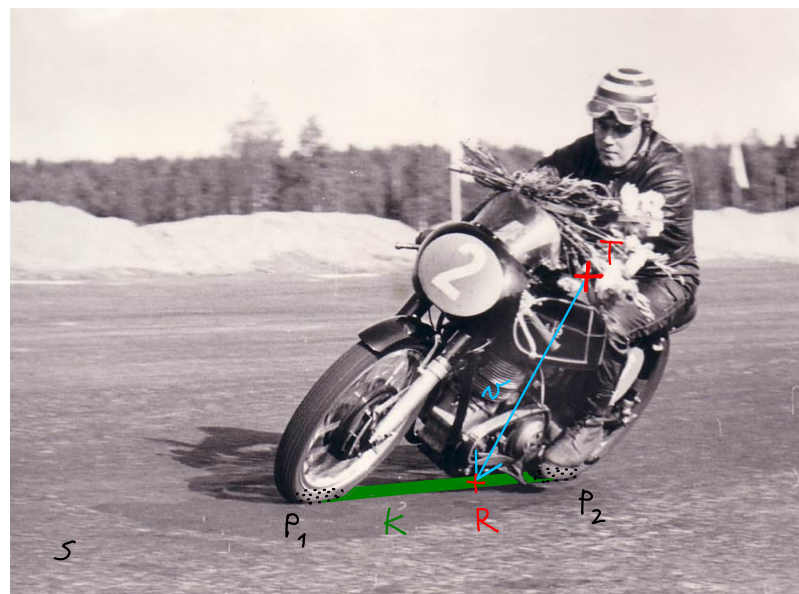
= ale NEMUSÍ,

např. DELTOID 

být totiž co TĚŽIŠTĚ konvexního obalu bodů!

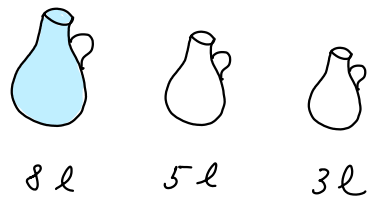
PRÍKLAD — PROBLÉM STABILITY

- Hmotná soustava je STABILNÍ ...

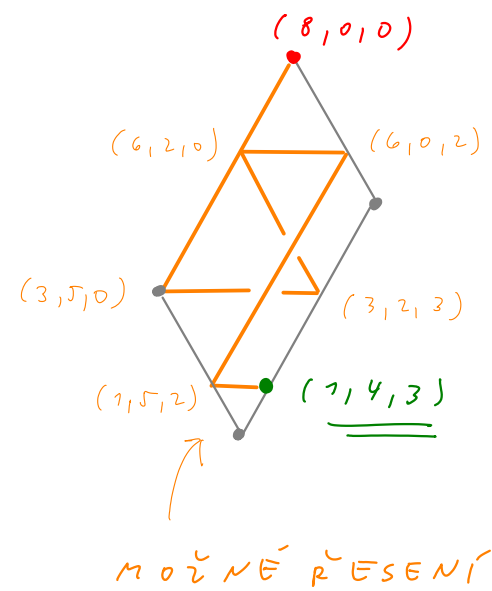
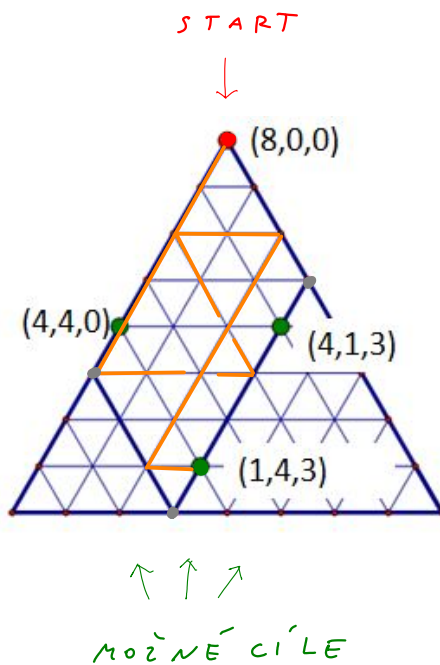
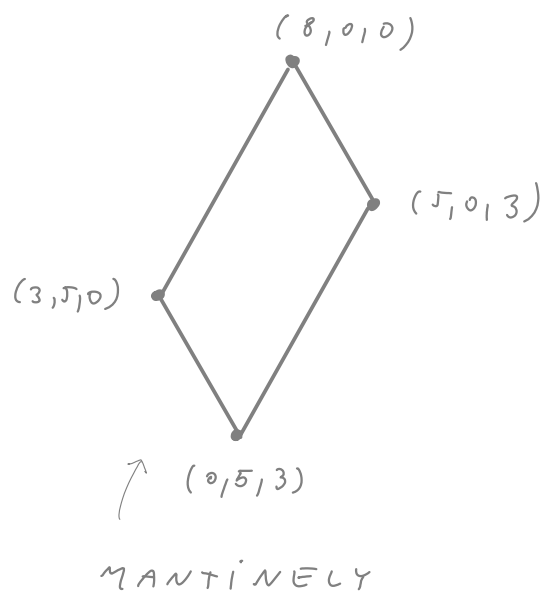


- ... pokud průmět (R)
těžiště (T) hmotné soustavy
ve směru výslednice (N) všech působících sil
do opěrné roviny (S)
leží v konvexním obalu (K)
opěrných prvků ($P_1 \cup P_2$).

PRÍKLAD — PROBLÉM TŘÍ DŽBAŇŮ



- UMÍMĚ: přeléváním zcela naplnit (polo)prázdné nádoby.
- CHCEME: přesně 4l.
- POSTRĚH: součet vody v nádobách je pořád STEJNÝ!
- MOŽNÉ ŘEŠENÍ:



SHRNUTÍ

- ztotožnění $\xrightarrow{\text{af. přímka}} \cong \mathbb{R} \xleftarrow{\text{reálná čísla}}$
m) uspořádaní, úsečka, polo-prostor, KONVEXNÍ množina
- k popisu předchozích omezení se hodí afinní KOMBINACE bodů
- afinní kombinace bodů souvisí s TĚŽIŠTÍ
- těžiště soustavy HMOTNÝCH BODŮ
obecně NENÍ totéž co
těžiště jejich KONVEXNÍHO OBALU
- předchozí věci se zachovávají při AFINNÍCH zobrazeních ...
... některé charakterizují af. zobr. ÚPLNĚ
↑
af. kombinace / baryc. souřadnice