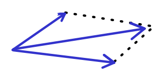
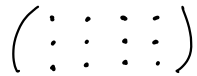
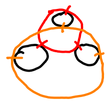
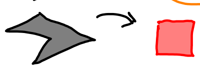
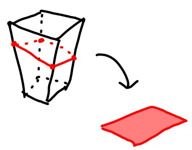
Geometrie 2

Obsah

Poslední aktualizace 13. ledna 2021
`https://is.muni.cz/auth/el/ped/podzim2020/MA0009/index.qwarp`

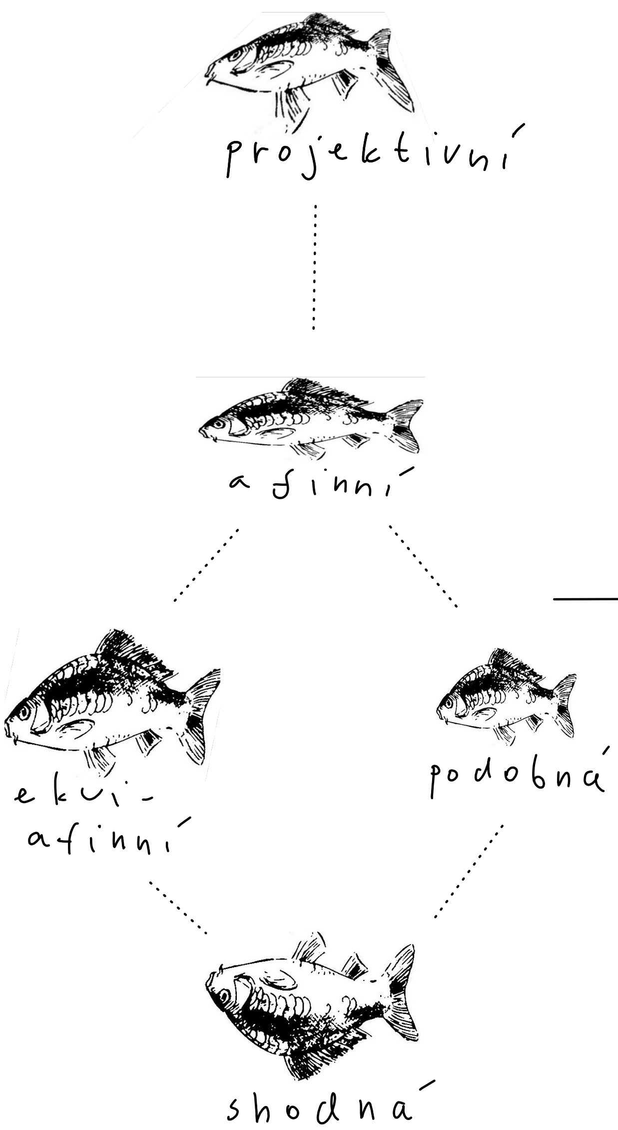
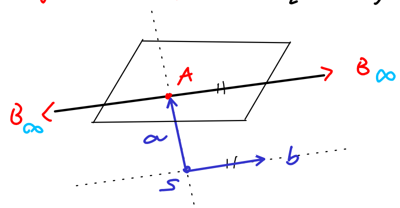
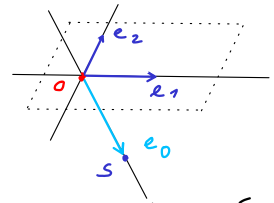
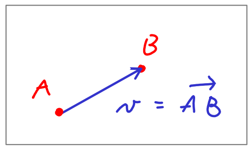
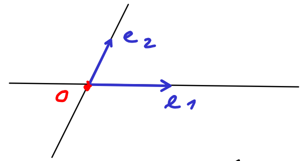
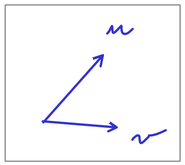
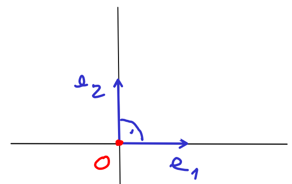
ÚVODNÍ PŘEHLED

	MINULÝ SEMESTR	TENTO SEMESTR
PŘEDMĚT	geometrie	totéž
CÍLE	opakování, rozšíření a **organizace** poznatků	totéž
NÁSTROJE	pravítko a kružítko 	lineární algebra  
PŘEDPOKLADY	**zvídavost**	totéž + **lineární algebra!**
VÝHODY	jednoduchost, představitelnost apod.	jednotný popis, žádná představivost apod.
TYPICKÉ ÚLOHY	sestrojte ... - dotykové úlohy  - kvadratura  - obecný průmět hranolu - řez hranolu - řez ve skutečné velikosti 	spočítejte ... × - - - - } totéž (resp. něco velmi podobného)

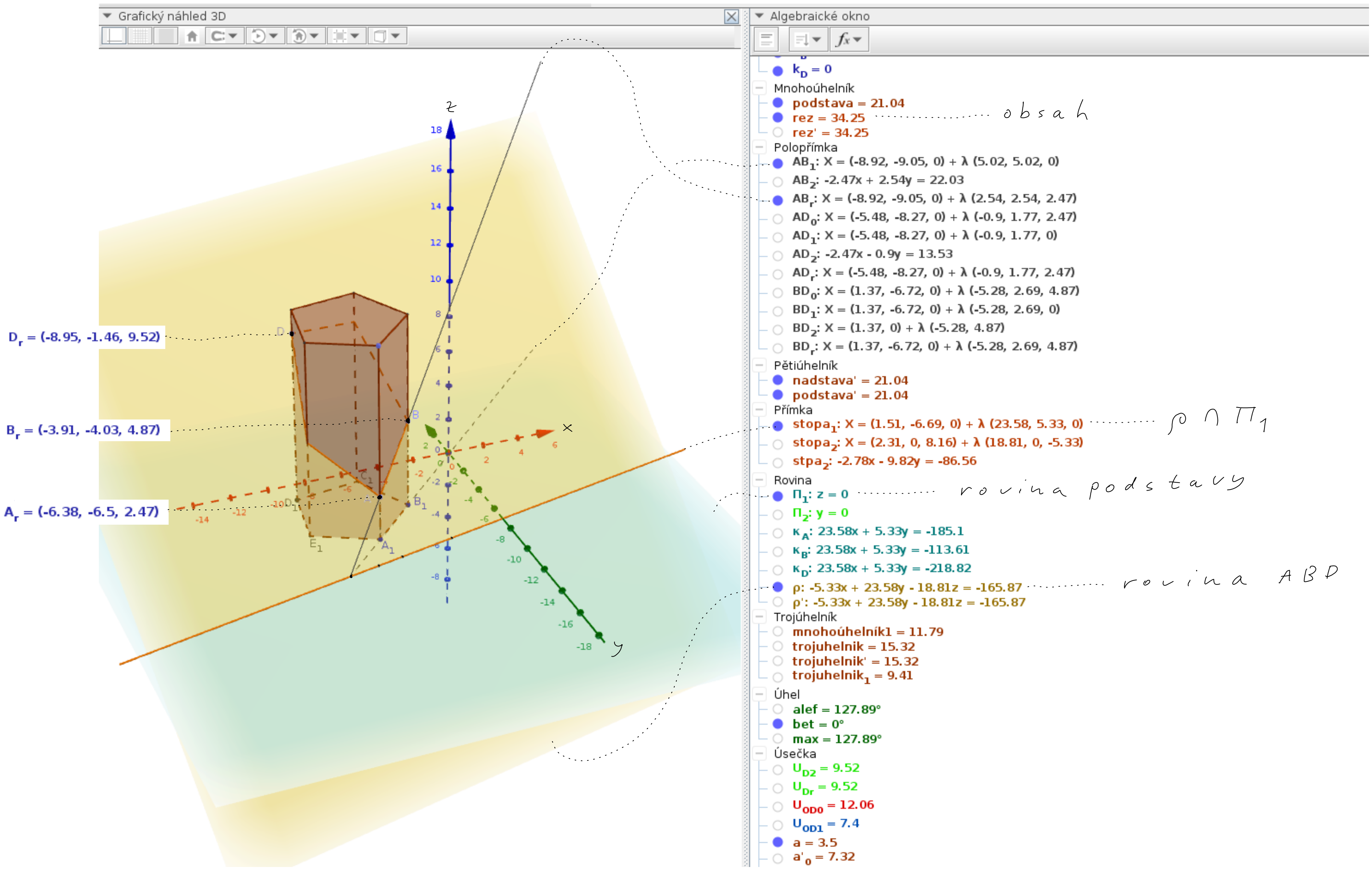
ÚVODNÍ PŘEHLED

	MINULÝ SEMESTR	TENTO SEMESTR
ZÁKLADNÍ POJMY	bod, přímka, rovina	vektor
ZÁKLADNÍ VZTAHY	incidentnost, spojitost, rovnoběžnost, uspořádání, shodnost	lineární (ne)závislost, (multi)linearnost apod.
ZÁKLADNÍ ÚLOHY	sestrojitelné veličiny průniky přímek, rovin vzdálenosti bodů obsahy, kvadratury apod.	× soustavy lin. rovnic velikosti vektorů determinanty apod.

ÚVODNÍ PŘEHLED

ZOBRAZENÍ	ÚLOHY	PROSTORY	ALG. VYMEZENÍ	POČÍTÁNÍ
	polohové	projektivní	$\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \{\infty\}$  pomocí $W \supset V$	homogenní souř.  = rozšířené
		afinní	$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$  body ...... vektor	afinní souř.  = libovolné
	metrické	eukleidovské	$\mathcal{E} = \mathcal{A}$ + skalární součin  ...... $u \cdot v$ vektory ...... číslo	kartézské souř.  = orto-normální

UKÁZKA



Grafický náhled 3D
Algebraické okno
$k_D = 0$
Mnohoúhelník
podstava = 21.04
rez = 34.25
rez' = 34.25
obsah
Polopřímka
AB_1: X = (-8.92, -9.05, 0) + λ (5.02, 5.02, 0)
AB_2: -2.47x + 2.54y = 22.03
AB_r: X = (-8.92, -9.05, 0) + λ (2.54, 2.54, 2.47)
AD_0: X = (-5.48, -8.27, 0) + λ (-0.9, 1.77, 2.47)
AD_1: X = (-5.48, -8.27, 0) + λ (-0.9, 1.77, 0)
AD_2: -2.47x - 0.9y = 13.53
AD_r: X = (-5.48, -8.27, 0) + λ (-0.9, 1.77, 2.47)
BD_0: X = (1.37, -6.72, 0) + λ (-5.28, 2.69, 4.87)
BD_1: X = (1.37, -6.72, 0) + λ (-5.28, 2.69, 0)
BD_2: X = (1.37, 0) + λ (-5.28, 4.87)
BD_r: X = (1.37, -6.72, 0) + λ (-5.28, 2.69, 4.87)
Pětiúhelník
nadstava' = 21.04
podstava' = 21.04
Přímka
$stopa_1$: X = (1.51, -6.69, 0) + λ (23.58, 5.33, 0)
$\rho \cap \Pi_1$
$stopa_2$: X = (2.31, 0, 8.16) + λ (18.81, 0, -5.33)
$stpa_2$: -2.78x - 9.82y = -86.56
Rovina
Π_1: z = 0
rovina podstavy
Π_2: y = 0
κ_A: 23.58x + 5.33y = -185.1
κ_B: 23.58x + 5.33y = -113.61
κ_D: 23.58x + 5.33y = -218.82
ρ: -5.33x + 23.58y - 18.81z = -165.87
rovina ABD
ρ': -5.33x + 23.58y - 18.81z = -165.87
Trojúhelník
mnohoúhelník1 = 11.79
trojuhelnik = 15.32
trojuhelnik' = 15.32
$trojuhelnik_1$ = 9.41
Úhel
alef = 127.89°
bet = 0°
max = 127.89°
Úsečka
U_{D2} = 9.52
U_{Dr} = 9.52
U_{OD0} = 12.06
U_{OD1} = 7.4
a = 3.5
a'_0 = 7.32
D_r = (-8.95, -1.46, 9.52)
B_r = (-3.91, -4.03, 4.87)
A_r = (-6.38, -6.5, 2.47)
z
x
y

ORGANIZACE

- Afinní geom. ↕ podzim '20
- Eukleidovská geom.
- projektivní rozšíření ↕ jaro '21
- zobrazení blíže ji

ZAKONČENÍ

- úkoly domácí .... aspoň 1/2
- písemka .... aspoň 1/2
- ústní zkouška .... nad písemkou

LITERATURA

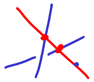
- Horák-Janyška, Analytická geom., Brno, 1997
- Sekanina & kol., Geometrie I a II, SPN, 1986
- Berger, Geometry I a II, Springer, 1987

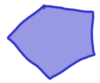
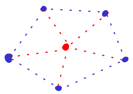
ROZCESTNÍK

https://is.muni.cz/auth/el/ped/podzim2020/MA0009/index.qwarp

AFINNÍ GEOMETRIE

TYPICKÉ AF. POJMY

- bod, přímka, rovina 
- rovnoběžnost, poměry
- příčky  a příčkové plochy 
- uspořádání 

, úsečky, konvexní množiny 
- těžiště 

TYPICKÉ PROVEDENÍ

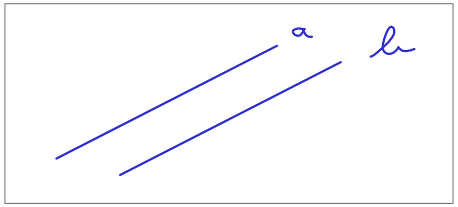
- obecný af. prostor, pod-prostor
- obecná af. zobrazení, af. souřadnice, přechody
- rovnoběžnost a další polohy, příčky podpr.
- polo-prostory, barycentrické souř. apod.

OPAKOVÁNÍ / MOTIVACE

ROVNOBĚŽNOST POMOCÍ ...

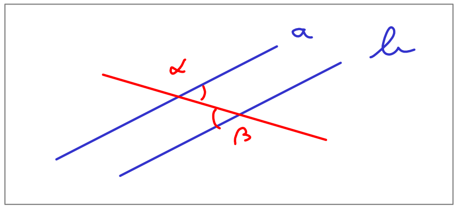
← v jedné rovině

- INCIDENCE



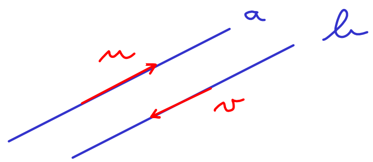
$a \parallel b \iff a \cap b = \emptyset$

- SHODNOSTI



$a \parallel b \iff \alpha = \beta$

- VEKTORŮ

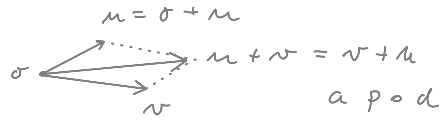


$a \parallel b \iff u = k \cdot v$

lineárně závislé

VEKTORY

$+ : V \times V \to V$

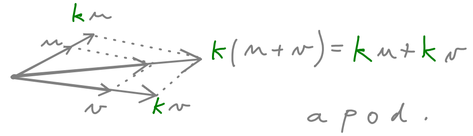


apod.

- VEKTOROVÝ PROSTOR V nad tělesem $\mathbb{R}$

  = komutativní grupa, na níž působí $\mathbb{R}$

  tj. akce $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ je v souladu s



apod.

⇝ LINEÁRNÍ KOMBINACE $ku + lv + \dots$

⇝ LIN. ZÁVISLOST $w = ku + lv + \dots$

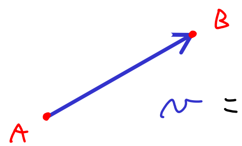
⇝ BÁZE, DIMENZE, ...

- Typické příklady:
  - síly (šipky)
  - řešení soustav HOMOG. LIN. rovnic

- Pozn.:
  - v algebře lze místo $\mathbb{R}$ lib. těleso (např. $\mathbb{Q}$)
  - do geometrie potřebujeme $\mathbb{R}$ kvůli SPOJITOSTI

AFINNÍ STRUKTURA

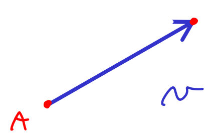
- názorně



$v = \vec{AB}$

$(\text{bod}, \text{bod}) \longmapsto \text{vektor}$

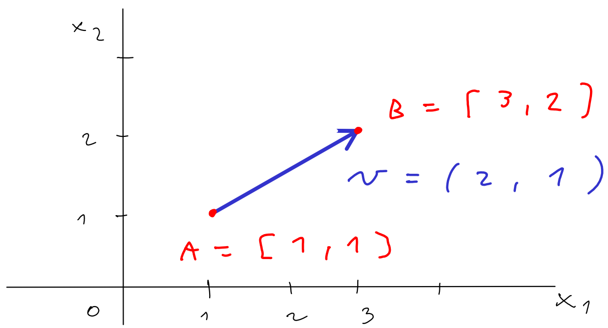
- Aktivně



$B = A + v$

$(\text{bod}, \text{vektor}) \longmapsto \text{bod}$

- početně



$v = B - A$

$B = A + v$

$A = B - v$

AFINNÍ STRUKTURA pořádně

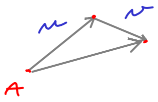
- AFINNÍ PROSTOR a nad vekt. prostorem V

= množina a, na niž působí V

jakožto „grupa posunování", tj. $V \times a \to a$:

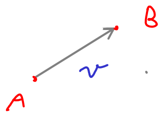
1) $A = A + o$ pro lib. $A \in a$

2)



$(A+u)+v = A+(u+v)$ pro lib. $A \in a$ a $u, v \in V$

3)

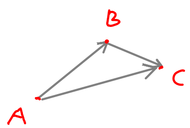


... ∃! tak, že $B = A + v$ pro lib. $A, B \in a$

= množina a s přiřazením $a \times a \to V$,

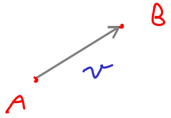
které je v souladu s vekt. strukturou V :

1)



$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ pro lib. $A, B, C \in a$

2)



B ... ∃! tak, že $\vec{AB} = v$ pro lib. $A \in a$, $v \in V$

SOUVISEJÍCÍ POJMY

- vekt. prostor V ... zaměření $\mathcal{A}$, ozn. $V = \vec{\mathcal{A}}$
- dimenze $\mathcal{A}$ = dimenze V

- afinní podprostor $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$
  = podmnožina, která je afinním prostorem
  tj. zúžení $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \longrightarrow U \subseteq V$
  vekt. podprostor ve V

- dim $\mathcal{B}$ = dim U :

0	....	bod
1	....	přímka
2	....	rovina
dim V − 1	..	nad-rovina

- Typické příklady:
  - vekt. prostor se ZAPOMENUTÝM neutrálním prvkem
  - řešení soustav (NEHOMOG.) LIN. rovnic

MEZISHRNUTÍ

- ROVNOBĚŽNOST 3× jinak
- opakování VEKTOROVÉ PROSTORY
- obecné AFINNÍ (pod-) PROSTORY
- TYPICKÉ příklady . . .

TYPICKÉ PŘÍKLADY

- názorný (geometrický) model
- standardní (aritmetický) model
- kanonický (vektorový) model

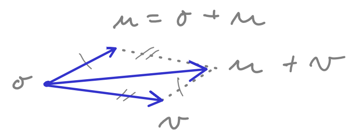
- řešení lineárních alg. rovnic
- řešení lineárních dif. rovnic

- apod.

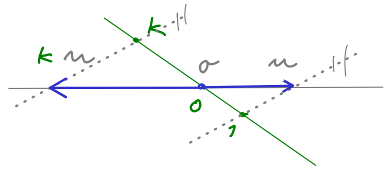
NÁZORNÝ AF. PROSTOR

axiomy I, U, R, Sh, Sp

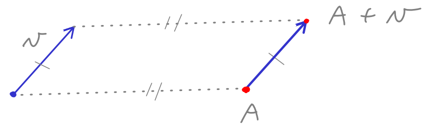
- body $\mathcal{A}$ . . . klasický eukleidovský prostor
- vektory V . . . { orientované úsečky }
  - sčítání . . . . doplnění rovnoběžníku,
    resp. skládání na přímce



  - natahování . . . doplnění rovnoběžek,
    resp. skládání na přímce



- akce $V \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$
  . . . doplnění rovnoběžníku,
  resp. skládání na přímce



- požadavky 1) – 3) . . . ✓

Pozn . . . stačí axiomy $I, U, R, \cancel{Sh}, Sp$

STANDARDNÍ AF. PROSTOR ... "ARITMETICKÝ" MODEL

- body $\mathcal{A}$ ... $\mathbb{R}^n$
- vektory V ... $\mathbb{R}^n$

n-tice reálných čísel

  - sčítání ... po složkách
  - natahování ... po složkách

- akce $V \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$

  ... po složkách

- požadavky 1) – 3) ... ✓

Pozn ... stačí vlastnosti $+$ a $\cdot$ v $\mathbb{R}$

KANONICKÝ AF. PROSTOR SE ZAMĚŘENÍM V

- vektory V … lib. vektorový prostor
- body a … V
- akce $V \times a \longrightarrow a$

  … $(v, u) \longmapsto u + v$

- požadavky 1) – 3) … ✓

Pozn … stačí vlastnosti $+$ ve V

… zobecnění předchozího příkladu

LINEÁRNÍ ALG. ROUNICE !

pro neznámé $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

- body a ... $\left\{ \text{řešení soustavy rovnic } \boxed{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_3 = 4 \end{array}} \right\} =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = -4 + 3t \end{array} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

- vektory V ... $\left\{ \text{řešení soustavy rovnic } \boxed{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_3 = 0 \end{array}} \right\} =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = 3t \end{array} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

  - sčítání a natahování ... po složkách

(x_1, x_2, x_3)

- akce $V \times a \longrightarrow a$ ... po složkách

- požadavky 1) - 3) ... ✓

Pozn ... podprostor stand. af. prostoru $\mathbb{R}^3$

$$\ldots \quad a = \left\{ \boxed{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_3 = 4 \end{array}} \right\} \subset \left\{ \boxed{2x_1 + x_2 = 3} \right\} \subset \left\{ \boxed{3 = 3} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = -4 + 3t \end{array} \middle| \underset{\text{dim } 1}{t \in \mathbb{R}} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = -4 + 3t + r \end{array} \middle| \underset{\text{dim } 2}{t, r \in \mathbb{R}} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = r \end{array} \middle| \underset{\text{dim } 3}{t, r, s \in \mathbb{R}} \right\} = \mathbb{R}^3$$

LINEÁRNÍ DIF. ROUNICE I.

- body a ... $\{$ primitivní funkce k funkci $\frac{1}{x}$ $\}$ =
  = $\{$ řešení dif. rovnice $\boxed{y' = \frac{1}{x}}$ $\}$ =
  $= \{ y = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C \mid C \in \mathbb{R} \}$

- vektory V ... $\{$ řešení dif. rovnice $\boxed{y' = 0}$ $\}$ =
  $= \{ y = C \mid C \in \mathbb{R} \}$

  - sčítání a natahování ... funkcí

- akce $V \times a \longrightarrow a$ ... sčítání funkcí

- požadavky 1) – 3) ... ✓

<u>Pozn</u> ... stačí vlastnosti $+$ a $\cdot$ v $\mathbb{R}$

... podprostor v PROSTORU funkcí ...

dim 1

LINEÁRNÍ DIF. ROVNICE II.

- body a . . . $\{$ řešení dif. rovnice $\boxed{y'' - 4y' + 5y = 10}$ $\} =$

$$= \{ y = 2 + C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$

- vektory V . . . $\{$ řešení dif. rovnice $\boxed{y'' - 4y' + 5y = 0}$ $\} =$

$$= \{ y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$

  - sčítání a natahování . . . funkcí

- akce $V \times a \longrightarrow a$ . . . sčítání funkcí

- požadavky 1) - 3) . . . ✓

Pozn . . . stačí vlastnosti $+$ a $\cdot$ v $\mathbb{R}$

. . . podprostor v PROSTORU funkcí . . .
dim 2

UMĚLÝ PŘÍKLAD

- $\mathcal{a} := \{ [x, \sin x] \mid x \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^2$

- $\mathcal{a} \times \mathcal{a} \to \mathbb{R}^2$:

a) zúžení stand. přiřazení

$A = [a, \sin a]$, $B = [b, \sin b]$ $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{AB} := [b-a, \sin b - \sin a]$

... **NENÍ** af. prostor ("$\vec{a}$" $= \mathbb{R} \times \langle -2, 2 \rangle$ NENÍ vekt. prostor)

b) rozdíl na první složce

$A = [a, \sin a]$, $B = [b, \sin b]$ $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{AB} := [b-a, 0]$

... **JE** af. prostor se zaměřením $\vec{a} \cong \mathbb{R}$

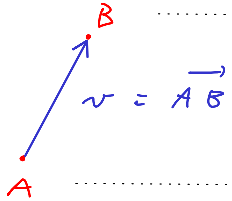
c) rozdíl na druhé složce

$A = [a, \sin a]$, $B = [b, \sin b]$ $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{AB} := [0, \sin b - \sin a]$

... **NENÍ** af. prostor ("$\vec{a}$" $\cong \langle -2, 2 \rangle$ NENÍ vekt. prostor)

SHRNUTÍ

- několik MODELŮ



B .... $[b_1, b_2, \dots]$

$v = \overrightarrow{AB}$ .... $(v_1, v_2, \dots)$

A .... $[a_1, a_2, \dots]$

- několik důležitých PŘÍKLADŮ .... $\boxed{\text{řešení LINEÁRNÍCH rovnic}}$

- af. prostor $\mathcal{A}$ dim k je

  $\cong$ stand. af. prostorem $\mathbb{R}^k$

  ... dáno volbou souř. sostavy ...

  $\subseteq$ stand. af. prostoru $\mathbb{R}^n$

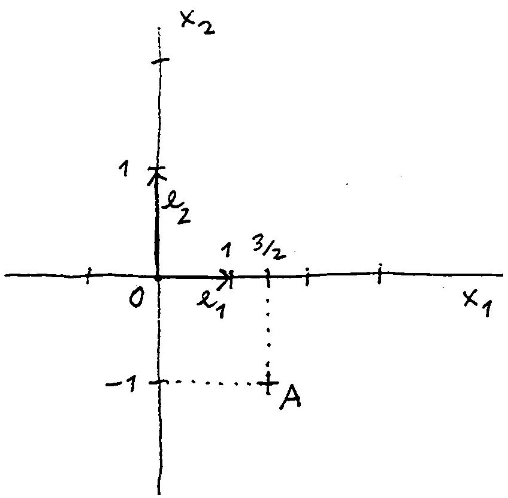
  ... $\boxed{\underbrace{r \text{ lin. NEZÁVISLÝCH rovnic, } n \text{ neznámých}}_{k = n - r}}$

AFINNÍ SOUŘADNICE

- příklady

- obecně

- přechody



NAPŘ.

- V = { řešení dif. rovnice $\boxed{y'' - 4y' + 5y = 0}$ } =

$$= \{ y = c_1 \underline{e^{2x} \cos x} + c_2 \underline{e^{2x} \sin x} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$\cong$$

$$\{ (c_1, c_2) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \} =$$

= stand. vekt. prostor $\mathbb{R}^2$

- a = { řešení dif. rovnice $\boxed{y'' - 4y' + 5y = 10}$ } =

$$= \{ y = \underline{2} + c_1 \underline{e^{2x} \cos x} + c_2 \underline{e^{2x} \sin x} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$\cong$$

$$\{ [c_1, c_2] \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \} =$$

= stand. af. prostor $\mathbb{R}^2$

- v obou případech "$\cong$"

  IZOMORFISMUS

  - znamená BIJEKTIVNÍ přiřazení ZACHOVÁVAJÍCÍ strukturu
  - je dáno VOLBOU báze
    resp. <u>báze</u> a "<u>počátku</u>"

    part. řešení nehomogenní rovnice

    fund. řešení homogenní rovnice

OBECNĚ

- prvky obecného vekt. prostoru V
  ... lineární kombinace $v = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots$
- prvky obecného af. prostoru $\mathcal{A}$
  ... "něco + lineární kombinace" $A = P + c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots$

- $(e_1, e_2, \dots)$ je BÁZE ve V $\Longleftrightarrow$
  $\Longleftrightarrow$ n-tice čísel $(c_1, c_2, \dots)$ určena JEDNOZNAČNĚ!

reper

- AFINNÍ SOUŘ. SOUSTAVA
  $=$ bod $P \in \mathcal{A}$ + báze $(e_1, e_2, \dots)$ ve V
  počátek

- SOUŘADNICE bodu A vzhledem k reperu $(P; e_1, e_2, \dots)$
  $=$ souřadnice vektoru $\overrightarrow{PA}$ vzhledem k bázi $(e_1, e_2, \dots)$.

ZÁVĚRY

- VOLBA souř. soustavy $\rightsquigarrow$ $a \cong \mathbb{R}^n$

  bod $A \overset{1:1}{\longmapsto}$ souřadnice A

  rozdíl $a \times a \to V$ odp. stand. rozdílu po složkách

- ZEJMÉNA:

  všechny af. prostory STEJNÉ DIM. jsou navzájem IZOMORFNÍ!

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, leftrightarrow, dashed] \arrow[dr, leftrightarrow] & & a' \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & \mathbb{R}^n & \end{tikzcd}$$

- OVŠEM:

  jiné souř. soustavy $\rightsquigarrow$ jiná ztotožnění ...

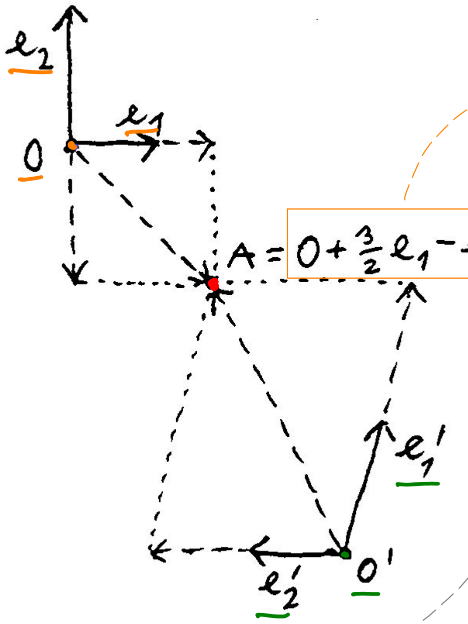
PŘECHODY

- Např.

$O = O' + 3e_1' + 4e_2'$

$e_1 = -e_2'$

$e_2 = e_1' + \frac{1}{3}e_2'$



$A = \boxed{O + \frac{3}{2}e_1 - e_2} = \boxed{O' + 2e_1' + \frac{13}{6}e_2'}$

souřadnice A vzhledem k O, e_1, e_2 ... $[\frac{3}{2}, -1]$

souřadnice A vzhledem k O', e_1', e_2' ... $[2, \frac{13}{6}]$

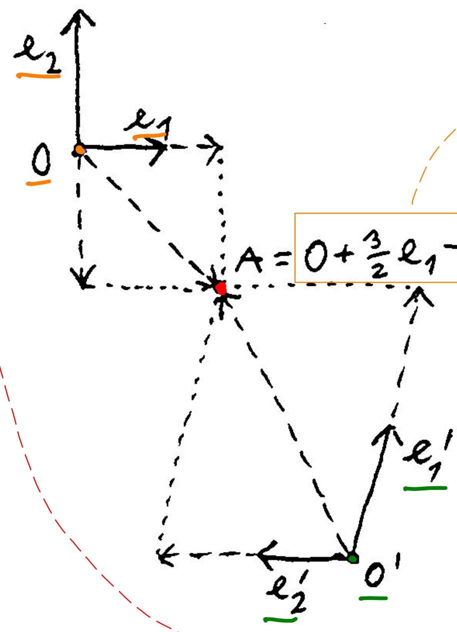
PŘECHODY

- Např.

$O = O' + 3e_1' + 4e_2'$

$e_1 = -e_2'$

$e_2 = e_1' + \frac{1}{3}e_2'$



$A = O + \frac{3}{2}e_1 - e_2 = O' + 2e_1' + \frac{13}{6}e_2'$

souřadnice A vzhledem k
... $[\frac{3}{2}, -1]$

souřadnice A vzhledem k
... $[2, \frac{13}{6}]$

- OBECNĚ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{13}{6} \end{pmatrix}$$

souřadnice $\overrightarrow{O'O}$ vzhledem k bázi

matice přechodu od báze k bázi

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

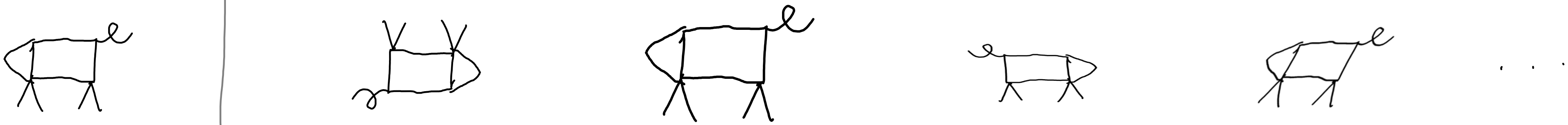
= zobrazení zachovávající AFINNÍ STRUKTURU ...

- příklady z dřívějška
- upřesnění
- ZÁKLADNÍ VĚTY
- výhledy

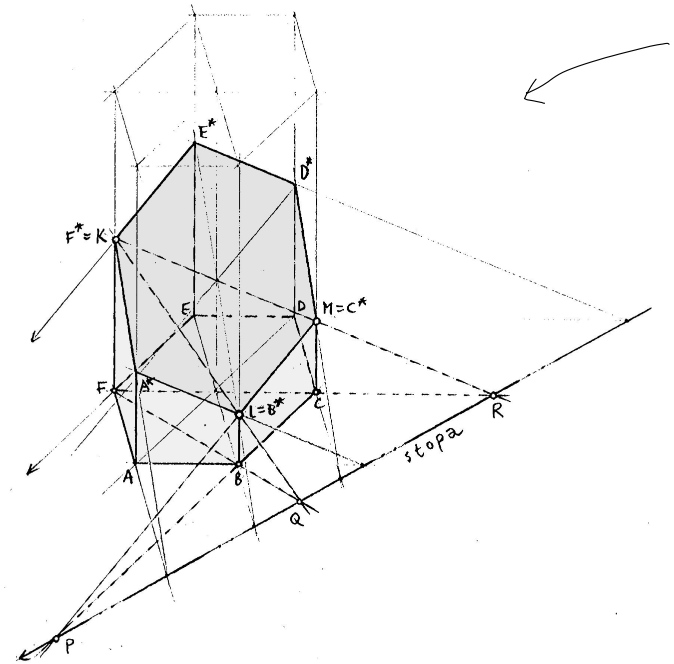
$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}\times\mathcal{A} \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d] & \mathcal{A}'\times\mathcal{A}' \arrow[d] \\ \vec{\mathcal{A}} \arrow[r, dashed, "\vec{f}"'] & \vec{\mathcal{A}'} \end{tikzcd}$$

PŘÍKLADY Z LOŇSKA

VZOR | OBRAZ



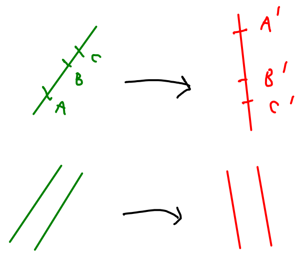
"otočení" "zvětšení" "zmáčknutí" "naklonění" . . .



"rovnob. průmět hranolu a jeho řezu"

VÍME, ŽE ZACHOVÁVÁ:

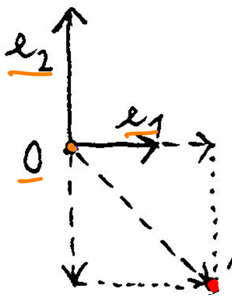
- kolineárnost
- poměry trojic kolin. bodů
- rovnoběžnost



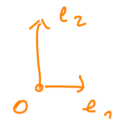
... kdykoli to je možné

(může degenerovat → ·)

PŘÍKLADY Z LETOŠKA

- 

  $\boxed{A = 0 + \frac{3}{2} e_1 - e_2}$

  souřadnice A vzhledem k 

  ... $[\frac{3}{2}, -1]$

- a = { řešení dif. rovnice $\boxed{y'' - 4y' + 5y = 10}$ } =

$$= \{ y = 2 + C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$\cong$$

$$\{ [C_1, C_2] \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \} =$$

= stand. af. prostor $\mathbb{R}^2$

- volba souř. soustavy $\rightsquigarrow$ $a \cong \mathbb{R}^n$

  bod $A \overset{1:1}{\longmapsto}$ souřadnice A

  rozdíl $a \times a \to V$ odp. stand. rozdílu po složkách

  ... AFINNÍ IZOMORFISMUS

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

= zobrazení zachovávající LINEÁRNÍ STRUKTURU,

tj. strukturu VEKT. PROSTORU,

tj. LINEÁRNÍ KOMBINACE VEKTORŮ,

tj. $f : V \longrightarrow V'$ takové, že

$$f(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots) = c_1 f(v_1) + c_2 f(v_2) + \dots$$

pro lib. $v_1, v_2, \dots \in V$ a $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{R}$.

- f je LINEÁRNÍ $\Longleftrightarrow$ lze vyjádřit pomocí MATIC takto:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}} = \boxed{\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}}$$

matice zobrazení ...

souřadnice vzoru ...

souřadnice obrazu ...

vzhledem k nějakým bázím

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

= zobrazení zachovávající AFINNÍ STRUKTURU,
tj. strukturu AFINNÍHO PROSTORU,

$V = \vec{a}$

tj. $f : a \longrightarrow a'$ takové, že

$$f(A + c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots) = f(A) + c_1 \vec{f}(v_1) + c_2 \vec{f}(v_1) + \dots$$

pro lib. $A \in a$ a $v_1, v_2, \dots \in V$ a $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{R}$,

kde $\vec{f} : V \longrightarrow V'$ je nějaké (LINEÁRNÍ) zobrazení.

- f je AFINNÍ $\iff$ lze vyjádřit pomocí MATIC takto:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}} + \boxed{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}} = \boxed{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}$$

obraz počátku ...

matice lin. zobrazení $\vec{f}$ ...

souřadnice vzoru ...

souřadnice obrazu ...

vzhledem k nějakým af. reperům

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

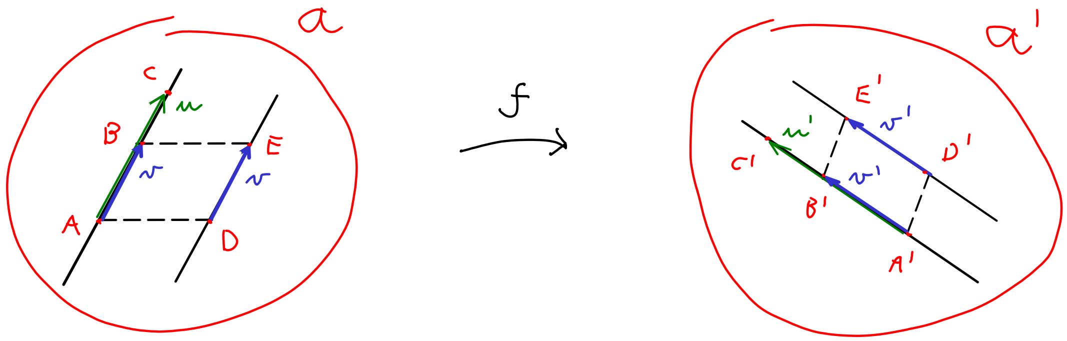
- stručně

$f: \mathcal{a} \to \mathcal{a}'$ je AFINNÍ $\iff$ indukuje $\vec{f}: V \to V'$ LINEÁRNÍ

takové, že $f(A+v) = f(A) + \vec{f}(v)$,

resp. $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$, pro lib. $A, B \in \mathcal{a}$ a $v \in V = \vec{\mathcal{a}}$.

- názorně



f je AFINNÍ $\iff$ zachovává
- kolineárnost
- poměry trojic kolin. bodů
- rovnoběžnost

... kdykoli to je možné (může degenerovat $\nparallel \to \parallel$)

ZÁKLADNÍ VĚTA AFINNÍ GEOMETRIE

- Dosud zmiňované vlastnosti af. zobrazení jsou svázány víc než se zdá:

- ZÁKLADNÍ VĚTA

> Pro BIJEKTIVNÍ $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ mezi af. prostory DIM $\geqq 2$ platí:
>
> f je AFINNÍ $\Longleftrightarrow$ zachovává KOLINEÁRNOST.

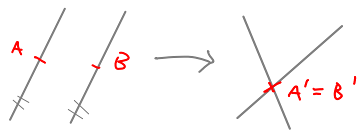
- Implikace "$\Rightarrow$" je zřejmá.

- **Myšlenky důkazu** implikace "$\Leftarrow$" jsou:

a) na přímku se nezobrazuje víc než přímka

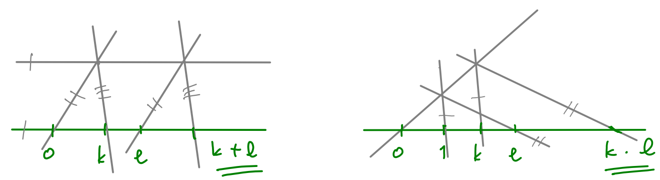
... spor se SURJEKTIVNOSTÍ

b) zachovává se rovnoběžnost



... spor s INJEKTIVNOSTÍ

c) zachovávají se poměry ...



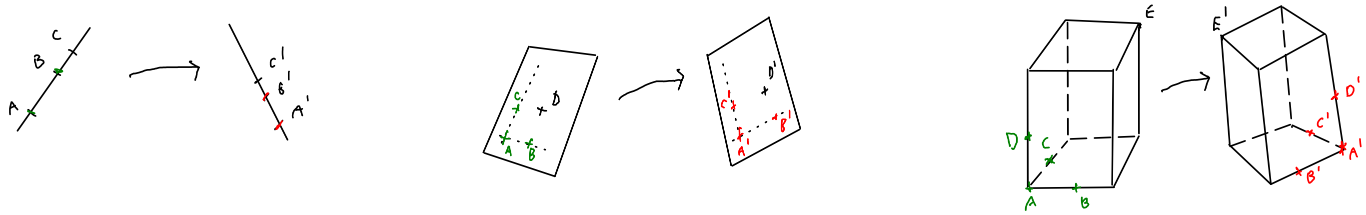
... pomocí // lze realizovat + a · v $\mathbb{R}$

VĚTA O URČENOSTI

- z minulého semestru víme, že

> PROSTÉ (resp. ne příliš degenerované) AFINNÍ zobrazení z prostoru dim n je určeno obrazy $n+1$ bodů v obecné poloze.

- Dokazovali jsme konstruktivně a induktivně pro $n = 1, 2, 3 \dots$



- Nyní víme, že

> Libovolné AFINNÍ zobrazení z prostoru dim n je určeno obrazy $n+1$ bodů v obecné poloze.

- **Důkaz:**

AFINNÍ $f : a \to a'$ je určeno obrazem 1 bodu a LINEÁRNÍM $\vec{f} : \vec{a} \to \vec{a}'$,

LINEÁRNÍ $\vec{f} : \vec{a} \to \vec{a}'$ je určeno obrazem BÁZE,

BÁZE má n prvků.

SHRNUTÍ / VÝHLEDY

- Máme několik **ekvivalentních** vymezení AFINNÍCH zobr.
- Některé vlastnosti plynou z jiných, **další** budeme přidávat..
- Diskuzi o zobrazeních budeme **zjemňovat / rozšiřovat** podle vzoru . . .

$$\begin{tikzcd}
& \text{PROJEKTIVNÍ} \arrow[d, dash] & \\
& \text{AFINNÍ} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\text{EKVIAF.} \arrow[dr, dash] & & \text{PODOBNÁ} \arrow[dl, dash] \\
& \text{SHODNÁ} &
\end{tikzcd}$$

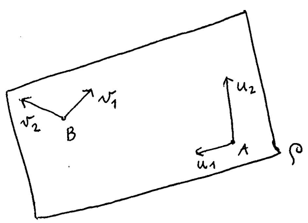
- základní věta AFINNÍ geom. se bude rýmovat se **základní větou** PROJEKTIVNÍ geometrie,
- což v důsledku bude znamenat, že

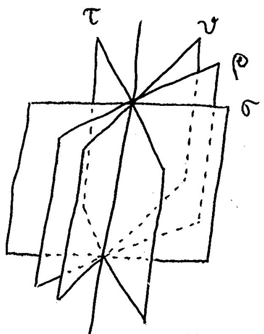
„VŠECHNO SE VLEZE DO NĚJAKÉ **MATICE**!“

POZNÁMKY K VYJÁDŘENÍ AF. PODPR.

- rovnicově (implicitně)
- parametricky (explicitně)
- jinak (...)

- přechod od jednoho ke druhému
- přechod od druhého k prvnímu
- apod.





$p = \rho \cap \sigma = \tau \cap \nu \dots$

PŘÍKLAD

pro neznámé $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$,
tj. $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left\{ \text{řešení soustavy rovnic } \boxed{\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}} \right\} =$$

$$= \left\{ \text{řešení soustavy rovnic } \boxed{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 - x_3 &= 4 \end{aligned}} \right\} =$$

$$= \ \ldots$$

ekvivalentní SOUSTAVY ROVNIC

$$= \left\{ \begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= 3 - 2t \\ x_3 &= -4 + 3t \end{aligned} \ \middle|\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \ \middle|\ t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 3/2 - s \\ x_2 &= s \\ x_3 &= 1/2 - 3s \end{aligned} \ \middle|\ s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \ \middle|\ s \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \ \ldots$$

ekvivalentní PARAMETRIZACE

2 lin. NEZÁVISLÉ rovnice
3 neznámé

$$\dim \mathcal{B} = 3 - 2 = 1$$

OBECNĚ

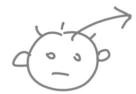
Pro lib. af. prostor $\mathcal{A}$:

- volba souř. soustavy ZTOTOŽŇUJE $\mathcal{A} \cong \mathbb{R}^n$, kde $n = \dim \mathcal{A}$

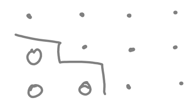
  $\rightsquigarrow$ všechny výpočty ve stand. prostoru $\mathbb{R}^n$ ...

Pro lib. af. podprostor $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cong \mathbb{R}^n$:

- od rovnicového vyjádření k parametrickému
  - stačí **vyřešit** soustavu,
  - pro MÁLO rovnic umíme z hlavy,
  - OBECNĚ umíme **eliminovat** neznámé ...



- od parametrického vyjádření k rovnicovému
  - stačí **najít** soustavu,
  - pro MÁLO parametrů umíme z hlavy,
  - OBECNĚ umíme **eliminovat** parametry ...



- všudypřítomné POČTY $\rightsquigarrow$

$$\boxed{\underbrace{\begin{array}{l} r \text{ lin. NEZÁVISLÝCH rovnic} \\ n \text{ neznámých} \end{array}}_{\dim \mathcal{B} \,=\, n - r}}$$

MŮŽE SE HODIT

- $\mathcal{B} = \{ B + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots \mid t_1, t_2, \dots \in \mathbb{R} \} \quad \longleftarrow \quad \dim \mathcal{B} = k$

- $X \in \mathcal{B} \iff X = B + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots$

  $\iff X - B = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots$

  $\iff$ hodnost matice $(\overrightarrow{BX}, v_1, v_2, \dots) = k$

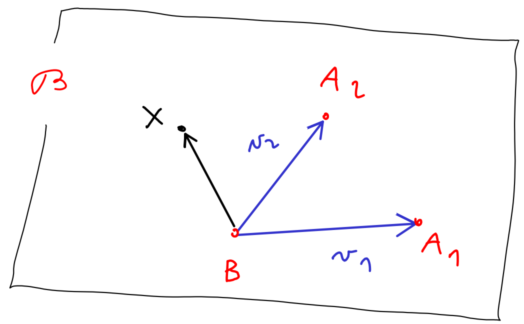
  $\iff$ všechny subdeterminanty řádu $> k$ z matice $(\overrightarrow{BX}, v_1, v_2, \dots)$ jsou 0

- Např. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \dots \quad \dim 2$

  hodnost $\left(\begin{array}{c:c:c} x_1 & 1 & -1 \\ x_2 - 1 & 2 & 1 \\ x_3 - 2 & 0 & 3 \end{array} \right) = 2 \iff \det \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = 0$

  $\iff \boxed{2x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0}$

JINÁ VYJÁDŘENÍ



- $X \in \mathcal{B} \iff X = B + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots$

  $\iff X = B + t_1 (A_1 - B) + t_2 (A_2 - B) + \dots$

  $\iff$ "$X = (1 - t_1 - t_2 - \dots) B + t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots$"

  $\iff$ "$X = t_0 B + t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots$",

  kde $\boxed{t_0 + t_1 + t_2 + \dots = 1}$!

  "AFINNÍ KOMBINACE BODŮ"

  $t_0, t_1, t_2, \dots$ BARYCENTRICKÉ souřadnice ...

  (viz dále: těžiště, konvexní obaly, ...)

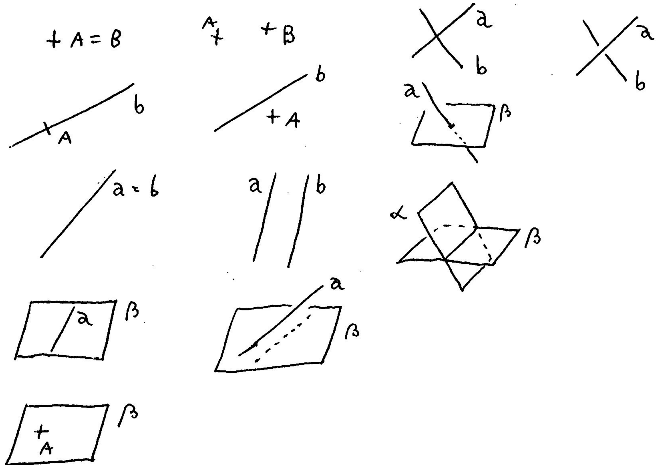
- Ve spec. případech se užívají další výhodná vyjádření ...

  (např. nadroviny, přímky)

  (např. úsekové rovnice, Plückerovy souřadnice, ...)

VZÁJEMNÉ POLOHY AF. PODPR.

- průniky, součty a af. obaly
- vzájemné polohy
- postřehy, dodatky



PRŮNIK A SOUČET

- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \leq \mathcal{A}$ ... af. podprostory, $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \leq \vec{\mathcal{A}}$ ... zaměření

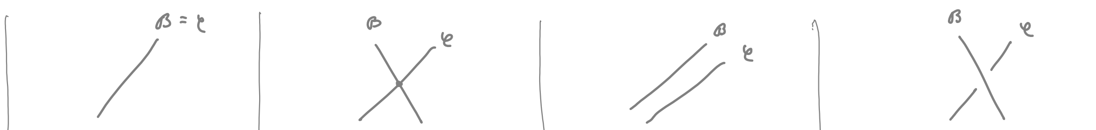
- PRŮNIK $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ je buď $\emptyset$,
  nebo af. podprostor
  se zaměřením $\overrightarrow{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$.

- SJEDNOCENÍ $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ může a nemusí být af. podprostor.

- SOUČET $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ = AFINNÍ OBAL $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$
  = nejmenší AFINNÍ podprostor obsahující $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

- ZAMĚŘENÍ $\overrightarrow{\mathcal{B} + \mathcal{C}}$ může a nemusí být rovno $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ ...

Všechno to NĚJAK souvisí se vzájemnými polohami podpr...



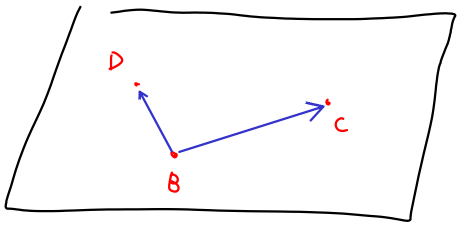
$\dim \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$	1	0	–	–
$\dim \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$	1	0	1	0
$\dim \mathcal{B} + \mathcal{C}$	1	2	2	3
$\dim \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$	1	2	1	2

POZNÁMKA

- Body $\overset{k}{B, C, D, \dots}$ jsou v OBECNÉ POLOZE

$\Longleftrightarrow$ vektory $\overset{k-1}{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \dots}$ jsou lin. NEZÁVISLÉ

$\Longleftrightarrow$ dim součtu $B + C + D + \dots$ je MAX. možná. $k-1$



součet $B+C+D = \{ B + r\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BD} \mid r, s \in \mathbb{R} \}$

$= \{ \text{"}t_0 B + t_1 C + t_2 D\text{"} \mid t_0 + t_1 + t_2 = 1 \}$

B, C, D v OBECNÉ POLOZE $\Longleftrightarrow$ parametry určeny JEDNOZNAČNĚ.

OBECNÁ SOUVISLOST

- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ ... af. podprostory, $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{A}}$ ... zaměření

- Platí

$$\boxed{\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \overset{!}{\iff} \overrightarrow{\mathcal{B} + \mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} \iff \overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} \quad \text{pro lib. } B \in \mathcal{B} \text{ a } C \in \mathcal{C}.}$$

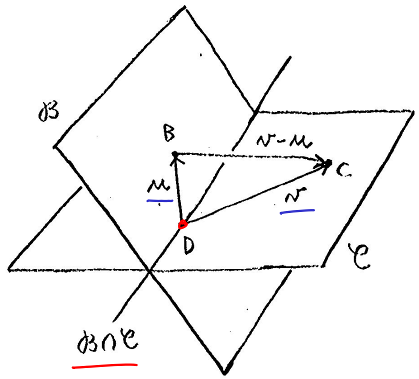
- Důkaz:

(a) $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$

$\Longrightarrow$ ex. D : $D \in \mathcal{B}$ a $D \in \mathcal{C}$

$\Longrightarrow$ $\overrightarrow{DB} \in \vec{\mathcal{B}}$ a $\overrightarrow{DC} \in \vec{\mathcal{C}}$ ...

$\Longrightarrow$ $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ ...



(b) $\overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ ...

$\Longrightarrow$ $\overrightarrow{BC} = C - B = u + v$, kde $u \in \vec{\mathcal{B}}$ a $v \in \vec{\mathcal{C}}$

$\Longrightarrow$ $\underbrace{C - v}_{\mathcal{C}} = \underbrace{B + u}_{\mathcal{B}}$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

POČETNÍ SOUVISLOST

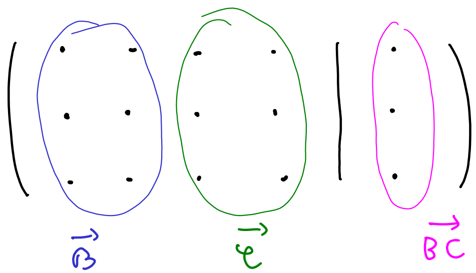
- $\mathcal{B} = \{ B + t_1 u_1 + \dots \}$, $\quad \mathcal{C} = \{ C + s_1 v_1 + \dots \}$

- $D \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \iff D = B + t_1 u_1 + \dots = C + s_1 v_1 + \dots$

$$\Updownarrow$$

$$t_1 u_1 + \dots - s_1 v_1 - \dots = C - B$$

$$\Updownarrow$$



- $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \iff$ soustava má řešení $\iff$

$\iff \overrightarrow{BC}$ = lin. kombinace $u_1, \dots, v_1, \dots \iff$

$\iff \overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$

VZÁJEMNÉ POLOHY

- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ ... af. podprostory, $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{A}}$ ... zaměření

- Obecné definice:

  předp. $\dim \mathcal{B} \leq \dim \mathcal{C}$

  - INCIDENTNÍ $\quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ ... tj. $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{B}$ = max. možný
  - RŮZNOBĚŽNÉ $\quad \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ ... pokud $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, ale NE max. možný
  - ROVNOBĚŽNÉ $\quad \mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$ ... pokud $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ a $\boxed{\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}}$
  - MIMOBĚŽNÉ $\quad \mathcal{B} \not\times \mathcal{C}$ ... jinak (tj. $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ a $\vec{\mathcal{B}} \not\subseteq \vec{\mathcal{C}}$)

- Poznámka:

  - $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \iff \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{B}$ = max.
  - $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}} \iff \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}}$ = max.

- Přehledně:

$\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ \ $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$	je max	není max
není $\emptyset$	$\subseteq$	$\times$
je $\emptyset$	$\parallel$	$\not\times$

POČETNÍ SOUVISLOSTI

- $\mathcal{B} = \{ B + t_1 u_1 + \dots \}$; $\mathcal{C} = \{ C + s_1 v_1 + \dots \}$

- $\underline{D \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}}$

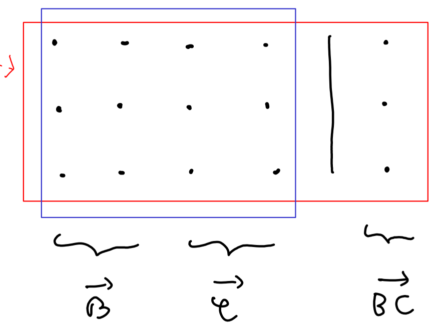
$$D = B + t_1 u_1 + \dots \overset{?}{=} C + s_1 v_1 + \dots$$

$$t_1 u_1 + \dots - s_1 v_1 - \dots \overset{?}{=} C - B$$

- $\underline{w \in \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}}$

$$w = t_1 u_1 + \dots \overset{?}{=} s_1 v_1 + \dots$$

$$t_1 u_1 + \dots - s_1 v_1 - \dots \overset{?}{=} 0$$



- ozn:

$m = \max\{\dim \vec{\mathcal{B}}, \dim \vec{\mathcal{C}}\}$

$n = \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}) = \text{hodnost } \square$

$o = \dim(\overrightarrow{\mathcal{B} + \mathcal{C}}) =$

$\quad = \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} + \vec{BC}) = \text{hodnost } \square$

- zřejmě $m \leq n \leq o$

- přičemž $m = n \iff \vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}$ či $\vec{\mathcal{B}} \supseteq \vec{\mathcal{C}}$

$\qquad n = o \iff \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$

- TEDY:

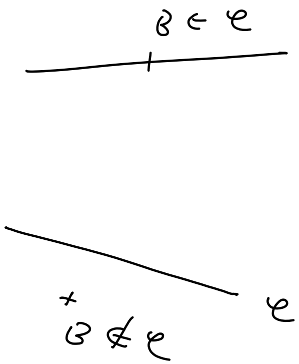
$\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$ / $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$	$m = n$	$m < n$
	je max	není max
$n = o$: není $\emptyset$	$\subseteq$	✕
$n < o$: je $\emptyset$	//	✕

POZNÁMKY

- Předchozí OBECNÉ definice zahrnují jisté TRIVIÁLNÍ případy:

$\mathcal{B}$ = bod, $\mathcal{C}$ = cokoli ... buď INCIDENTNÍ

nebo ROVNOBĚŽNÉ ⇝



- Mezi všemi polohami,

MIMOBĚŽNOST potřebuje "nejvíc místa"...

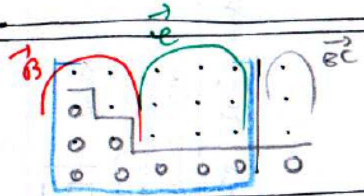
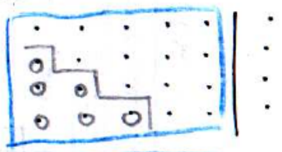
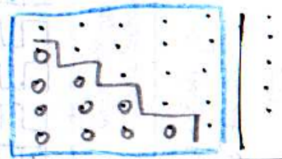
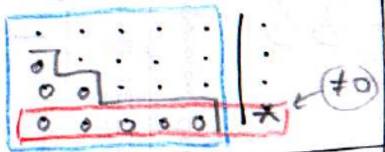
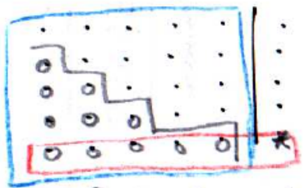
- Pokud je místa "opravdu hodně", může se stát, že $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$ je netriv. (ex. společné vektory)

⇝ ČÁSTEČNĚ ROVNOBĚŽNÉ

PŘÍKLAD

$\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$

dim 2 dim 3 dim $\underline{N}$

SOUSTAVA (*)	ŘEŠENÍ ($\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$)	VZÁJEMNÁ	POLOHA
	∞^2 (rovina)	$\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$	$N \geq 3$
	∞^1 (přímka)	$\mathcal{B} \times \mathcal{C}$	$N \geq 4$
	1 (bod)	$\mathcal{B} \times \mathcal{C}$	$N \geq 5$
	0	$\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$	$N \geq 4$
	0	$\mathcal{B} \not\times \mathcal{C}$	$\underline{\underline{N \geq 5}}$

↑ hodnost □ nemůže být < 3 = dim $\mathcal{C}$

"kolik místa potřeba"

OBECNĚ $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$

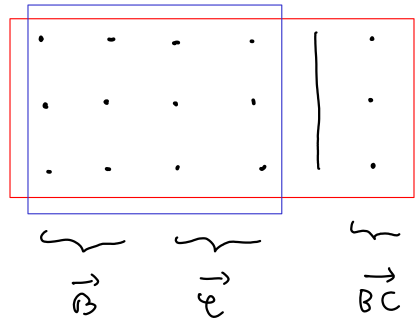
- ozn:

  $m = \max\{\dim \vec{\mathcal{B}}, \dim \vec{\mathcal{C}}\}$

  $n = \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}})$

  $o = \dim(\overrightarrow{\mathcal{B}+\mathcal{C}}) = \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} + \overrightarrow{BC})$

  $N = \dim \mathcal{A}$



- zřejmě $m \leq n \leq o \leq N$ ...

- Platí

  - Předp. $\mathcal{B} \nparallel \mathcal{C}$

    $\Longrightarrow m < n < o \leq N$

    $\Longrightarrow m \leq N - 2$.

  - Zejména NADROVINA nemůže být s ničím mimoběžná.

  - Předp. $\vec{\mathcal{B}}$ a $\vec{\mathcal{C}}$ KOMPLEMENTÁRNÍ

    $\Longrightarrow n = o = N$ a $\overrightarrow{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} = \{0\}$

    $\Longrightarrow \mathcal{B} \cap \mathcal{C} =$ BOD.

  - Apod.

SHRNUTÍ

- VZÁJEMNÉ POLOHY obecně pomocí
  - inkluzí $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}$
  - průniků $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$
  - součtů $\mathcal{B} + \mathcal{C}$, $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$

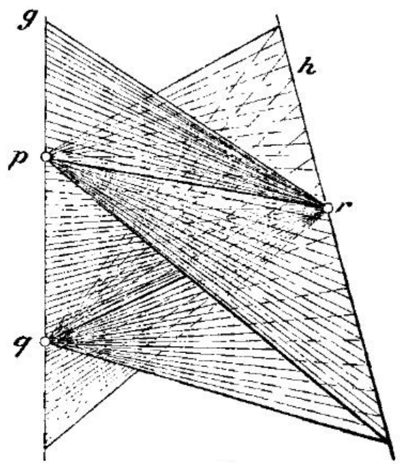
$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \iff \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{B} \iff \mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$$

- početně vidíme vše NARÁZ

- některé polohy vyžadují více MÍSTA než jiné

PŘÍČKY

- příčky
- příčky s podmínkou
- příčkové plochy

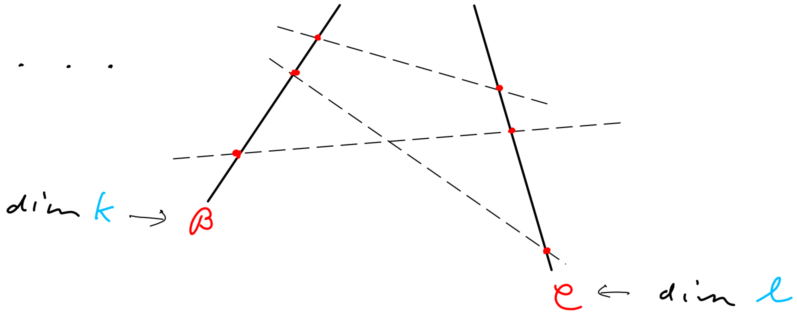


PŘÍČKY

- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ ... af. podprostory — příp. jiné podmnožiny

- PŘÍČKA $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ = přímka (příp. úsečka) různoběžná jak s $\mathcal{B}$, tak s $\mathcal{C}$

  ... celkem $k+l$ volných parametrů ...



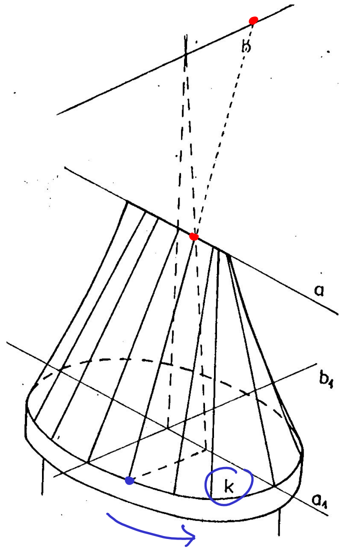
- Typická omezení:
  - příčka procházející daným BODEM
  - příčka rovnoběžná s daným SMĚREM

  ⇝ genericky JEDNA

  - NEJKRATŠÍ příčka ⇝ VZDÁLENOST

- Typická uplatnění:
  - proměnná omezující podmínka

    ⇝ PŘÍMKOVÉ PLOCHY ...



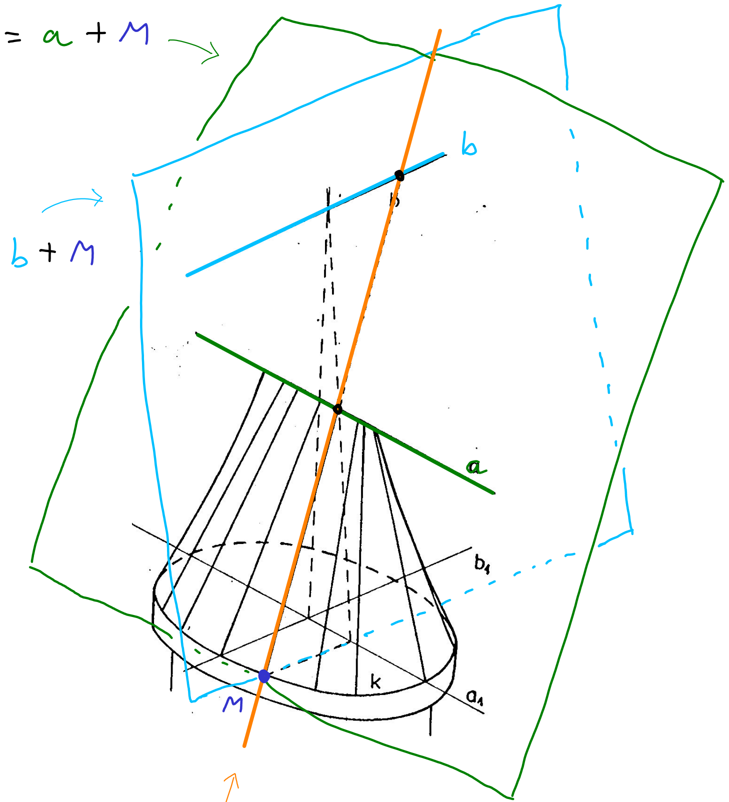
PŘÍČKY

• Typická řešení

(a) průnik NADPROSTORŮ:

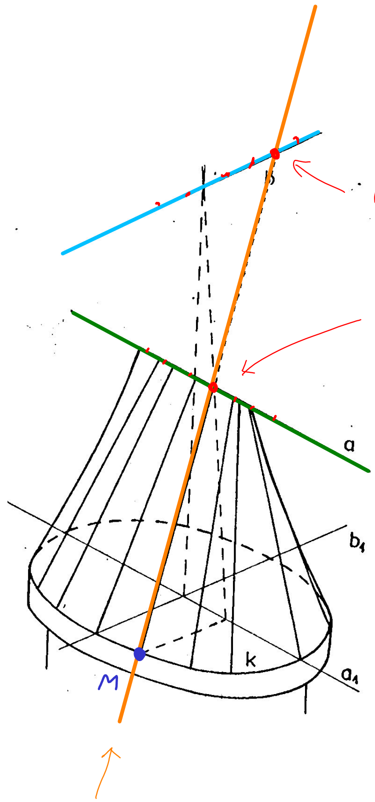
$\alpha = a + M$

$\beta = b + M$



$\boxed{p = \alpha \cap \beta}$

(b) spojnice KONCOVÝCH BODŮ:



$B \in b$

$A \in a$

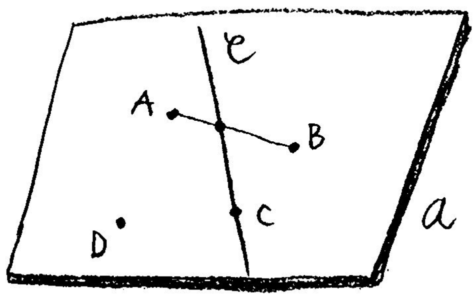
tak, aby A, B, M kolin.

tj. $\boxed{\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}}$

$p = A + B$

USPOŘÁDÁNÍ A POD.

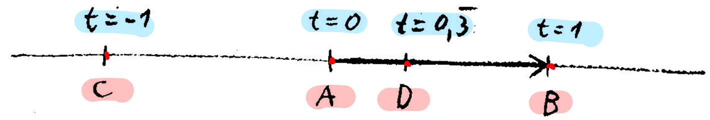
- uspořádání bodů na přímce, ÚSEČKA
- POLOprostory a jejich průniky
- KONVEXNÍ množiny a obaly
- poznámky k vyjádření



USPOŘÁDÁNÍ

- {body na afinní přímce} $\xleftrightarrow{1:1}$ {reálná čísla}

  viz parametrizaci $\{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}$ . . .



- USPOŘÁDÁNÍ na $\mathbb{R}$ ⇝ USPOŘÁDÁNÍ na přímce

  $0 \le \frac{1}{3}$ ⇝ "$A \le D$" apod.

- V závislosti na parametrizaci máme dvě možná uspořádání

  buď "$A \le D \le B$" nebo "$A \ge D \ge B$"

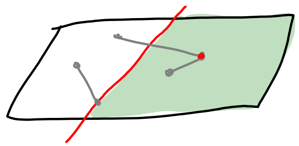
- Nezávisle na parametrizaci máme relaci MEZI!

  "D je mezi A a B", pokud "$A \le D \le B$" nebo "$A \ge D \ge B$"

- ÚSEČKA AB = {body na přímce AB, které jsou MEZI A a B}

  tj. včetně krajních bodů

POLOPROSTORY

- polopřímka 
- polorovina 

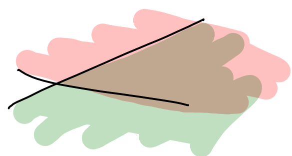
⋮

OBECNĚ

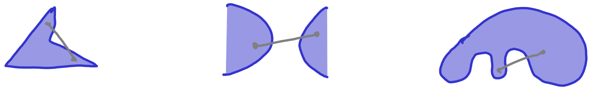
- NADrovina $\mathcal{N}$ af. prostoru $\mathcal{A}$ určuje dva POLOPROSTORY:
- Body A a B v OPAČNÝCH poloprostorech vzhledem k $\mathcal{N}$, pokud průnik $AB \cap \mathcal{N}$ je vnitřním bodem ÚSEČKY AB.
- POLOPROSTOR je určen hraniční NADROVINOU $\mathcal{N}$ a BODEM $B \notin \mathcal{N}$,
- hraniční NADrovina patří do obou poloprostorů, ...

ODVOZENÉ VĚCI

- PRŮNIKY poloprostorů $\rightsquigarrow$ ÚHEL, TROJÚHELNÍK, ...



KONVEXNÍ MNOŽINY

- ANO :  . . .
- NE :  . . .

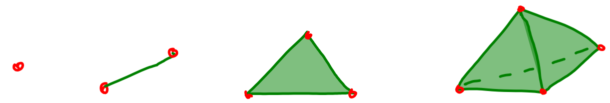
OBECNĚ:

- Podmnožina $K \subseteq \mathcal{A}$ je **KONVEXNÍ**, pokud pro lib. $A, B \in K$ také celá úsečka AB leží v K.

JAKO OBVYKLE:

- PRŮNIK konvexních množin je buď $\emptyset$, nebo konvexní.
- SJEDNOCENÍ konvexních množin může a nemusí být konvexní.
- **KONVEXNÍ OBAL** množiny $M \subseteq \mathcal{A}$ = nejmenší KONVEXNÍ množina obsahující M.

SIMPLEXY A VYJÁDŘENÍ



SIMPLEXY ≈ nejjednodušší konvexní množiny

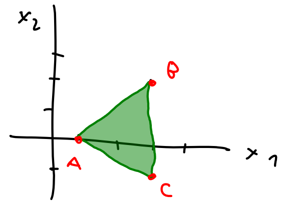
= konvexní obaly BODŮ v obecné poloze

VYJÁDŘENÍ .... pomocí **nerovností** :

- parametricky .... $\triangle ABC = \left\{ A + t\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC} \;\middle|\; \boxed{\begin{array}{l} 0 \le t \le 1 \\ 0 \le s \le 1 \\ 0 \le t+s \le 1 \end{array}} \right\}$

- afinní kombinace .... $\triangle ABC = \left\{ t_0 A + t_1 B + t_2 C \;\middle|\; \boxed{\begin{array}{c} t_0 + t_1 + t_2 = 1 \\ 0 \le t_0, t_1, t_2 \le 1 \end{array}} \right\}$

- rovnicově .... $\triangle ABC = \left\{ \boxed{\begin{array}{r} x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \ge 1 \end{array}} \right\}$

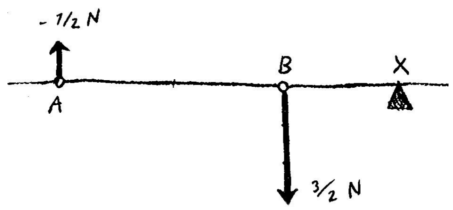


POZNÁMKY :

- SIMPLEX = průnik poloprostorů v rámci af. obalu bodů.
- NEJšikovnější vyjádření = afinní kombinace . . . .

TĚŽIŠTĚ A POD.

- jiný pohled na af. kombinace bodů
- těžiště a těžišťové (= barycentrické) souřadnice
- typické užití a poznámky



AFINNÍ KOMBINACE JINAK

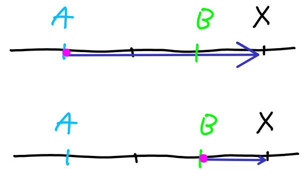
$\boxed{t_0 + t_1 = 1}$!

- Známe:

$$X = \overset{t_0}{-\tfrac{1}{2}} A + \overset{t_1}{\tfrac{3}{2}} B$$

$$= \underline{\left(1 - \tfrac{3}{2}\right)} A + \tfrac{3}{2} B = A + \tfrac{3}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$= -\tfrac{1}{2} A + \underline{\left(1 + \tfrac{1}{2}\right)} B = B - \tfrac{1}{2} \overrightarrow{BA}$$



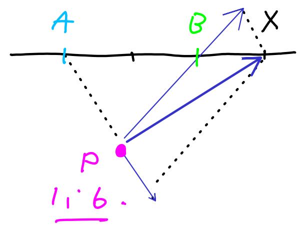
← obvyklé PARAMETRIZACE bodů na přímce

- Obecněji:

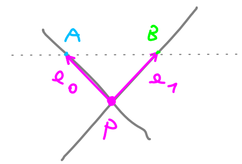
$$X = -\tfrac{1}{2} A + \tfrac{3}{2} B$$

$$= -\tfrac{1}{2} \left(P + \overrightarrow{PA}\right) + \tfrac{3}{2} \left(P + \overrightarrow{PB}\right)$$

$$= \underbrace{\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\right)}_{1} P - \tfrac{1}{2} \overrightarrow{PA} + \tfrac{3}{2} \overrightarrow{PB}$$



← přímka $t_0 + t_1 = 1$ v SOUŘADNICÍCH:

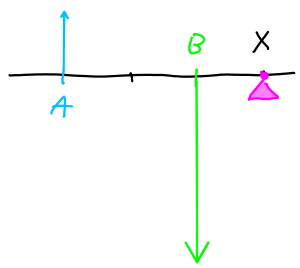


- Rovnováha:

$$X = -\tfrac{1}{2} A + \tfrac{3}{2} B$$

$$\underbrace{\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\right)}_{1} X = -\tfrac{1}{2} A + \tfrac{3}{2} B$$

$$0 = -\tfrac{1}{2} \overrightarrow{XA} + \tfrac{3}{2} \overrightarrow{XB}$$



← těžiště HMOTNÉ SOUSTAVY:

PŘEHLEDNĚ

- AFINNÍ KOMBINACE BODŮ:

$t_A A + t_B B$

$t_A + t_B = 1$

t_A	…	2	$3/2$	1	$1/2$	0	$-1/2$	-1	$-3/2$
t_B	…	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$
				A		B			

$$\text{Přímka } AB = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1 \}$$

$$\text{Polopřímka } AB = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1,\ t_B \geq 0 \}$$

$$\text{Polopřímka } BA = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1,\ t_A \geq 0 \}$$

$$\text{Úsečka } AB = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1,\ t_A \geq 0,\ t_B \geq 0 \}$$

- BODOVÉ HMOTNÉ SOUSTAVY:

váhy

$m_A + m_B \neq 0$ $\quad A(m_A) \quad B(m_B) \quad T(m_A + m_B)$

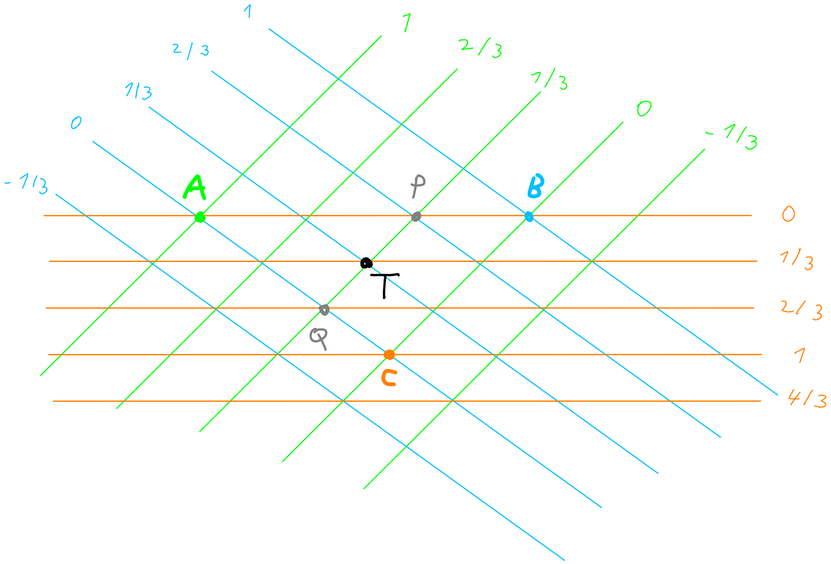
$$T = \text{těžiště, pokud } m_A \overrightarrow{TA} + m_B \overrightarrow{TB} = 0,$$

$$\text{tj. } T = \frac{m_A}{m_A + m_B} A + \frac{m_B}{m_A + m_B} B$$

barycentrické souřadnice

VÍC BODŮ

- AFINNÍ KOMBINACE BODŮ:



$$P = \tfrac{1}{3} A + \tfrac{2}{3} B$$

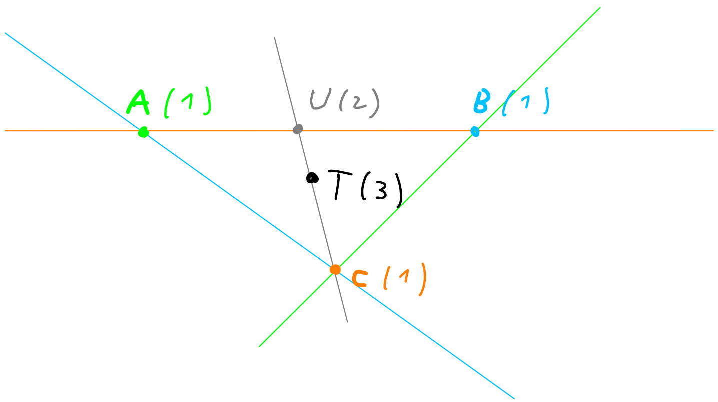
$$Q = \tfrac{1}{3} A + \tfrac{2}{3} C$$

$$T = \tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2} Q$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3} A + \tfrac{2}{3} B + \tfrac{1}{3} A + \tfrac{2}{3} C\right)$$

$$= \tfrac{1}{3} A + \tfrac{1}{3} B + \tfrac{1}{3} C$$

- BODOVÉ HMOTNÉ SOUSTAVY:



$$U = \frac{1}{1+1} A + \frac{1}{1+1} B \qquad \text{tj.}\quad 1\,\overrightarrow{UA} + 1\,\overrightarrow{UB} = 0$$

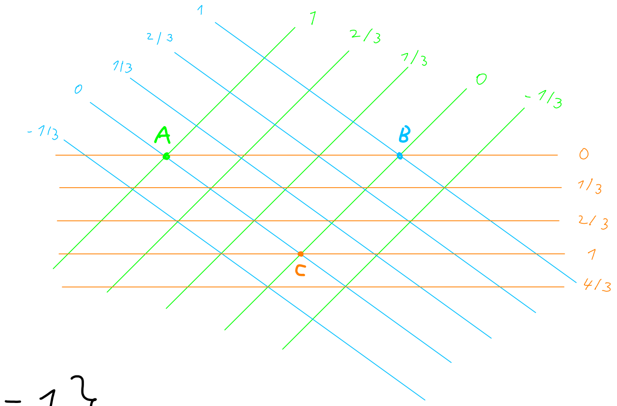
$$= \tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} B$$

$$T = \frac{2}{1+2} U + \frac{1}{1+2} C \qquad \text{tj.}\quad 2\,\overrightarrow{TU} + 1\,\overrightarrow{TC} = 0$$

$$= \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} B\right) + \tfrac{1}{3} C$$

$$= \tfrac{1}{3} A + \tfrac{1}{3} B + \tfrac{1}{3} C \qquad \text{tj.}\quad 1\,\overrightarrow{TA} + 1\,\overrightarrow{TB} + 1\,\overrightarrow{TC} = 0$$

VÍC BODŮ – PŘEHLEDNĚ



- AFINNÍ KOMBINACE BODŮ :

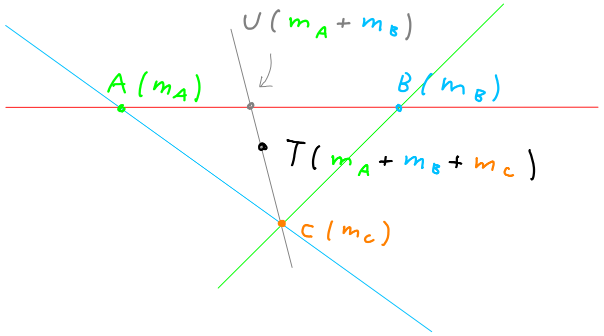
$$\text{Rovina } ABC = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1 \}$$

$$\text{Polorovina } AB + C = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1,\ t_C \geq 0 \}$$

$$\text{Úhel } ABC = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1,\ t_A \geq 0,\ t_C \geq 0 \}$$

$$\text{Trojúhelník } ABC = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1,\ t_A \geq 0,\ t_B \geq 0,\ t_C \geq 0 \}$$

- BODOVÉ HMOTNÉ SOUSTAVY :



$$U = \frac{m_A}{m_A+m_B} A + \frac{m_B}{m_A+m_B} B \qquad \text{tj. } m_A \overrightarrow{UA} + m_B \overrightarrow{UB} = 0$$

$$T = \frac{m_A+m_B}{m_A+m_B+m_C} U + \frac{m_C}{m_A+m_B+m_C} C = \dots \qquad \text{tj. } (m_A+m_B)\overrightarrow{TU} + m_C \overrightarrow{TC} = 0$$

$$= \frac{m_A}{m_A+m_B+m_C} A + \frac{m_B}{m_A+m_B+m_C} B + \frac{m_C}{m_A+m_B+m_C} C \qquad \text{tj. } m_A \overrightarrow{TA} + m_B \overrightarrow{TB} + m_C \overrightarrow{TC} = 0$$

OBECNĚ

- $\mathcal{a}$ = afinní prostor, $\mathcal{B}$ = afinní obal $\{A_0, \dots, A_k\}$,
  kde $\{A_0, \dots, A_k\}$ = množina bodů v OBECNÉ poloze.

- BARYCENTRICKÉ souřadnice bodu $X \in \mathcal{B}$ vzhledem k $(A_0, \dots, A_k)$
  = souřadnice vektoru $\overrightarrow{PX}$ vzhledem k BÁZI $(\overrightarrow{PA_0}, \dots, \overrightarrow{PA_k})$,
  kde $P \notin \mathcal{B}$ lib...

  ... píšeme "$X = t_0 A_0 + \dots + t_k A_k$", kde NUTNĚ $\boxed{t_0 + \dots + t_k = 1}$!

  viz s. 41, 62

- $\{B_1, \dots, B_\ell\}$ = množina bodů $\subset \mathcal{a}$,
  $\{m_1, \dots, m_k\}$ = množina VAH $\subset \mathbb{R}$, $m_1 + \dots + m_\ell \neq 0$.

- T = TĚŽIŠTĚ bodové hmotné soustavy $\{B_1(m_1), \dots, B_\ell(m_\ell)\}$,
  pokud $\boxed{m_1 \overrightarrow{TB_1} + \dots + m_\ell \overrightarrow{TB_\ell} = 0}$.

  viz s. 63, 65 + INDUKCE

- PLATÍ

$$\boxed{T = \text{těžiště} \ -\text{"}- \iff T = t_1 B_1 + \dots + t_\ell B_\ell, \quad \text{kde } t_i = \frac{m_i}{m_1 + \dots + m_\ell}.}$$

OBECNĚ

- $\mathcal{A}$ = afinní prostor, $\mathcal{B}$ = afinní obal $\{A_0, \dots, A_k\}$, kde $\{A_0, \dots, A_k\}$ = množina bodů v OBECNÉ poloze.

- PLATÍ

$$\mathcal{B} = \text{af. obal } \{A_0, \dots, A_k\} = \{ t_0 A_0 + \dots + t_k A_k \mid t_0 + \dots + t_k = 1 \}$$

Poloprostor $\mathcal{B}$ určený A_0 a hranicí obs. $\{A_1, \dots, A_k\}$ =

$$= \mathcal{B} \cap \{ t_0 \geq 0 \}$$

$$\text{konvexní obal } \{A_0, \dots, A_k\} = \mathcal{B} \cap \{ t_0 \geq 0 \} \cap \dots \cap \{ t_k \geq 0 \}$$

viz s. 41, 63, 65
+ INDUKCE

- HLAVNĚ

zobrazení $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ je AFINNÍ

$\Longleftrightarrow$ zachovává AFINNÍ KOMBINACE bodů

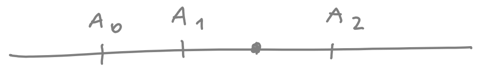
$\Longleftrightarrow$ zachovává BARYCENTRICKÉ souř.

$\Longleftrightarrow$ zachovává TĚŽIŠTĚ bodových hmotných soustav.

viz definice s. 32–33, 41, 66

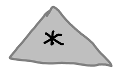
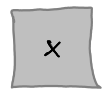
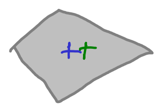
POZNÁMKY

- Pokud $\{A_0, \dots, A_k\}$ NEJSOU v obecné poloze, pak "souřadnice" $X = t_0 A_0 + \dots + t_k A_k \in \mathcal{B}$ NEJSOU určeny **jednoznačně**...

  např. 

  $X = -A_0 + 2A_1 = \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_2 = \dots$

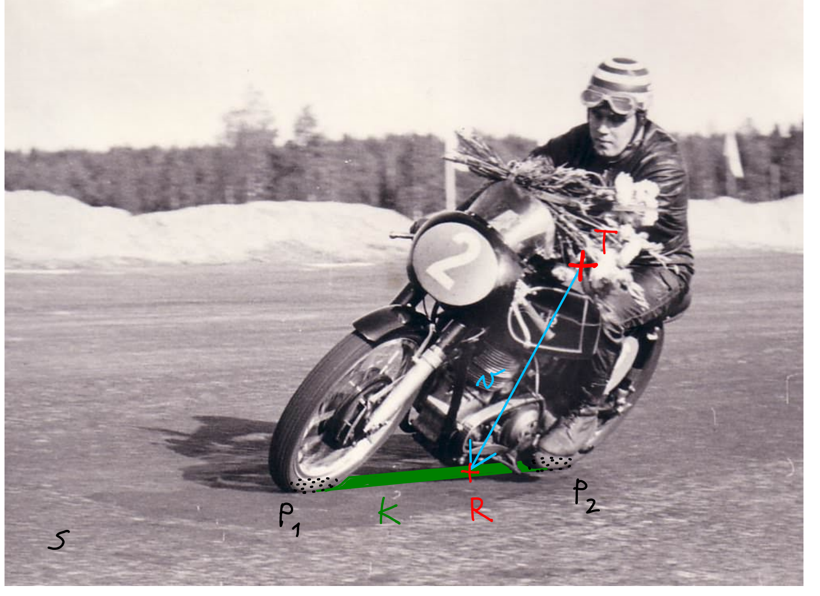
- ... nicméně mnohé z předchozího má stále DOBRÝ VÝZNAM!

- TĚŽIŠTĚ bodové hmotné soustavy se STEJNÝMI VAHAMI
  - může, body v OBECNÉ poloze , SYMETRICKÉ věci  a pod.
  - ale **NEMUSÍ**, např. DELTOID 

  být totéž co TĚŽIŠTĚ konvexního obalu bodů!

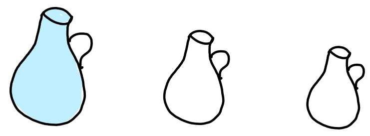
PŘÍKLAD — PROBLÉM STABILITY

- Hmotná soustava je STABILNÍ ...



... pokud průmět (R)
těžiště (T) hmotné soustavy
ve směru výslednice (v) všech působících sil
do opěrné roviny (S)
leží v konvexním obalu (K)
opěrných prvků ($P_1 \cup P_2$).

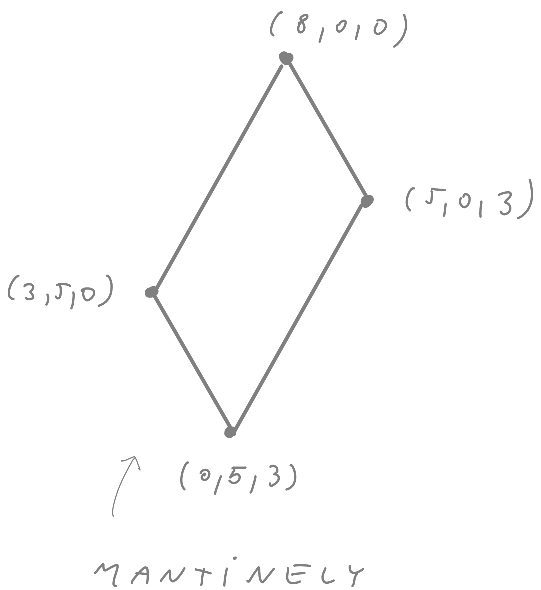
PŘÍKLAD — PROBLÉM TŘÍ DŽBÁNŮ

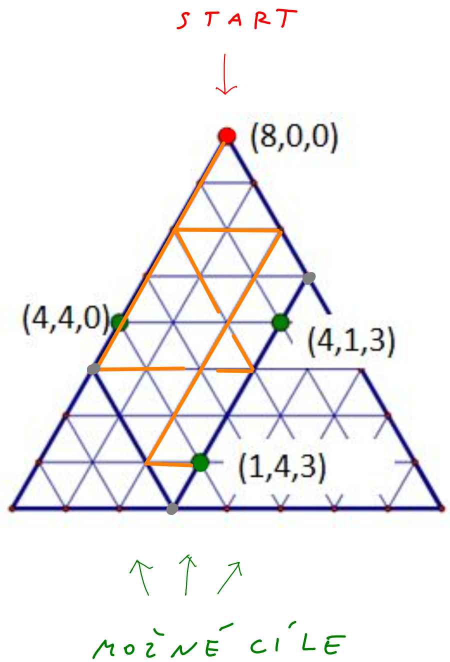


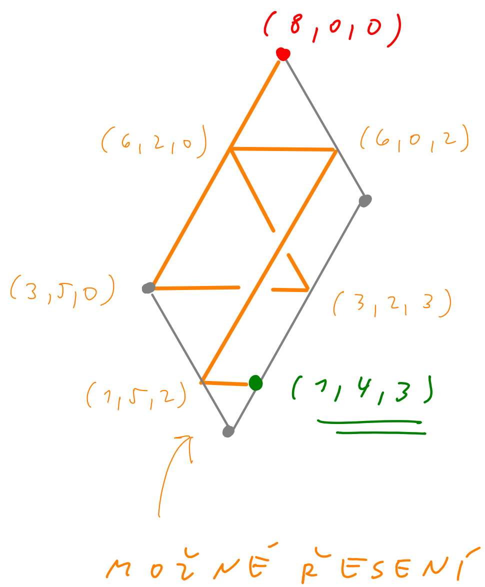
- UMÍME: přeléváním zcela naplnit (polo)prázdné nádoby.
- CHCEME: přesně 4 l.

- POSTŘEH: součet vody v nádobách je pořád STEJNÝ!

- MOŽNÉ ŘEŠENÍ:







SHRNUTÍ

af. přímka reálná čísla

- ztotožnění ——— $\cong \mathbb{R}$

  $\rightsquigarrow$ uspořádání, ÚSEČKA, POLO-prostor, KONVEXNÍ množina

- k popisu předchozích omezení se hodí afinní KOMBINACE bodů

- afinní kombinace bodů souvisí s TĚŽIŠTI

- těžiště soustavy HMOTNÝCH BODŮ
  obecně NENÍ totéž co
  těžiště jejich KONVEXNÍHO OBALU

- předchozí věci se zachovávají při AFINNÍCH zobrazeních …
  … některé charakterizují af. zobr. ÚPLNĚ

  af. kombinace / baryc. souřadnice

AFINNÍ GEOMETRIE PŘEHLEDNĚ

- Všechno děláme "algebraicky"...

  těleso $\mathbb{R}$ ⇝ vektorový prostor V ⇝ afinní prostor $\mathcal{A}$

  ... v souladu s elem. geom. představami!

Úvodní věci

- OBECNÉ af. (pod-)prostory, typické PŘÍKLADY
- af. souřadnice a af. ZOBRAZENÍ

Další věci

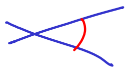
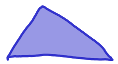
- jeden podpr. .... způsoby VYJÁDŘENÍ
- dva podpr. .... vzájemné POLOHY
- více podpr. .... PŘÍČKY
- omezené podpr. .... úsečky, KONVEXNÍ obaly

Souvislosti

- af. KOMBINACE a BARYCENTRICKÉ souřadnice
- podstatné INVARIANTY af. zobr. a ZÁKLADNÍ věta

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

TYPICKÉ EUKL. POJMY ...

- SHODNOST, podobnost
- vzdálenost 
- odchylka 
- obsah / objem 

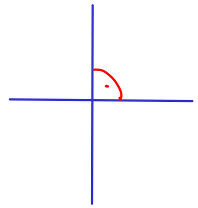
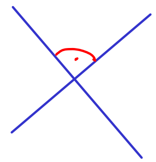
TYPICKÉ PROVEDENÍ

- obecné eukl. prostory, shodná zobrazení
- $\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{vzdálenost}\\ \bullet\ \text{odchylka}\end{array}\right\}$ ob. podprostorů
- objemy rovnoběžnostěnů, simplexů
- algebraické konstrukce a souvislosti

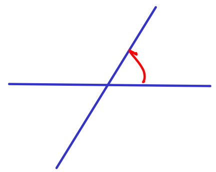
OPAKOVÁNÍ

SHODNOST POMOCÍ ...

- AXIÓMŮ

 $\cong$ 

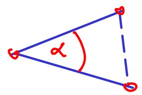
- MĚŘENÍ

 $\longrightarrow \mathbb{R}$

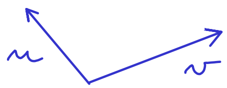
MĚŘENÍ POMOCÍ ...

- (správné) METRIKY

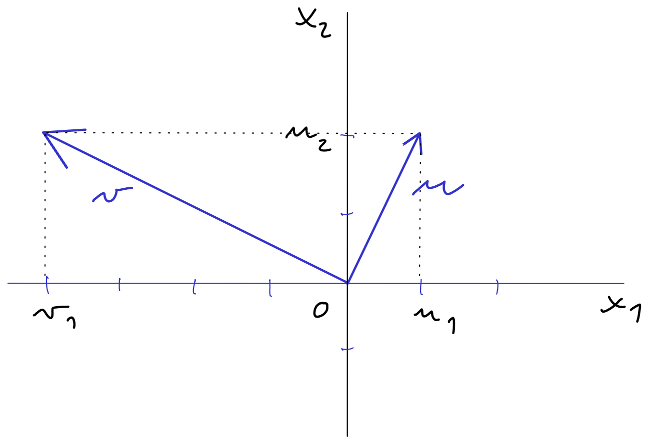
 $\longrightarrow |AB| \in \mathbb{R}$

 $\longrightarrow \cos\alpha \in \mathbb{R}$

- SKALÁRNÍHO SOUČINU

 $\longrightarrow u \cdot v \in \mathbb{R}$

SKALÁRNÍ SOUČIN konzumně



• skalární součin vektorů

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots \in \mathbb{R}$$

pythagorova věta

• NORMA (velikost)

$$\| u \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots} = \sqrt{u \cdot u}$$

• KOLMOST

$$u \perp v \iff u \cdot v = 0 \longleftrightarrow \text{podobné } \triangle$$

• ODCHYLKA

$$\sphericalangle(u, v) = \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \longleftrightarrow \text{kosinová věta}$$

SKALÁRNÍ SOUČIN pořádně

... na vektorovém prostoru V

= přiřazení $V \times V \to \mathbb{R}$, které je

- SYMETRICKÉ — tj. $u \cdot v = v \cdot u$
- BI-LINEÁRNÍ — tj. lineární v OBOU složkách
- POZITIVNĚ DEFINITNÍ — tj. $u \neq 0 \Rightarrow u \cdot u > 0$

- Předchozí souř. vyjádření $\Longleftrightarrow$ báze ORTO-NORMÁLNÍ!

  tj. $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \dots i = j \\ 0 & \dots i \neq j \end{cases}$

- souř. vyjádření OBECNĚ:

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots, \quad v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots$$

$$u \cdot v = u_1 v_1 (e_1 \cdot e_1) + u_1 v_2 (e_1 \cdot e_2) + \dots$$
$$+ u_2 v_1 (e_2 \cdot e_1) + u_2 v_2 (e_2 \cdot e_2) + \dots = (u_1, u_2, \dots) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & \dots \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ZÁKLADNÍ NEROVNOSTI

- POZ. DEFINITNOST

$\boxed{u \cdot u \geq 0}$ přičemž $\boxed{=}$, právě když $\boxed{u = 0}$

$$\Downarrow$$

- CAUCHYHO-SCHWARZOVA NEROVNOST

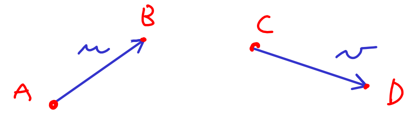
$\boxed{|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|}$ přičemž $\boxed{=}$, právě když $\boxed{u \propto v}$

$$\Downarrow$$

- TROJÚHELNÍKOVÁ NEROVNOST

$\boxed{\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|}$ přičemž $\boxed{=}$, pouze když $\boxed{u \propto v}$

SHODNOST ÚSEČEK



- $AB \cong CD$, pokud $|AB| = |CD|$, přičemž ...

... $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{R}$

$A, B \longmapsto u = \overrightarrow{AB} \longmapsto \boxed{|AB| = \|u\| = \sqrt{u \cdot u}}$ ... **VZDÁLENOST A, B**

- Toto přiřazení = **EUKLEIDOVSKÁ METRIKA**, přičemž ...

... (obecná) METRIKA:

a) $|AB| \geqq 0$

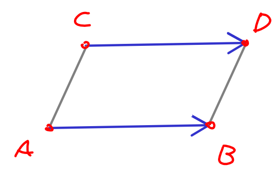
b) $|AB| = 0 \iff A = B$

c) $|AB| = |BA|$

d) $|AC| \leqq |AB| + |BC|$

... EUKLEIDOVSKÁ = kompatibilní s AFINNÍ strukturou, tj.

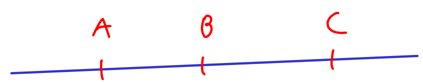
e) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies |AB| = |CD|$



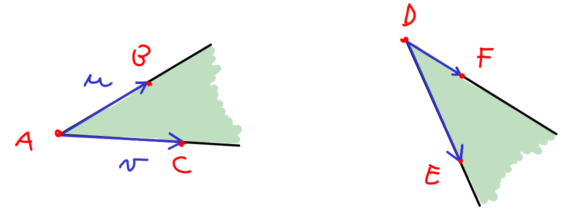
- **KOLINEÁRNOST a USPOŘÁDÁNÍ bodů na přímce**

pomocí METRIKY:

B mezi A a C $\iff |AC| = |AB| + |BC|$



SHODNOST ÚHLŮ



- $\angle BAC \cong \angle EDF$, pokud $|\angle BAC| = |\angle EDF|$, přičemž ...

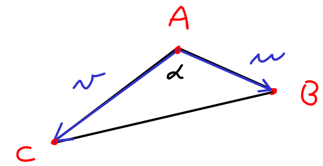
  ... $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow V \times V \longrightarrow [-1, 1] \longrightarrow [180°, 0°]$

  $$B, A, C \longmapsto u = \overrightarrow{AB},\ v = \overrightarrow{AC} \longmapsto \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|} \longmapsto \boxed{\arccos \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|} = |\angle BAC|}$$

  ... **ODCHYLKA** $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$

- Toto přiřazení je vskutku DOBŘE def!
- $\angle(u, v) = 90° \iff u \bullet v = 0$

- **ODCHYLKA** pomocí METRIKY a KOSINOVÉ VĚTY:



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha}$$

$$\left.\begin{aligned} L &= \|u - v\|^2 = \dots = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\, u \bullet v \\ P &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\, \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \boxed{u \bullet v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha}$$

SHRNUTÍ / PLÁN

- skalární součin stačí na VŠECHNO!

- EUKLEIDOVSKÝ PROSTOR $\mathcal{E}$

  = afinní prostor se skalárním součinem na zaměření $V = \vec{\mathcal{E}}$

- Eukleidovský podprostor $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$

  = podmnožina, která je eukleidovským prostorem …

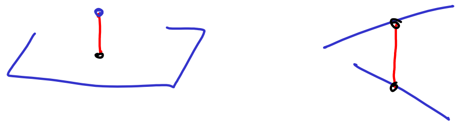
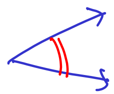
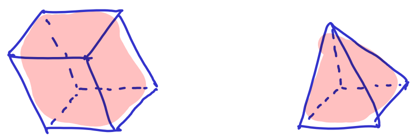
  = afinní podprostor se zúženým skal. součinem na $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{E}}$

- Relevantní zobrazení $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ v rámci AFINNÍCH:

f je SHODNÉ	$\iff$	$\vec{f}$ zachovává SKALÁRNÍ SOUČIN
f je PODOBNÉ	$\iff$	$\vec{f}$ — // — až na NÁSOBEK
f je EKVIAFINNÍ	$\iff$	… nějaké DETERMINANTY …

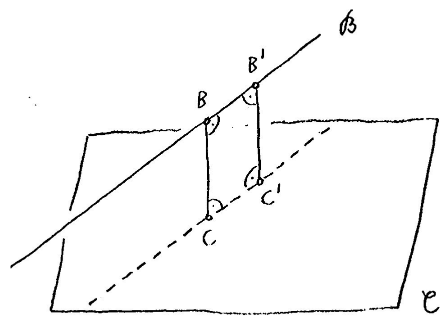
detaily s. 115 – 116

SHRNUTÍ / PLÁN

MÁME	CHCEME	POUŽIJEME
vzdálenost bodů 	vzdálenost podprostorů  . . .	KOLMÉ příčky
odchylka vektorů 	odchylka podprostorů  . . .	KOLMÉ průměty
vzdálenost bodů a odchylka vektorů	objem ob. mnohostěnu  . . .	DETERMINANTY a pod.

VZDÁLENOSTI

- obecná definice
- geom. charakterizace
- souvislost se vzáj. polohami



VZDÁLENOSTI

- VZDÁL. lib. PODMNOŽIN v lib. METRICKÉM prostoru:

$$v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \inf \{ |BC| , \text{ kde } B \in \mathcal{B} \text{ a } C \in \mathcal{C} \}$$

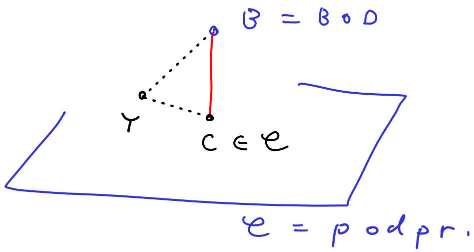
- Pro PODPROSTORY v EUKLEIDOVSKÉM prostoru:

$$\ldots \inf = \min \ldots$$

- ZŘEJMĚ: $\boxed{v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0 \iff \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset}$

- První GEOM. **charakterizace**:

$$\boxed{\begin{aligned} v(B, \mathcal{C}) = |BC| , \text{ tj. } |BC| = \min \\ \iff \overrightarrow{BC} \perp \mathcal{C} . \end{aligned}}$$



- **Důkaz** (Pythagorova věta):

(a) předp. $\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{C}$ a $Y \in \mathcal{C}$ lib $\rightsquigarrow$ $|BY|^2 = |BC|^2 + |CY|^2 > |BC|^2$

(b) předp. $\overrightarrow{BC} \cancel{\perp} \mathcal{C}$ a $Y \in \mathcal{C}$, $\overrightarrow{BY} \perp \mathcal{C}$ $\rightsquigarrow$ $|BC|^2 = |BY|^2 + |CY|^2 \cancel{<} |BY|^2$.

OBECNÁ CHARAKTERIZACE

- $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ... lib. podprostory, $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$:

(1) $\rho(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = |BC|$, tj. $|BC| = \min$
$\iff$ $\vec{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\vec{BC} \perp \mathcal{C}$.

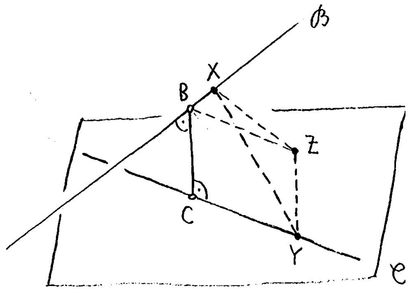
(2) Předchozí dvojice B, C je určena jednoznačně
$\iff$ $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{o\}$.

- Důkaz:

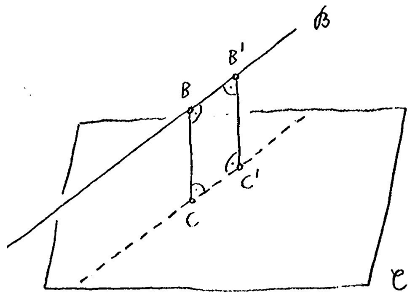
Pro $\rho(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$, tj. $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, všechno zřejmé...

Pro $\rho(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \neq 0$:

(1) "pravoúhlé $\triangle$" ...



(2) "obdélníčky" ...

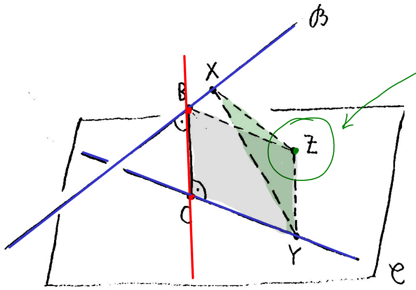


DETAILY K DŮKAZU

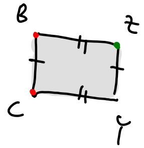
(1)

- Předp. $|BC| = \min \leadsto \overrightarrow{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{C}$. (viz s. 83)

- Předp. $\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{C} \overset{?}{\leadsto} |XY| \geq |BC|$ pro lib. $X \in \mathcal{B}$, $Y \in \mathcal{C}$



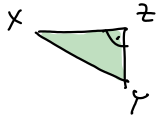
tak, aby



, tj. $\overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{BC}$,

$\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{C} \implies \overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{ZX}$,

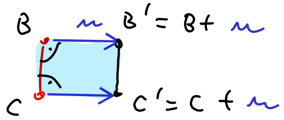
Tedy



$\implies |XY|^2 = |XZ|^2 + |ZY|^2 \geq |ZY|^2 = |BC|^2$.

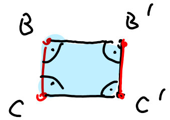
(2)

- předp. $u \in \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} \implies$

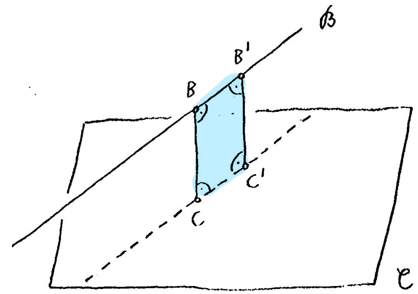


$\implies |BC| = |B'C'|$.

- Předp. $|BC| = |B'C'|$, tj.



$\implies \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} \in \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$.



SOUVISLOST SE VZÁJ. POLOHAMI

- Ozn:

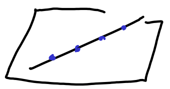
v = vzdálenost $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$

d = dim {řešení odp. soustavy} = dim $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$

m = min {dim $\mathcal{B}$, dim $\mathcal{C}$}

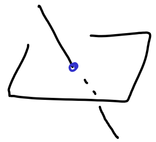
- Např:

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$



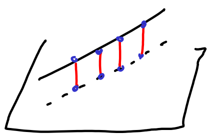
$v = 0$
$d = m$

$\mathcal{B} \times \mathcal{C}$



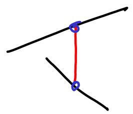
$v = 0$
$d < m$

$\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$



$v \neq 0$
$d = m$

$\mathcal{B} \not\times \mathcal{C}$



$v \neq 0$
$d < m$

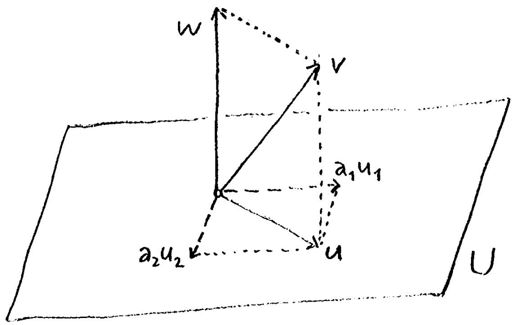
- OBECNĚ:

$\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$ / $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$		$d = m$	$d < m$
		je max	není max
$v = 0$	není $\emptyset$	$\subseteq$	$\times$
$v > 0$	je $\emptyset$	$\parallel$	$\not\times$

viz s. 47 – 48

POZNÁMKY KE ⊥ ROZKLADŮM A POČÍTÁNÍ

- kolmý doplněk podprostoru
- kolmé rozklady / průměty
- početní přístupy obecné / speciální
- poznámky a souvislosti



KOLMÝ DOPLNĚK

- $U \subseteq V$ ... vektorový podpr. v prostoru se skal. součinem

- $U^\perp$ = kolmý doplněk U ve V
  = { všechno ve V kolmé ke všemu v U }
  $= \{ v \in V \mid v \perp u \text{ pro } \forall u \in U \}$

- Pro lib. bázi $(u_1, \dots, u_k)$ podpr. U:

  $$U^\perp = \{ v \in V \mid \boxed{v \cdot u_1 = \dots = v \cdot u_k = 0} \}$$

  soustava lin. homog. rovnic

- Zřejmě platí:

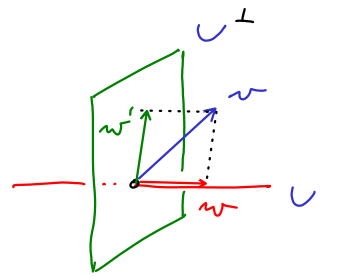
  $U^\perp \subseteq V$ je vektorový podpr.

  $U^\perp \cap U = \{0\}$ a $U^\perp + U = V$

$\rightsquigarrow$ TEDY U a $U^\perp$ jsou vskutku KOMPLEMENTÁRNÍ (= DOPLŇKOVÉ)!

DŮSLEDKY

Kolmý rozklad



- Lib. $v \in V$ lze VYJÁDŘIT JEDNOZNAČNĚ jako

$$v = w + w', \quad \text{kde } w \in U \text{ a } w' \in U^\perp \; !$$

kolmý průmět v do $U^\perp$

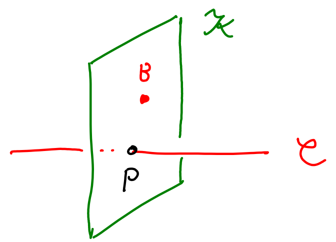
kolmý průmět v do U

Totální kolmost

- Podpr. $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ jsou totálně kolmé, pokud $\vec{\mathcal{B}}^\perp = \vec{\mathcal{C}}$.

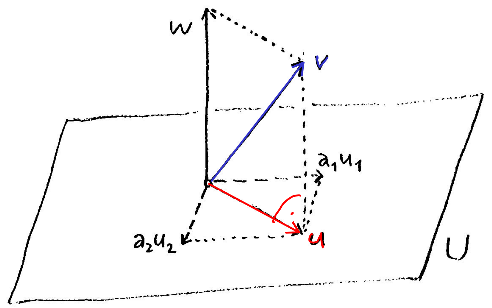
- Totálně kolmé podpr. se PROTÍNAJÍ V BODĚ!

⇝ jednoznačně určená pata "kolmice" z bodu B k podpr. $\mathcal{C}$ ... $P = \mathcal{X} \cap \mathcal{C}$,
kde $\mathcal{X} = B + \vec{\mathcal{C}}^\perp$



POČÍTÁNÍ KOLMÉHO PRŮMĚTU

89,5



- $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle \leq V$
- $v \in V$ lib
- u = kolmý průmět v do U

  $\Longleftrightarrow$ $u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$, pro nějaké $a_i \in \mathbb{R}$

  a $v - u \perp U$,

  tj. $(v - u) \cdot u_i = 0$, pro $i = 1, \dots, k$,

  tj. $$\boxed{\begin{array}{c} a_1 (u_1 \cdot u_1) + \dots + a_k (u_k \cdot u_1) = v \cdot u_1 \\ \vdots \\ a_1 (u_1 \cdot u_k) + \dots + a_k (u_k \cdot u_k) = v \cdot u_k \end{array}}$$

  "symetrická" soustava
  k lin. rovnic
  k neznámých

- spec. $\dim U = 1$:

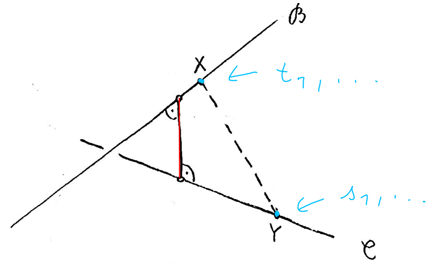
$$\boxed{a_1 (u_1 \cdot u_1) = v \cdot u_1} \rightsquigarrow \boxed{u = \left(\frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \right) u_1} ,$$

zejména $$\| u \| = \frac{| v \cdot u_1 |}{\| u_1 \|} .$$

POČÍTÁNÍ VZDÁLENOSTI

dim $\mathcal{B} = k$, dim $\mathcal{C} = \ell$

- $\mathcal{B} = \{ B + t_1 u_1 + \dots \}$, $\mathcal{C} = \{ C + s_1 v_1 + \dots \} \subseteq \mathcal{E}$
- $X \in \mathcal{B}$, $Y \in \mathcal{C}$ $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{BC} + s_1 v_1 + \dots - t_1 u_1 - \dots$
- $v(t_1, \dots, s_1, \dots) = |XY| = \sqrt{\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XY}} = \sqrt{f(t_1, \dots, s_1, \dots)}$



nezáp. KVADR. polynom

(A) podle DEFINICE

$$v = \min \iff \frac{\partial v}{\partial t_1} = \dots = \frac{\partial v}{\partial s_1} = \dots = 0$$

$$\iff \boxed{\frac{\partial f}{\partial t_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial s_1} = \dots = 0}$$

$k + \ell$ LINEÁRNÍCH rovnic

(B) kolmá PŘÍČKA

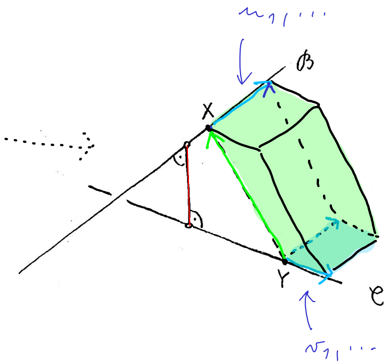
$$v = \min \iff \overrightarrow{XY} \perp \mathcal{B} \text{ a } \overrightarrow{XY} \perp \mathcal{C}$$

$$\iff \boxed{\overrightarrow{XY} \cdot u_1 = \dots = \overrightarrow{XY} \cdot v_1 = \dots = 0}$$

(C) výška ROVNOBĚŽNOSTĚNU

$v = \min \iff v =$ výška rovnob.

$$\iff \boxed{v = \frac{\text{objem}(u_1, \dots, v_1, \dots, \overrightarrow{XY})}{\text{objem}(u_1, \dots, v_1, \dots)}}$$



POZNÁMKY A ZKRATKY

- Vyznačené soustavy v (A) a (B) jsou STEJNÉ.

- Příčky (tedy i kolmé) umíme dělat RŮZNĚ!

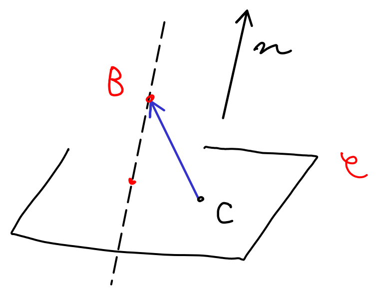
- $|XY| = \min \iff \overrightarrow{XY} =$ KOLMÝ PRŮMĚT $\overrightarrow{BC}$ do $(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}})^\perp$ . . .

  . . . obzvlášť snadné zejména pro $\dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}})^\perp = 1$ $\rightsquigarrow$ "VZOREČKY"

- Např. $\mathcal{B}$ = bod, $\mathcal{C}$ = nadrovina :

  $C \in \mathcal{C}$, $n \in \vec{\mathcal{C}}^\perp$ lib.

  $$\rightsquigarrow \boxed{v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot n|}{\|n\|}}$$

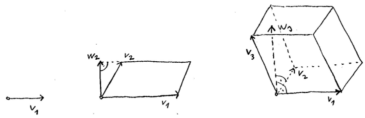


- Další "VZOREČKY" podle (C) . . .

  . . . OBSAHY a OBJEMY řešíme dále . . .

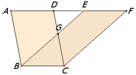
Objemy, determinanty apod.

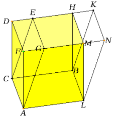
- obsahy rovnoběžníků, objemy rovnovnoběžnostěnů
- vymezení elementárně, vektorově
- determinanty, vnější a vektorové součiny
- poznámky a souvislosti



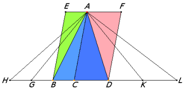
Opakování

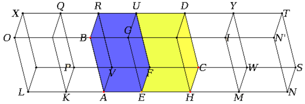
- Rovnoběžníky(-ostěny) se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný obsah.





- Poměr obsahů(-jemů) rovnoběžníků(-ostěnů) se stejnou výškou je stejný jako poměr délek(obsahů) jejich základen.

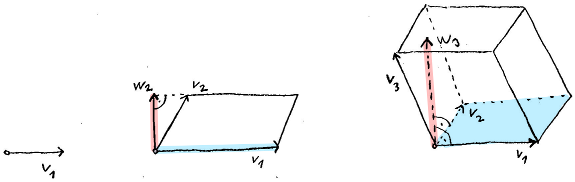




- Odtud poučka

$$\text{„}\textit{obsah(objem)} = \textit{základna} \times \textit{výška}\text{“.}$$

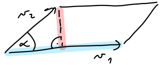
Obecně pomocí vektorů



Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ je nezáporné reálné číslo, ozn. $\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$, takové, že

- $\mathrm{V}(\mathbf{v}_1) := \|\mathbf{v}_1\|$,
- $\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\|$,
  kde $\mathbf{w}_2 =$ kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}_2$ do $\mathbf{v}_1^\perp$,
- $\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) := \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3) = \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \cdot \|\mathbf{w}_3\|$,
  kde $\mathbf{w}_3 =$ kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}_3$ do $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$,
- atd…

Počítání



- Pro $k = 2$ např.:

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin\alpha,$$

kde $\alpha = \measuredangle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, ... (umíme)

- Pro obecné k např.: ← soustavy lin. rovnic

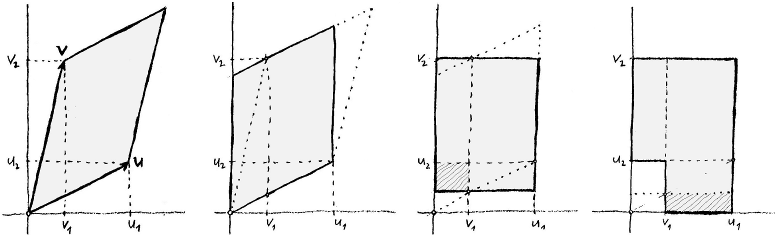
  – podle definice, tj. pomocí kolmého průmětu, (umíme)

  – podle vlastností, tj. pomocí determinantu, vektorového součinu, apod. (~~na~~učíme)
  při-

"vzorečky"

Úvod (naivně)

<u>Obsah</u> rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ...



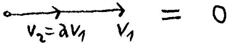
... je roven absolutní hodnotě <u>determinantu</u> $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_2 - v_1 u_2$.

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

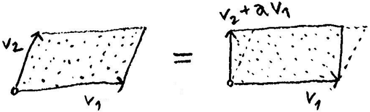
Úvod (koncepčně)

$V \times V \times \ldots \to \mathbb{R}_+$ $\qquad$ $V \times V \times \ldots \to \mathbb{R}$

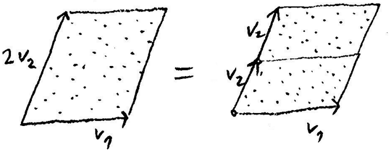
Vlastnosti obsahu/objemu se nápadně podobají vlastnostem determinantu:



$$V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) = 0$$



$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1)$$



$$V(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2) = |b| \cdot V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

abs. hodnota

Determinant

Determinant chápeme

+ znaménka odp. paritě výběru

- buď jako $\mathrm{Mat}(n \times n) \to \mathbb{R}$,

  $=$ součet součinů prvků typu „jeden z každého řádku/sloupce“$\dots$,

- nebo jako $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n} \to \mathbb{R}$, kde $V = \mathbb{R}^n$, které je

  a) **anti-symetrické**

  $$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = -\det(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \dots),$$

  b) **multi-lineární**

  tj. ve VŠECH složkách

  $$\det(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2, \dots) = b \cdot \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots),$$
  $$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \dots) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) + \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \dots).$$

Důležité (odvozené) vlastnosti:

$$\boxed{\begin{gathered}\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1, \dots) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots),\\ \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = 0 \iff \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \text{ jsou lineárně závislé.}\end{gathered}}$$

Vnější součin

Uvažme dim $V = \boldsymbol{n}$ a přiřazení $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$:

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \longmapsto \text{souřadnice} \longmapsto \text{determinant.}$$

Závisí na volbě báze. . . [1]

Vnější součin = předchozí přiřazení vzhledem k nějaké ortonormální bázi;
ozn.

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] := \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Vnější součin je anti-symetrické ***n***-lineární zobrazení, které až na znaménko souhlasí objemem. . .

Mezishrnutí:

$$\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \begin{cases} 0 & \text{pro } k > n \\ \pm[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k] & \text{pro } k = n \\ ? & \text{pro } k < n \end{cases}$$

viz dále...

[1]. . . viz přechodové matice a Cauchyovu větu o součinu determinantů.

Kouzlo ($k = 2$)

Víme, že

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin\alpha,$$

přičemž

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \qquad \cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \mathbin{.} \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|}.$$

Odtud

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \cdots = \sqrt{\|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\mathbf{v}_1 \mathbin{.} \mathbf{v}_2)^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \mathbin{.} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \mathbin{.} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \mathbin{.} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \mathbin{.} \mathbf{v}_2 \end{vmatrix}},$$

zase jakýsi determinant, ...

Kouzlo (obecně)

... tzv. *Gramův determinant*, ozn.

$$G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{vmatrix}.$$

Věta

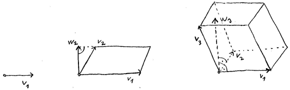
Pro libovolnou k-tici vektorů v eukleidovském prostoru platí

$$V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \sqrt{G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)}.$$

Důkaz.

Plyne z vlastností determinantu a skalárního součinu... $\square$

Detaily k důkazu



1) Pro navzájem kolmé vektory (kvádr):

$$G(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3)=\begin{vmatrix}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_2 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{w}_3\cdot\mathbf{w}_3\end{vmatrix}=$$

$$=\|\mathbf{v}_1\|^2\cdot\|\mathbf{w}_2\|^2\cdot\|\mathbf{w}_3\|^2=V(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3)^2.$$ ← (zejména vždy ≥ 0)

2) Pro lib. našikmené vektory $\mathbf{v}_2=\mathbf{w}_2+a\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3=\mathbf{w}_3+b\mathbf{v}_1+c\mathbf{v}_2$:

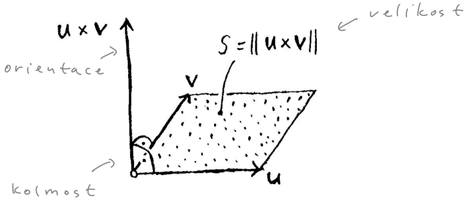
$$G(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)=\begin{vmatrix}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3\\ \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3\\ \mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_3\end{vmatrix}\overset{!}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3\\ \mathbf{w}_2\cdot\mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2\cdot\mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_2\cdot\mathbf{v}_3\\ \mathbf{w}_3\cdot\mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3\cdot\mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_3\cdot\mathbf{v}_3\end{vmatrix}\overset{!}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{w}_2 & \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{w}_3\\ \mathbf{w}_2\cdot\mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_3\\ \mathbf{w}_3\cdot\mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3\cdot\mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3\cdot\mathbf{w}_3\end{vmatrix}=G(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3).\quad\square$$

Vektorový součin ($n = 3$)

Od maturity známe jako operaci $V \times V \to V$ s několika užitečnými vlastnostmi:



U maturity zpravidla nevíme proč, ale pro $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ počítáme takto:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

souř. vzhledem k ON bázi

Vektorový součin (obecně)

Návod k předchozímu souř. vyjádření — Laplaceův rozvoj determinantu:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} x_3.$$

☞ Důležitá (bezsouřadnicová) interpretace:

vektorový s.

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \,.\, \mathbf{x},$$

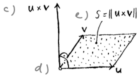
vnější součin

skalární s.

Obecná definice:

> *Vektorovým součinem* $(\boldsymbol{n} - \mathbf{1})$-tice vektorů $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$ v $\boldsymbol{n}$-rozměrném eukleidovském prostoru je vektor $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$ splňující
>
> $$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x}] = \mathbf{w} \,.\, \mathbf{x} \qquad (*)$$
>
> pro všechna $\mathbf{x} \in V$.

Vektorový součin (vlastnosti)



Věta

Ozn. $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$, $n = \dim V$.

a) *Toto je anti-symetrické multi-lineární zobrazení* $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-1} \to V$.

b) $\mathbf{w} = \mathbf{o} \iff \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ *jsou lineárně závislé.*

c) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ *jsou lineárně nezávislé* $\Longrightarrow (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w})$ *je kladná báze.*

d) $\mathbf{w}$ *je kolmý ke všem vektorům* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$.

e) $\|\mathbf{w}\| = \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$.

Důkaz.

a) Viz def. rovnost $^{(*)}$ a vlastnosti vnějšího $^{(v)}$ a skalárního $^{(s)}$ součinu.

b) $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x}] = 0 \ \forall \mathbf{x} \in V \overset{(v)}{\iff} \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ lin. závislé;
$\mathbf{w} \,.\, \mathbf{x} = 0 \ \forall \mathbf{x} \in V \overset{(s)}{\iff} \mathbf{w} = \mathbf{o}$.

c) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ lin. nezávislé $\overset{(b)}{\Longrightarrow} \mathbf{w} \neq \mathbf{o} \Longrightarrow [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}] \overset{(*)}{=} \mathbf{w} \,.\, \mathbf{w} \overset{(s)}{>} 0$.

d) $\mathbf{w} \,.\, \mathbf{v}_i \overset{(*)}{=} [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_i] \overset{(v)}{=} 0$.

e) $\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w} \,.\, \mathbf{w} \overset{(*)}{=} [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}] \overset{(v)}{=} \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}) \overset{(d)}{=} \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \cdot \|\mathbf{w}\|$. $\square$

Poznámky

K vektorovému součinu pro $n = 3$:

- Binární operace $V \times V \to V$, která **není** asociativní (přesto užitečná).
- Pro velikost platí

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin\alpha, \quad \text{kde } \alpha = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

K aplikacím:

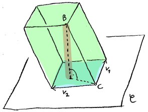
- Orientace a kolmosti vektorů.
- Objemy rovnoběžnostěnů, simplexů atd., přičemž:

indukce (+ limitní úvahy)

$$\text{Objem } \boldsymbol{k}\text{-dim simplexu} = \frac{1}{\boldsymbol{k}!} \text{ objemu opsaného rovnoběžnostěnu.}$$

- Vzdálenosti podprostorů **bez** řešení soustav rovnic:

$$v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{\mathrm{V}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \overrightarrow{BC})}{\mathrm{V}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots)},$$



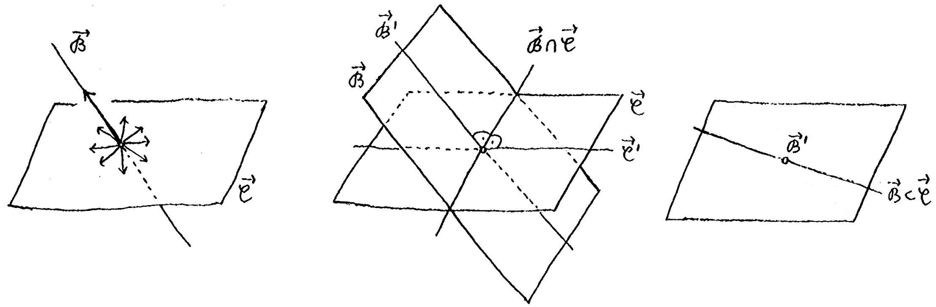
kde $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$ a $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots)$ je báze $\overrightarrow{\mathcal{B}} + \overrightarrow{\mathcal{C}}$.

ODCHYLKY

- obecná definice

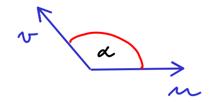
- geom. charakterizace

- poznámky a souvislosti s kolmostí

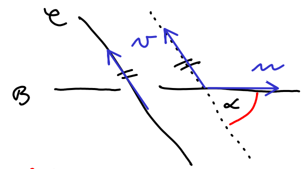


ODCHYLKY

- Rozumíme $\measuredangle$ **vektorů** ... $\cos\alpha = \dfrac{u \circ v}{\|u\| \cdot \|v\|}$ $\rightarrow$ $\alpha \in [0°, 180°]$



$\rightsquigarrow$ $\measuredangle$ **přímek** ... $\cos\alpha = \dfrac{|u \circ v|}{\|u\| \cdot \|v\|}$ $\rightarrow$ $\alpha \in [0°, 90°]$



Obecně

- $\measuredangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \measuredangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}})$,
- $\measuredangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}})$ ... musíme ROZLIŠOVAT:

– $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{o\}$ ... $\measuredangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}}) = \min\{\measuredangle(u, v),$ kde $u \in \vec{\mathcal{B}}$ a $v \in \vec{\mathcal{C}}\}$

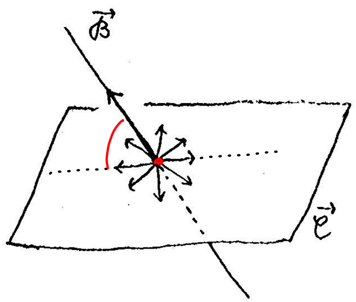
– $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} \neq \{o\}$
  - $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \max$ ... $\measuredangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}}) = 0$
  - $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} \neq \max$ ... $\measuredangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}}) = \measuredangle(\vec{\mathcal{B}}', \vec{\mathcal{C}}')$,

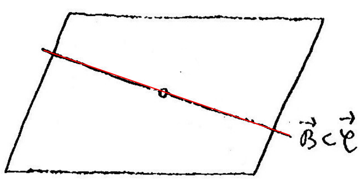
kde $\vec{\mathcal{B}}' \subset \vec{\mathcal{B}}$ a $\vec{\mathcal{B}}' \perp (\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}})$

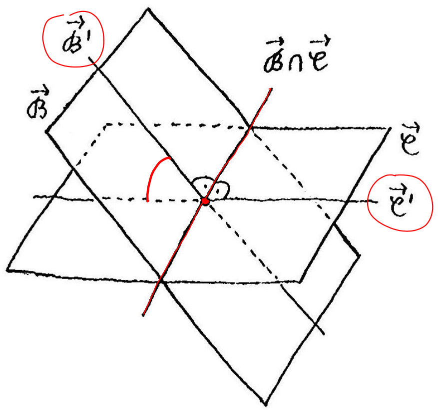
a $\vec{\mathcal{C}}' \subset \vec{\mathcal{C}}$ a $\vec{\mathcal{C}}' \perp (\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}})$

↑

v skutku $\vec{\mathcal{B}}' \cap \vec{\mathcal{C}}' = \{o\}$

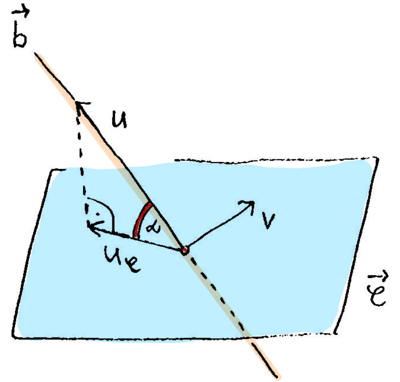






PRVNÍ CHARAKTERIZACE

- b = přímka, $\mathcal{E}$ = ob. netriv. podpr.:



$$\boxed{\begin{array}{l} \measuredangle(b, \mathcal{E}) = \measuredangle(u, u_e), \\ \quad \text{kde } u \in \vec{b} \text{ lib.} \\ \quad\quad \text{a } u_e = \text{KOLMÝ PŘÍMĚT } u \text{ do } \mathcal{E}. \end{array}}$$

- Důkaz:

Pro lib. $v \in \vec{\mathcal{E}}$ ukážeme, že $\beta = \measuredangle(u, v) \geq \measuredangle(u, u_e) = \alpha$,

tj. $\cos\beta \leq \cos\alpha$:

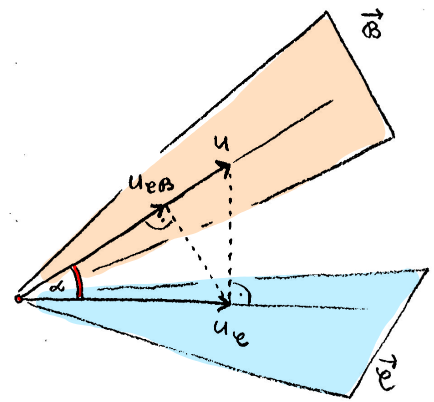
$$\cos\beta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{u_e \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq \frac{\|u_e\| \cdot \|v\|}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{\|u_e\|}{\|u\|} = \cos\alpha .$$

$u - u_e \perp \mathcal{E}$

tj. $(u - u_e) \cdot v = 0$

Cauchy-Schwarz!

OBECNÁ CHARAKTERIZACE



- $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ... ob. netriv. podpr., $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{o\}$
- ozn. $\measuredangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \measuredangle(u, v) = \alpha$ pro $u \in \vec{\mathcal{B}}$ a $v \in \vec{\mathcal{C}}$

$\rightsquigarrow$ $\alpha = \measuredangle(u, u_{\mathcal{C}}) = \measuredangle(v_{\mathcal{B}}, v)$,

kde $u_{\mathcal{C}}$ = kolmý průmět u do $\mathcal{C}$

a $v_{\mathcal{B}}$ = kolmý průmět v do $\mathcal{B}$

$\rightsquigarrow$ $u_{\mathcal{C}}$ = násobek v a $v_{\mathcal{B}}$ = násobek u

$\rightsquigarrow$ $u_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ = kolmý průmět $u_{\mathcal{C}}$ do $\mathcal{B}$

= násobek u

= CHAR. VEKTOR složeného zobr. $\vec{\mathcal{B}} \underset{p_{\mathcal{B}}}{\overset{p_{\mathcal{C}}}{\rightleftarrows}} \vec{\mathcal{C}}$

- Přitom $\cos\alpha = \dfrac{\|u_{\mathcal{C}}\|}{\|u\|} = \dfrac{\|u_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\|}{\|u_{\mathcal{C}}\|}$, $u_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \lambda u$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\lambda = \cos^2\alpha}$.

$\measuredangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \measuredangle(u, u_{\mathcal{C}}) = \dots$,

kde u = char. vektor odp. NEJVĚTŠÍMU char. číslu transf. $p_{\mathcal{B}} \circ p_{\mathcal{C}}$

a $u_{\mathcal{C}} = p_{\mathcal{C}}(u)$, ...

ZKRATKY A POZNÁMKY

- obecně platí $\boxed{\sphericalangle(\vec{B}, \vec{E}) = \sphericalangle(\vec{B}^\perp, \vec{E}^\perp) = 90° - \sphericalangle(\vec{B}, \vec{E}^\perp)}$ ...
- což se hodí zejména v NADROVIN ...

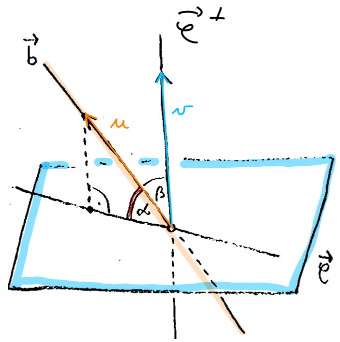
$\sphericalangle(\vec{E}, \vec{E}^\perp) = 90°$

- Např. b = přímka, E = nadrovina

$\rightsquigarrow \quad \alpha = \sphericalangle(b, E) = 90° - \sphericalangle(u, v),$

kde $u \in \vec{b}$, $v \in \vec{E}^\perp$ lib.

$\rightsquigarrow \quad \boxed{\sin\alpha = \cos(90° - \alpha) = \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \cdot \|v\|}}$



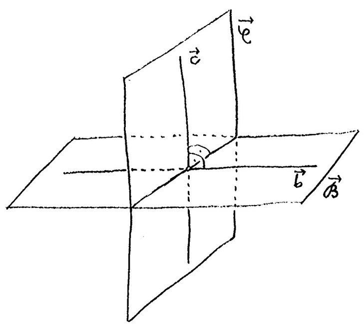
- B, E totálně kolmé, tj. $\vec{B}^\perp = \vec{E} \implies \sphericalangle(B, E) = 90°$. ← triv.
- $\boxed{B, E \text{ „kolmé", tj. } \vec{B}^\perp \subseteq \vec{E} \text{ či } \vec{B}^\perp \supseteq \vec{E} \implies \sphericalangle(B, E) = 90°.}$ ← obecně

$\not\Leftarrow$

Důvod:

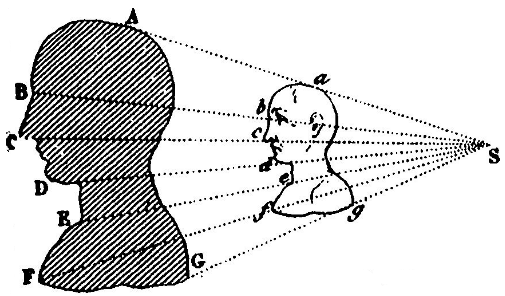
Levá strana ZÁVISÍ na okolním prostoru $\mathcal{E}$, pravá strana NIKOLI!

platí, pokud $\vec{B} \cap \vec{E} = \{o\}$!



RELEVANTNÍ ZOBRAZENÍ

- shodná, podobná a ekviafinní zobr.
- alg. vymezení a souř. vyjádření
- výhled k projektivním



PŘEHLED

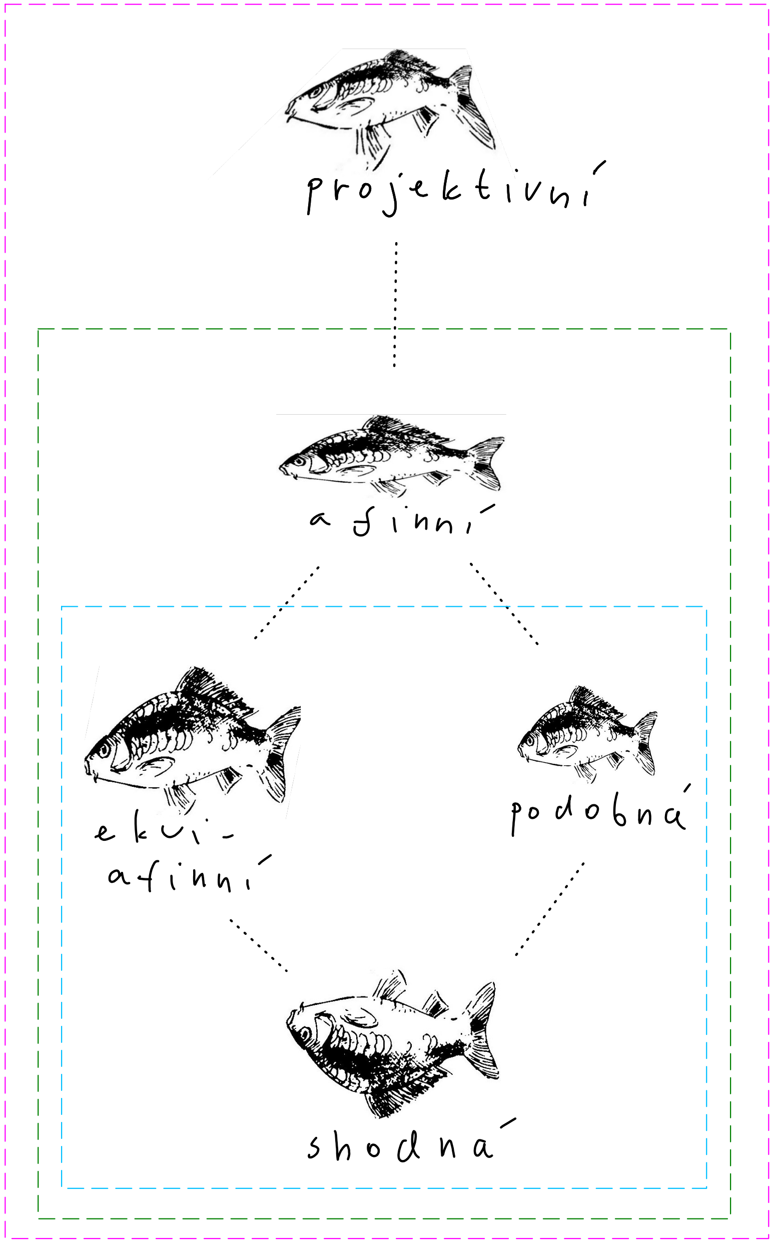
Umíme

(Geometrie 1)

- VŠECHNY skupiny elementárně
- všechno o AFINNÍCH! (s. 32-35, 67)
- základ o SHODNÝCH a PODOBNÝCH (s. 80)

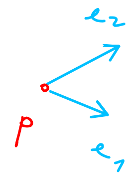
Doplníme

- anal. vyjádření shodných, podobných a ekviafinních v rámci AFINNÍCH (s. 115-116)
- důkladnější rozbor v rámci PROJEKTIVNÍCH (Geometrie 3)



ANAL. VYJÁDŘENÍ

- a, a' … afinní prostory + afinní souř. soust. …



- $f : a \longrightarrow a'$ je AFINNÍ

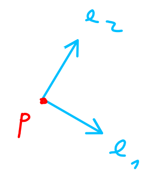
$\iff$ $f(A+v) = f(A) + \vec{f}(v)$, kde $\vec{f} : V \longrightarrow V'$ je LINEÁRNÍ

$$\iff \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}}_{\text{souřadnice obrazu}} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}}_{\text{obraz počátku}} + \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}}}_{\text{matice lin. zobrazení } \vec{f}} \cdot \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}}_{\text{souřadnice vzoru}}$$

- zkrácené $\boxed{X'} = \boxed{P'} + \boxed{D} \cdot \boxed{X}$, přičemž $\boxed{D = \left(e_1' \,\vdots\, e_2' \,\vdots\, \cdots\right)}$

ANAL. VYJÁDŘENÍ

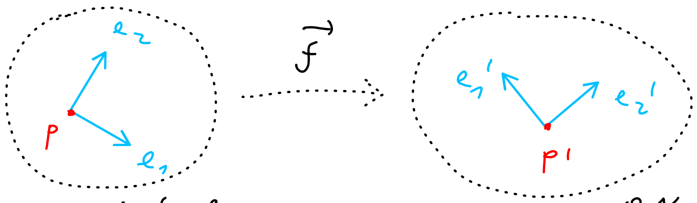
- $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ ... eukleid. prostory + KARTÉZSKÉ souř. ...



tj: $e_i \circ e_j = \begin{cases} 1 & \dots\ i = j \\ 0 & \dots\ i \neq j \end{cases}$

- afinní $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ je **SHODNÉ**

$\iff$ $\vec{f} : V \longrightarrow V'$ zachovává SKALÁRNÍ SOUČIN

$\iff$ 

ON báze   ON báze

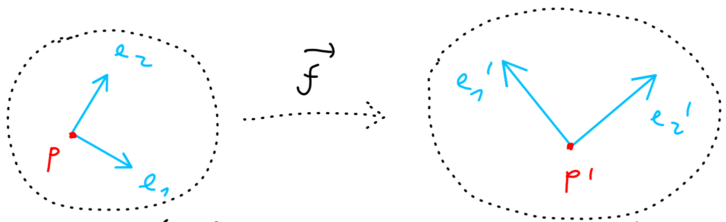
tj: $e_i' \circ e_j' = \begin{cases} 1 & \dots\ i = j \\ 0 & \dots\ i \neq j \end{cases}$

$\iff$ $\boxed{D^T \cdot D = E}$

tj: $\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1' & e_2' & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$

- afinní $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ je **PODOBNÉ** s koeficientem k

$\iff$ $\vec{f} : V \longrightarrow V'$ zachovává SKALÁRNÍ SOUČIN až na NÁSOBEK

$\iff$ 

ON báze   OG báze $\|e_i'\| = k$

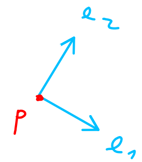
tj: $e_i' \circ e_j' = \begin{cases} k^2 & \dots\ i = j \\ 0 & \dots\ i \neq j \end{cases}$

$\iff$ $\boxed{D^T \cdot D = k^2 E}$

tj: $\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1' & e_2' & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & \dots \\ 0 & k^2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$

ANAL. VYJÁDŘENÍ

- $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ . . . eukleid. prostory + KARTÉZSKÉ souř. . . .

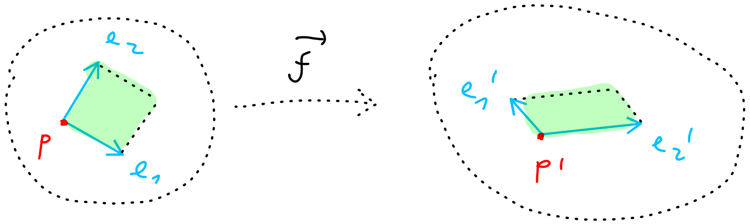


tj: $e_i \circ e_j = \begin{cases} 1 & \dots i = j \\ 0 & \dots i \neq j \end{cases}$

- afinní $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ je EKVIAFINNÍ

$\iff$ $\vec{f} : V \longrightarrow V'$ zachovává OBJEMY

$\iff$



$\iff$ $\boxed{\det(D^T \cdot D) = 1}$ $\longleftarrow$ $\begin{pmatrix} e_1' \\ \hdashline e_2' \\ \hdashline \vdots \end{pmatrix} \cdot \left(e_1' \,\vdots\, e_2' \,\vdots\, \dots \right)$ = GRAMOVA matice . . .

- v případě, že $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{E}'$: $\longleftarrow$ tj. matice D čtvercová

$\iff$ $\boxed{\det D = \pm 1}$

SHRNUTÍ / VÝHLEDY

- SHODNÁ, PODOBNÁ, EKVIAFINNÍ zobr. jsou **PROSTÁ**!

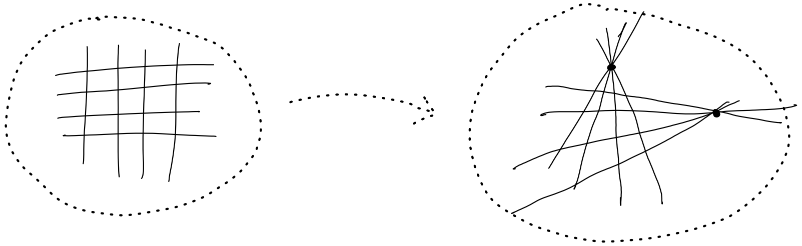
- Obecná AFINNÍ zobr.,

$$\boxed{X'} = \boxed{P'} + \boxed{D} \cdot \boxed{X},$$

lze psát pomocí jedné **ROZŠÍŘENÉ** matice takto:

$$\begin{pmatrix} \boxed{X'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{D} & \boxed{P'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Do tohoto schématu se vejdou i obecná **PROJEKTIVNÍ** zobr!



- Čeká nás
  - konfrontace geom. a anal. vyjádření
  - rozpoznání ZÁKLADNÍCH zobr.
  - skládání a rozkládání . . . (Geometrie 3)

EUKLEID. GEOMETRIE PŘEHLEDNĚ

- Předchozí věci ...

  těleso $\mathbb{R}$ ⇝ vektorový prostor V ⇝ afinní prostor $\mathcal{A}$

  ... doplňujeme o ...

  skalární součin $V \times V \to \mathbb{R}$ ⇝ eukleidovský prostor $\mathcal{E}$

Úvodní věci

- norma, kolmost, odchylka vektorů
- shodnost úseček, úhlů

Další věci

- vzdálenost, odchylka ob. podpr.
- objemy rovnoběžnostěnů, simplexů, ...
- shodná, podobná, ekviafinní zobr.

Souvislosti

- vzdálenost, odchylka a vzájemné polohy podpr.
- objemy a determinanty
- kolmé průměty a rozklady