Repetitorium SŠ matematiky – 2. cvičení

Konzultace k tomuto cvičení proběhne v MS Teams 21. 10. 2020.

Do pátku 23. 10. 2020 je třeba nahrát do odevzdávárny následující:

- alespoň 2 varianty z příkladů 1, 2
- alespoň 1 variantu z příkladů 3, 4

$\boxed{\text{ROVNICE}}$ = rovnost dvou výrazů s neznámou (proměnnou)

- Kolik může mít rovnice řešení? Množinu řešení označme K.

- $5(2-x) = -5x - 7$

  $10 - 5x = -5x - 7$

  $3 = 0$

  NEMÁ ŘEŠENÍ

  (nenulová hodnota se nerovná nule)

  $K = \emptyset$

- $2x - 7 = x + 15$

  $x = 22$

  $K = \{22\}$

- $x^2 - 5 = 0$

  $x = \pm\sqrt{5}$

  $K = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

- $x\sqrt{2} - \sqrt{3} = -(\sqrt{3} - x\sqrt{2})$

  $x\sqrt{2} - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + x\sqrt{2}$

  $0 = 0$

  NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ

  (nula je vždy rovna nule, řešením jsou tedy všechna čísla z číselné množiny, v níž rovnici řešíme → není-li řečeno jinak, řešíme v reálných číslech $\mathbb{R}$)

  $K = \mathbb{R}$

- $\sin x = 1$

  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

  $K = \{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z} \}$

  NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ

Rovnice řešíme pomocí tzv. **EKVIVALENTNÍCH ÚPRAV**, tedy úprav, které nemění hodnoty kořenů ani jejich počet. Jsou to:

- přičítání stejného čísla k oběma stranám rovnice;
- přičítání stejného násobku neznámé k oběma stranám rovnice
- násobení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem (pozor, u nerovnic pouze násobení stejným kladným číslem)
- ekvivalentní úpravy na jednotlivých stranách rovnice

Vedle ekvivalentních úprav existují **DŮSLEDKOVÉ ÚPRAVY**, při nichž nám může vzniknout nový kořen, je tedy vždy třeba provést na konci zkoušku – takovou úpravou je například umocnění obou stran rovnice.

Lineární rovnice – rovnice tvaru $ax + b = 0$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a rovnice, které lze do tohoto tvaru upravit

Nerovnice – rozlišujeme ostré a neostré nerovnosti

ostré: $<$; $>$ neostré: $\leq$; $\geq$

– řešení se zapisuje pomocí intervalu, pozor na rozlišování otevřeného / uzavřeného / polouzavřeného intervalu

- $4x - 2 \leq 8$

  $4x \leq 10$

  $x \leq \frac{5}{2}$

  $K = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right\rangle$

- $(x+1)\cdot(x-3) > 0$

  + − +

  − − | + − | + +

  −1 3

  $K = (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$

– při násobení (dělení) nerovnice záporným číslem obracíme nerovnost

Př. 1: Řešte (ne)rovnice v $\mathbb{R}$

a) $5\cdot\{5\cdot[5\cdot(5x-4)-4]-4\}=5$

b) $(x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-1)(x-2)(x-3)$

c) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x-\frac{x}{2}}{2}-\dfrac{x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2+\frac{x}{2}}{2}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{x}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{4x-7}{2}-\dfrac{x-4}{6}\geq 2x-3$

FUNKCE (zobrazují fce)

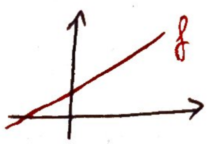
Funkce na množině $D\subset\mathbb{R}$ je předpis, který každému čísla z množiny D přiřazuje právě jedno reálné číslo. Množina D se nazývá definiční obor. Obor hodnot funkce je množina H všech $y\in\mathbb{R}$, ke kterým existuje alespoň jedno $x\in D$ tak, že

$y=f(x)$

Pro funkci f značíme D_f, H_f, pro funkci g zn. D_g, H_g ...

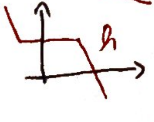
Vlastnosti funkcí

1. monotónnost
   - rostoucí fce f

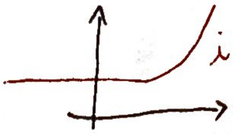


   - klesající fce g

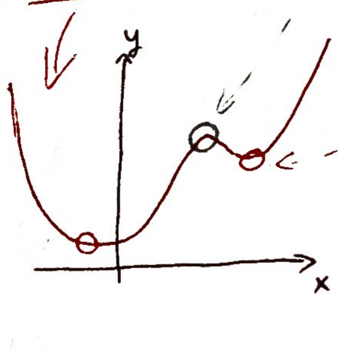
   - nerostoucí fce h

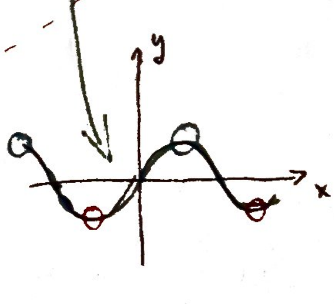


   - neklesající fce i



2. Extrémy – maximum, minimum
3. Omezenost – shora omezená, zdola omezená, omezená

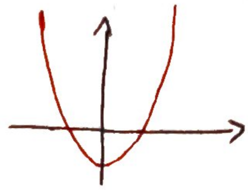




4. Parita

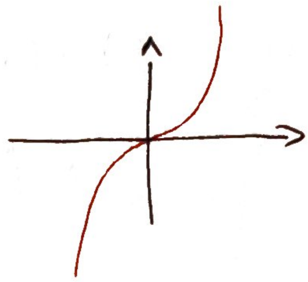
- sudá funkce: $\forall x \in D_f \; (-x) \in D_f$:

  $f(x) = f(-x)$



- lichá funkce: $\forall x \in D_f \; (-x) \in D_f$:

  $-f(x) = f(-x)$



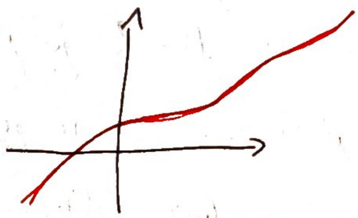
5. Prostá funkce

$\forall x, y \in D_f$: $f(x) \neq f(y)$

pokud $x \neq y$

- jinými slovy žádným dvěma hodnotám z osy x nejsou přiřazeny stejné hodnoty z osy y

není prostá



je prostá

Lineární funkce

$f: y = ax + b \qquad a, b \in \mathbb{R}$ grafem je přímka

- koeficient a má vliv na sklon přímky
- koeficient b posouvá přímku ve směru osy y ($\updownarrow$)

Přímku kreslíme buď pomocí tabulky (nalezne hodnoty y pro lib. dvě hodnoty x), nebo na základě interpretace koeficientů a, b.

Př. 2: načrtněte lineární funkce

a) $f: y = 3x - 1$

b) $g: y = -0{,}2x + 2$

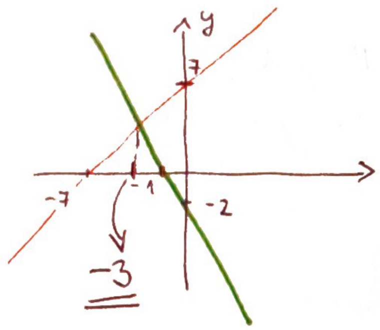
c) $h: y = 7x$

d) $i: y = 5$

GRAFICKÉ ŘEŠENÍ (NE)ROVNIC

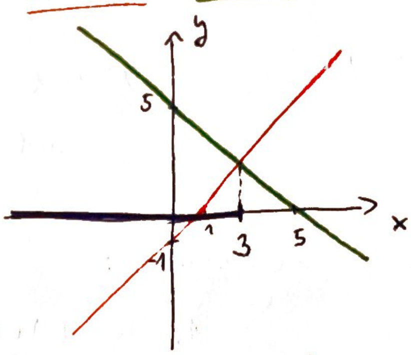
Při grafickém řešení rovnice nebo nerovnice nakreslíme každou ze stran (ne)rovnosti jako přímku do téže ~~gr~~ soustavy souřadnic. V rovnici pak hledáme průsečík nakreslených přímek, u nerovnice zkoumáme, od které hodnoty x má jedna přímka vždy nižší hodnoty y, než druhá.

- $x + 7 = -2x - 2$



$K = \{-3\}$

- $x - 1 < 5 - x$



$K = (-\infty; 3)$

Př. 3: Řešte graficky

a) $2x - 2 = 2x + 1$

b) $5 + 3x \leq 3 + 5x$

SOUSTAVY ROVNIC A NEROVNIC

Soustavy rovnic se řeší sčítací metodou, dosazovací metodou, nebo graficky (každou z 2 rovnic vyjádřím ve tvaru $y = \dots$ a načrtnu, hledáme průsečík). Řešením je uspořádaná n-tice.

Sčítací metoda – jeden z řádků (případně i více) vynásobíme vhodnou konstantou tak, aby po sečtení rovnic zmizela jedna neznámá.

Dosazovací metoda – z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou, tuto vyjádření dosadíme do druhé rovnice a dopočítáme

Může se stát, že soustava rovnic nebude mít žádné řešení, nebo jich bude mít nekonečně mnoho.

- $$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x + y &= 7 \quad / \cdot (-1) \\ \hline 0 &= -2 \end{aligned}$$

  NEMÁ ŘEŠENÍ

  $K = \emptyset$

- $$\begin{aligned} x + y &= 2 \quad / \cdot (-2) \\ -2x - 2y &= -4 \\ \hline 0 &= 0 \end{aligned}$$

  NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ

  → volíme parametr za jednu neznámou

  $y = t \qquad t \in \mathbb{R}$

  $x = 2 - t$

  $K = \{[2-t; t]; t \in \mathbb{R}\}$

- řešení různými metodami:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ 3x - 3y &= 7 \end{aligned}$$

1. SČÍTACÍ M.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \quad / \cdot 3 \\ 3x - 3y &= 7 \\ \hline 9x &= 22 \\ x &= \frac{22}{9} \end{aligned}$$

$2 \cdot \frac{22}{9} + y = 5$

$\frac{44}{9} + y = 5$

$y = \frac{1}{9}$

$K = \{[\frac{22}{9}; \frac{1}{9}]\}$

2. DOSAZOVACÍ M.

$2x + y = 5 \rightarrow y = 5 - 2x$

$3x - 3y = 7$

$3x - 3(5 - 2x) = 7$

$3x - 15 + 6x = 7$

$9x = 22$

$x = \frac{22}{9}$

$y = 5 - 2 \cdot \frac{22}{9}$

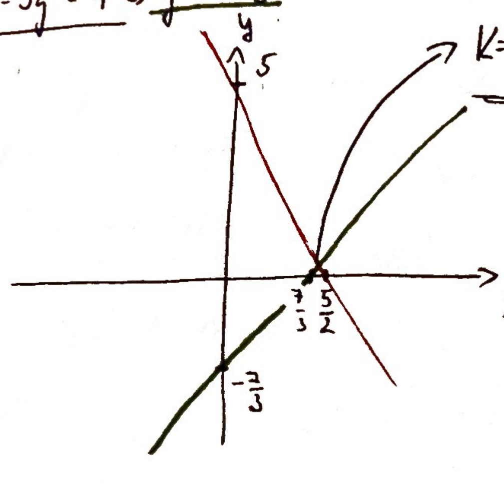
$y = \frac{1}{9}$

$K = \{[\frac{22}{9}; \frac{1}{9}]\}$

3. GRAFICKÁ M. (nedoporučuji používat samostatně)

$2x + y = 5 \rightarrow y = 5 - 2x$

$3x - 3y = 7 \rightarrow y = x - \frac{7}{3}$



$K = \{[\frac{22}{9}, \frac{1}{9}]\}$

Př. 4: Řešte soustavy rovnic

a) $$\begin{aligned} 7x - 3y &= 15 \\ 5x + 6y &= 27 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ x + y &= 15 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{aligned}$$