

Repetitorium SS matematiky - 10. cvičení

(1)

Konzultace z tohoto cvičení proběhne v MS Teams 6.1.2021.

Do pátku 8.1.2021 je třeba nahrát do odevzdávání

- alespoň 1 variantu z každého příkladu

Komplexní čísla - 2. část

Zápis komplexního čísla v goniometrickém tvaru

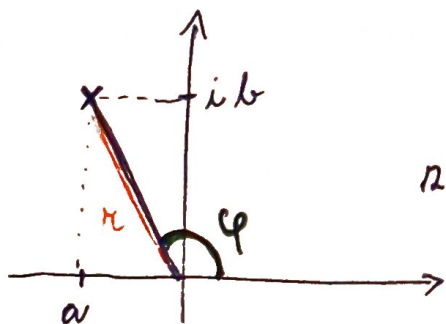
Každé komplexní číslo lze zapsat jak v algebraickém tvaru

$(a + bi; a, b \in \mathbb{R})$, tak ve tvaru goniometrickém

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

r - vzdálenost čísla od počátku souřadnic, $r = |z|$

φ - argument komplexního čísla



$$z = a + ib = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Vzpomeňte si na jednotkovou kružnici. Každý bod kružnice o poloměru 1 se středem v počátku souřadnic má x-ovou souřadnici $\cos \varphi$ a y-ovou souřadnici $\sin \varphi$, kde φ je úhel, který svírá spojnice bodu na kružnici s počátkem souřadnic a žádná polosa x. Vybereme vzdálenosti komplexního čísla od počátku zůstane v rávorce komplexní číslo s absolutní hodnotou 1, tedy ležící na jednotkové kružnici.

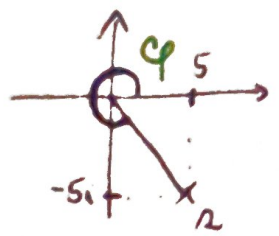
• zapíšte komplexní číslo v goniometrickém tvaru

$$z = 5 - 5i$$

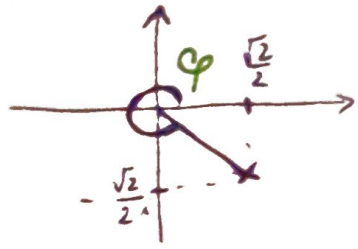
$$|z| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$z = 5\sqrt{2} \left(\frac{5}{5\sqrt{2}} - \frac{5}{5\sqrt{2}}i \right) = 5\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

1. určete absolutní hodnotu
2. převeďte číslo do Gaussovy roviny a určete φ



nebo



$$\varphi = \frac{7\pi}{4}$$

Jak je vidět, nezáleží na tom, zda převeďte přímocí číslo, nebo číslo v upraveném poloměrem, úhel je stejný.

$$\underline{z = 5\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{4} \right)}$$

Př. 1. Zapíšte komplexní čísla v goniometrickém tvaru.

a) $z = -1 + \sqrt{3}i$

b) $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $z = \pi \cdot i$

Př. 2. Zapíšte komplexní čísla v algebraickém tvaru

a) $z = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$

b) $z = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(193\pi) + i \cdot \sin(193\pi) \right)$

Zápis čísel v goniometrickém tvaru má své výhody,
například se velmi jednoduše násobem, dělením, umocňováním...

(5)

Přech:

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \rho + i \sin \rho)$$

→

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi + \rho) + i \sin(\varphi + \rho))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi - \rho) + i \sin(\varphi - \rho))$$

Moirreova věta

Pro každé $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$: $z^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi)$

Obecněji tedy

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi))$$

Př. 3. Umocněte pomocí Moirreovy věty, výsledek uveďte v algebraickém tvaru

a) $(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^{62}$

b) $(1 - i)^{100}$

c) $(\frac{1}{1+i})^{10}$

Binomická rovnice

Binomickou rovnici rozumíme rovnici tvaru $x^m - a = 0$,

kde $a \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

Výsledkem je právě m komplexních čísel x_0, x_1, \dots, x_{m-1} ,

které tvoří v Gaussově rovině pravidelný m -úhelník se středem v počátku souřadnic.

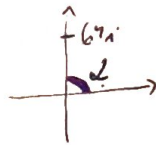
Zapíšeme-li číslo a v goniometrickém tvaru $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$,
 získáme výsledky následovně:

$$x_k = \sqrt[m]{|a|} \cdot \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{m} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{m} \right)$$

$$k = 0, 1, \dots, m-1$$

• $x^3 - 64i = 0$

$a = 64i$ $|a| = \sqrt{0^2 + 64^2} = 64$



$a = 64 \cdot (0 + i)$

$a = 64 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

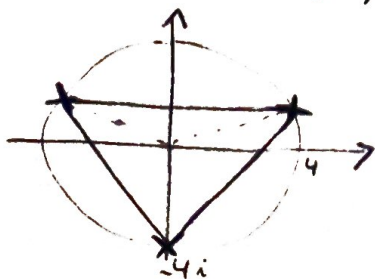
$$x_k = \sqrt[3]{64} \cdot \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right)$$

Obkroj' tvar výsledků,
 dosazením k získáme
 výsledky x_0, x_1, x_2

$x_0 = 4 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

$x_1 = 4 \cdot \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} \right) = 4 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$

$x_2 = 4 \cdot \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} \right) = 4 \cdot \left(\cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) = 4 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$



Výsledky tvoří rovnostranný Δ .

Př. 4 : Řešte binomické rovnice, výsledky
zadrujte do Gaussovy srovnání

a) $x^3 + 27 = 0$

b) $x^6 - 1 = 0$

c) $x^4 - i - 1 = 0$

Veselé Vánoce ! 😊