

Repetitorium SS matematiky - 9. cvičení

①

Konzultace & domácí cvičení probíhají v MS Teams 16.12.2020.

Do pátku 18.12.2020 je třeba nahrát do odevsdávárny:

- alespoň 1 varianta z každého
z příkladů 1-4

Komplexní čísla

Komplexní číslo je vyjádřeno tvarem $a+bi$ (algebraický tvar),

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a i je číslo, pro které platí $i^2 = -1$.

a - reálná část komplexního čísla

b - imaginární část komplexního čísla

i - imaginární jednotka

Jestliže platí $a=0$, mluvíme o reálném imaginárním číslu.

Komplexní čísla byla zavedena proto, abychom mohli řešit více matematických problémů, např. rovnici $x^2+1=0$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm i$$

• $x^2 - 4x + 13 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = \underline{\underline{2 \pm 3i}}$$

Všechna počítání pravidla fungují stejně jako u reálných čísel.

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$(a+bi) \cdot (c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$a+bi = c+di \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$$

Stejně fungují i pravidla pro mocniny:

$$z^m \cdot z^n = z^{m+n}, \quad (z^m)^n = z^{m \cdot n}, \quad (z_1 \cdot z_2)^m = z_1^m \cdot z_2^m$$

• $i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$ $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$
 $i^5 = i^4 \cdot i = i$...

Př. 1: Zapište jako komplexní číslo v algebraickém tvaru $(a+bi)$

a) $(2+3i) \cdot (1+i) - (2+i) \cdot (1-3i)$

b) $(\sqrt{2} + i\sqrt{3}) \cdot i\sqrt{6} - \sqrt{2} \cdot (2i\sqrt{2} - 3) + i \left(\frac{6}{\sqrt{6}} - \frac{6}{\sqrt{3}} \right)$

c) $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{50}$

Ke každému komplexnímu číslu z existuje číslo komplexně sdružené \bar{z} lišící se pouze o znaménko před imaginární částí

$$z = a + bi \quad \bar{z} = a - bi$$

- je-li řešením kvadratické rovnice komplexní číslo z , je jejím řešením také číslo \bar{z}

- platí $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$: $(a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2$

Tuto vlastnost využíváme při výškytu imaginární jednotky
ne jmenovateli zlomku

• $\frac{3i+2}{3-2i} = \frac{3i+2}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{9i+6i^2+6+4i}{9+4} = \frac{13i-6+6}{13} = \underline{\underline{i}}$

Př. 2: Zapište jako komplexní číslo v algebraickém tvaru $(a+bi)$ ⁽³⁾

a) $\frac{3+4i}{2-5i}$

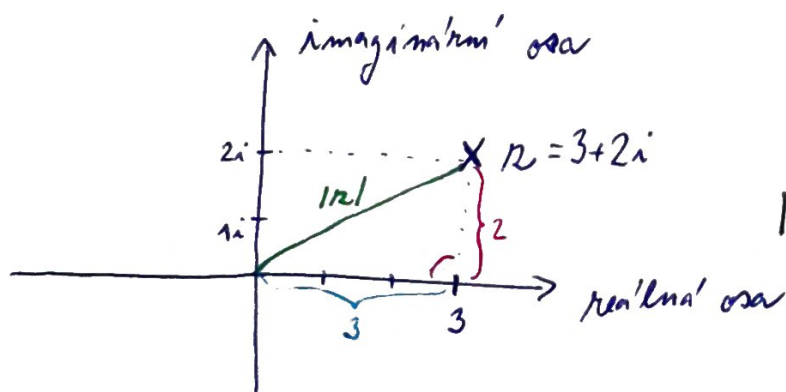
b) $\frac{2-i}{-3+i} - \frac{1+2i}{1-3i}$

c) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{-2} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$

d) $\frac{\frac{i}{2-i} + \frac{1}{i}}{1 + \frac{1}{2i+1}}$

Geometrické znázornění komplexních čísel

Komplexní čísla lze znázornit jako body Gaussovy roviny



$$z = 3 + 2i$$
$$|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \underline{\underline{\sqrt{13}}}$$

Absolutní hodnota komplexního čísla je jeho vzdálenost

od počátku roviny. Počítáme ji pomocí Pythagorovy věty,

platí pro $z = a+bi$ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Př. 3: Určete absolutní hodnotu komplexního čísla z (nejprve převedte na algebraický tvar)

a) $z = \frac{1+2i}{2-i} + 1-2i$

b) $z = \frac{i}{\sqrt{3} + i\sqrt{2}}$

Príponáme, že absolútna hodnota reálnych čísel je rovná jej vzdialenosti

• $|x - 5| = 2$



$K = \{3, 7\}$

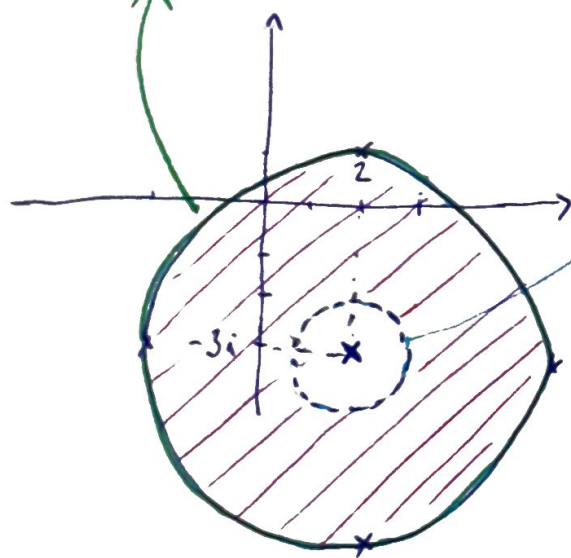
„ vzdialenosť x od 5 je rovná 2 ”

Stejně tak to platí u komplexních čísel, pouze místo číselné osy využijeme Gaussov rovinu

• $1 < |z + 3i - 2| \leq 4$

$1 < |z - (2 - 3i)| \leq 4$

• vzdialenosť z od čísla $2 - 3i$ je väčší než 1 a menší nebo rovná 4



Riešením je medzi kruží koncentrických kružnic, menší má polomer 1 a nemí zahrnúť u riešení, väčší má polomer 4 a patrí do riešení záloh.

Př. 4. Znárodnite u Gaussove rovine viedma z , pro která platí:

a) $|1 + i| \geq |z| > \frac{1}{2}$

b) $|z - i| \geq |z + 1 - 2i|$

c) $|z| \geq 1 \wedge |z - i| \geq |z| \wedge |z - 1| \geq 1$
 „ národnite ”