Poznámky ke cvičením z teorie množin

Helena Durnová

19. listopadu 2020

Obsah

Kapitola 1

Cvičení 1: Úvodem k tématu, ač zdánlivě mimo téma: nekonečno kolem nás

Teorie množin je matematická disciplína, která se stala základem veškerých matematických disciplín a od 50. let 20. století významně ovlivnila vyučování matematice i na základních školách. Dnes se v některých pojetích didaktiky matematiky vracíme k intuici (zejména se tento přístup hodí v geometrii, kde je názornost ve dvojrozměrném a trojrozměném prostoru podstatná).[1]

Základním předpokladem k pochopení vět uvedených ve skriptech E. Fuchse je ochota připustit, že nekonečna můžeme srovnávat nekonečna. Připusti, že něco "trvá do nekonečna"nebo to "nikdy neskončí", že se něco bude "opakovat do nekonečna", není samo o sobě tak těžké jako podívat se na nekonečno "shora". To je to skutečné nekonečno (actual infinity, werkelijke oneindigheid, ale aktuelle Unendlichkeit, aktuální nekonečno). Příkladů toho druhého — tzv. potenciálního — nekonečna najdete jistě řadu: nekonečný příběh; je vesmír konečný?, mám Ti to opakovat do nekonečna? — a skryto je i ve výrazech jako navždy.

S úvahami o nekonečnu se můžeme setkat už u poměrně malých dětí. Vyskytují se v pohádkách, např. Jostein Gaarder, *Kouzelný kalendář*; též *Nekonečný příběh*, …— co ještě?

Otázka k zamyšlení: Kdy jste se setkali s nekonečnem? (Např. sami jako děti; při praxi ve škole; při aktivitách s dětmi - výlety, tábory; v pohádkách a bájích — uveďte některé; při výuce matematiky na ZŠ / SŠ; při studiu

[1] Mimochodem, věděli jste, že děti, které chodí do školy pěšky nebo jezdí MHD, mají lepší prostorovou představivost než děti, které rodiče všude vozí autem? Věděli jste, že

matematiky na VŠ: limita, nekonečné množiny — které znáte?, ...).

Částečně intuitivní úvahy o nekonečně velkém, eventuálně nekonečně malém

- Úvahy o nekonečně velkých množinách: které nekonečno je větší?
- Mikuláš Kusánský: nekonečný vesmír
- podle Galilea Galileiho nemá porovnávání nekonečně velkých množin smysl
- úvahy o nekonečně malých veličinách – G. W. Leibniz a I. Newton – 2. krize matematiky

Konstrukce číselných oborů

- Peanovy axiomy — „z ničeho“ vytvoříme přirozená čísla; uspořádání, operace; jaká je to struktura?
- konstruujeme dále: kartézský součin $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, rozklad na třídy, operace na reprezenantech tříd
- vyšlo to, zkusíme ještě jednou: kartézský součin $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, rozklad na třídy, operace na reprezenantech tříd
- teď už to nevyjde; ale máme $\mathbb{Q}$: běžné uspořádání na této množině je *husté*

O nekonečnu vážně i nevážně

- Hilbertův hotel
- ekvivalence množiny celých čísel s množinou přirozených čísel (a jiné)

Podle Bolzana

- - Spinoza tvrdí, že nekonečno je to, co nelze zvětšit
- - Hegel definuje pojem *kvalitativní nekonečno*
- - Cauchy tvrdí, že nekonečno je proměnná, která neomezeně roste

1.1 Úkoly k vypracování: Cvičení 1

- Vymyslete výraz tak, aby jeho limita byla rovna nějakému danému číslu (reálnému).
- vymyslete předpis pro bijektivní zobrazení množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{Z}$ a naopak.
- Četba ze skript E. Fuchse *Teorie množin pro učitele*: Kapitola IV, Historický vývoj teorie množin, oddíl 1. Vývoj pojmu nekonečno. Dílo B. Bolzana. (Hledejte odpovědi na otázku: Jak definují pojem nekonečna B. Spinoza, Hegel, Cauchy?)
- Doplňková četba: Bedřich Pospíšill, *Nekonečno v matematice.*

Kapitola 2

Cvičení 2: Elementární teorie množin, používaná symbolika

Tuto teorii znáte již z předmětu *Základy matematiky.* Patří sem pojmy jako průnik množin, sjednocení množin, doplněk množiny, Vennovy diagramy, de Morganova pravidla, ...

Uspořádané množiny znáte z předmětu *Algebra 1.*

Uveďme několik samozřejmých tvrzení:

- Množina je libovolný soubor prvků. Prostě naprosto libovolný, nemusí mít navenek společného vůbec nic, jen to, že patří do téže množiny.
- Uspořádaná množina je libovolná množina, na níž je definováno uspořádání.
- Uspořádání je relace na množině, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.
- Uspořádanou množinu lze výhodně reprezentovat hasseovským diagramem.

2.1 Kontrolní otázky

1. Dokažte, že platí:

   (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

   (b) $A \div B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

   (c) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

   (d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(e) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

(f) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

2. Rozhodněte, zda pro množinu A a systém konečně mnoha množin $B_i (i \in I)$ platí pro libovolné $i \in I$ následující tvrzení. Pokud ano, tvrzení dokažte, pokud ne, uveďte protipříklad

   (a) $A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} A \setminus B_i$,

   (b) $A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} A \setminus B_i$,

2.2 Úkoly k vypracování: Cvičení 2

- nebyly zadány; dobrovolně si zkuste odpovědět na kontrolní otázky

Kapitola 3

Cvičení 3: Součet a součin uspořádaných množin

3.0.1 Kontrolní otázky

1. Dokažte, že platí:
   (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
   (b) $A \div B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$
   (c) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
   (d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
   (e) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
   (f) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

2. Rozhodněte, zda pro množinu A a systém konečně mnoha množin $B_i (i \in I)$ platí pro libovolné $i \in I$ následující tvrzení. Pokud ano, tvrzení dokažte, pokud ne, uveďte protipříklad
   (a) $A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} A \setminus B_i$,
   (b) $A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} A \setminus B_i$,

3. Součet uspořádaných množin
   (a) Definujte součet uspořáddaných množin.
   (b) Zvolte si dvě uspořádané množiny a určete jejich součet.
   (c) Popište uspořádání na této nově vzniklé množině a najděte k němu uspořádání duální.
   (d) Ověřte, že relace, které jste definovali, jsou uspořádání

4. Součin uspořádaných množin

    (a) Definujte součin uspořáddaných množin.

    (b) Zvolte si dvě uspořádané množiny a určete jejich součin.

    (c) Popište uspořádání na této nově vzniklé množině a najděte k němu uspořádání duální.

    (d) Ověřte, že relace, které jste definovali, jsou uspořádání

5. Definujte pojem *lexikografické uspořádání*. Vysvětlete definici vlastními slovy a uveďte alespň 2 příklady množiny a jejího lexikografického uspořádání.

3.0.2 Úkoly k vypracování: Cvičení 3

- Zvolte si dvě uspořádané množiny o třech až pěti prvcích a určete oba možné součty a oba možné součiny

Kapitola 4

Cvičení 4: Georg Cantor a jeho práce

Četba původních Cantorových článků je poměrně obtížná. Například pro sledování argumentace v článku „O jedné vlastnosti souhrnu všech reálných algebraických čísel“ je potřeba si uvědomit, co víme o tom, jak vypadají *reálné* kořeny polynomických rovnic s celočíselnými koeficienty.

Opakování:

- Kolik reálných kořenů může mít algebraická rovnice s celočíselnými kořeny? Jak vypadají?
- Kvadratická rovnice: vzoreček; kubická rovnice: Cardanovy vzorce; rovnice 4. stupně: lze je vyjádřit analyticky
- Souvislost existence reálných kořenů s matematickou analýzou a grafem funkce
- Další speciální typy rovnic: reciproké, bikvadratické, ... - viz předmět MA0011 Algebra 3
- Rovnice pátého a vyššího stupně *obecně* neumíme řešit analyticky

4.1 Kontrolní otázky

- Rovnice 5. stupně neumíme řešit analyticky — a jak to jde dohromady s postupy jako Hornerovo schéma? Vysvětllete.
- Odvoďte vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice.

4.2 Úkoly k vypracování

Zpracujte (velmi stručně) životopis některého z níže uvedených matematiků. Říkejte o nich jen to, čemu sami rozumíte. Neopisujte ze skript.

- János Bolyai
- L. E. J. Brouwer
- Cesare Burali-Forti
- Richard Dedekind
- P. G. L. Dirichlet
- Gottlob Frege
- Gerhard Gentzen
- Felix Haussdorff
- Hans Hahn
- David Hilbert
- Felix Klein
- Leopold Kronecker
- Nikolaj Lobačevski
- Hermann Minkowski
- Giuseppe Peano
- Henri Poincaré
- Bernhard Riemann
- Bertrand Russell
- Alfred Tarski
- Ernst Zermelo
- Max Zorn

Kapitola 5

Cvičení 5: Životopisy matematiků

Zazněly tyto životopisy:

- L. E. J. Brouwer
- Richard Dedekind
- P. G. L. Dirichlet
- Felix Haussdorff
- Hans Hahn
- David Hilbert
- Felix Klein
- Henri Poincaré
- Bernhard Riemann
- Bertrand Russell
- Alfred Tarski
- Ernst Zermelo
- Max Zorn

5.0.1 Úkoly k vypracování: Cvičení 5

- Četba: Kapitola I, Logická výstavba matematických teorií

Kapitola 6

Cvičení 6:: Axiom výběru a dobré uspořádání

Dobré uspořádání znáte už z algebry (poset — částečně uspořádaná množina

- poset — částečně uspořádaná množina (partially ordered set)
- coset —
- woset — dobře uspořádaná množina (well-ordered set)

Axiomu výběru je věnována celá 4. podkapitola Kapitoly II skript. V ní je uvedeno i několik vět s axiomem výběru ekvivalentních: Haussdorffovat věta, Zermelova věta a Zornovo lemma. Všechny tři formulace je dobré se naučit.

6.0.1 Kontrolní otázky

1. Definujte pojmy řetězec a maximální řetězec.
2. Uveďte příklad řetězce, který není dobře uspořádaní.
3. Uspořádání množiny přirozených čísel
   (a) Popište vlastními slovy tzv. běžně uspořádané množiny přirozených čísel a uspořádaných k němu duální.
   (b) Určete, které z těchto uspořádání je dobré.
4. Uspořádání množiny celých čísel
   (a) Definujte dobré uspořádání na množině celých čísel.
   (b) Kterou množinu nelze dobře uspořádat?

(c) Které dobře uspořádané množiny jsou také úplně uspořádané?

5. Popište, jak lze dobře uspořádat množinu celých čísel.

6. Kolik existuje izomorfismů mezi dvěma dobře uspořádanými množinami? Své tvrzení zdůvodněte.

7. Lze každou množinu dobře uspořádat?

8. Uveďte příklad úplně uspořádané množiny, která není dobře uspořádaná a příklad dobře uspořádané množiny, která není úplně uspořádaná.

6.0.2 Úkoly k vypracování: Cvičení 5

- Četba: Kapitola I, Logická výstavba matematických teorií (znovu, skoro nikdo to asi nestihl)
- Najděte (např. ve svých poznámkách k předmětům algebra, geometrie, matematická analýza) příklady existenčního a konstruktivního důkazu.
- Najděte příklad dobrého uspořádání množiny přirozených čísel, které není izomorfní s běžným uspořádáním této množiny $(\mathbb{N}, \leq)$.