

Trojúhelník

Irena Budínová

Na prvním stupni:

- Trojúhelník se zavádí jako tvar.
- Žáci se seznámí se základními pojmy: strany, vrcholy, druhy trojúhelníků.
- Konstrukce trojúhelníku podle věty sss.

Různé definice pojmu trojúhelník:

Jsou dány tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce.

1. Trojúhelník ABC je průnik (společná část) polorovin ABC, ACB a BCA. (Lze ukázat pomocí barevných průhledných fólií.)
2. Trojúhelník ABC je uzavřená lomená čára ABC sjednocená se svojí vnitřní oblastí.
3. Trojúhelník ABC je množina všech bodů X v rovině, pro které platí, že X je bodem úsečky AY a bod Y protíná úsečku BC.

Základní pojmy:

Vrcholy \triangle ... body A, B, C

Strany \triangle ... úsečky AB, BC, CA

Vnitřní úhly ... úhly BAC, ABC, BCA. Každý \triangle je podmnožinou každého svého vnitřního úhlu.

Vnější úhly ... vedlejší úhly k úhlům vnitřním.

Na přenáše budeme dokazovat následující věty:

1. Součet vnitřních úhlů \triangle je úhel přímý. (Důkaz pomocí geometrické konstrukce i pomocí překládání papíru.)

2. Vnější úhel \triangle je roven součtu vnitřních úhlů při zbývajících vrcholech. (Důkaz pomocí geometrické konstrukce i pomocí papírového modelu – utrheme 2 úhly a přilepíme k zbylému vnějšímu.)
3. V \triangle leží proti shodným stranám shodné vnitřní úhly. (Kolmice z C, věta ssu)
4. V \triangle leží proti delší straně větší vnitřní úhel.
5. Proti shodným úhlům leží v \triangle shodné strany. (Důkaz nepřímý, s využitím věty 4.)
6. Proti většímu vnitřnímu úhlu leží větší strany. (Důkaz analogicky jako u věty 5.)
7. **Trojúhelníková nerovnost:** Součet libovolných dvou stran trojúhelníku je větší než strana třetí. (Vyvození na ZŠ – experimentem, důkaz doplněním na rovnoramenný \triangle .)

Střední příčka

Střední příčka trojúhelníku je **úsečka**, jejímiž krajními body jsou středy stran tohoto trojúhelníku.

Vlastnosti:

1. Střední příčka je rovnoběžná se stranou, jejímž středem neprochází.
2. Velikost střední příčky je rovna polovině velikosti s ní rovnoběžné strany.

D. viz obrázek

1. Sestrojíme střed strany BC, ozn. K.
2. Tímto bodem vedeme rovnoběžku se stranou AB, průsečík se stranou AC označíme L.
3. Bodem K vedeme rovnoběžku s AC, průsečík označíme M.
4. Sestrojíme úsečku KM.

Dokážeme, že všechny čtyři trojúhelníky jsou shodné (po dvojicích).

Osa strany

Osa strany trojúhelníku je **přímka**, která prochází středem strany a je ke straně trojúhelníku kolmá.

Vlastnosti: Všechny tři osy stran každého trojúhelníku se protínají v jednom bodě. Tento bod je středem kružnice trojúhelníku opsané.

Bod je vnitřním bodem trojúhelníku v trojúhelníku ostroúhlém, bodem hranice v trojúhelníku pravoúhlém (střed přepony), vnějším bodem v trojúhelníku tupoúhlém.

D. viz obrázek

Sestrojíme osy dvou stran, ty jsou různoběžné (kolmice k různoběžným přímkám), jejich průsečík označíme S. Dokážeme, že tímto bodem prochází i třetí osa strany trojúhelníku. Využijeme vlastnosti, že každý bod osy úsečky má od jejích krajních bodů stejnou vzdálenost.

Osa vnitřního úhlu

Osa vnitřního úhlu AVB trojúhelníku ABC je polopřímka VX, pro kterou platí, že úhel AVX a úhel BVX jsou shodné.

Vlastnosti: Všechny tři osy vnitřních úhlů každého trojúhelníku se protínají v jednom bodě. Tento bod je středem kružnice trojúhelníku vepsané. Je vždy vnitřním bodem trojúhelníku.

D. viz obrázek

Sestrojíme osy dvou vnitřních úhlů trojúhelníku, průsečík označíme O a dokážeme, že tímto bodem prochází osa třetí. Využijeme vlastnosti, že každý bod osy úhlu má od jeho ramen stejnou vzdálenost.

Těžnice

Těžnice trojúhelníku je **úsečka**, jejímiž krajními body jsou vrchol a střed protější strany.

Vlastnosti:

1. Těžnice trojúhelníku se protínají v jednom bodě - těžišti.
2. Těžiště dělí těžnici v poměru 2 : 1. Vzdálenost těžiště od vrcholu je dvakrát větší než vzdálenost těžiště od středu protější strany.

D. viz obrázek

Sestrojíme průsečík dvou těžnic, jejich průsečík označíme T a dokážeme, že tímto bodem prochází i těžnice třetí.

Výška

Výška trojúhelníku příslušná ke straně je

- kolmice k přímce obsahující tuto stranu a procházející protilehlým vrcholem
- úsečka na této kolmici ohraničená tímto vrcholem a patou kolmice k prodloužené straně
- velikost této úsečky.

Vlastnosti: Všechny tři přímky, ve kterých leží výšky trojúhelníku se protínají v každém trojúhelníku v jednom bodě. Tento bod je vnitřním bodem trojúhelníku v trojúhelníku ostroúhlém, bodem hranice v trojúhelníku pravoúhlém (vrchol u pravého úhlu), vnějším bodem v trojúhelníku tupoúhlém.

D. viz obrázek

K důkazu využijeme věty o osách stran trojúhelníku. Vrcholy trojúhelníku ABC vedeme rovnoběžné přímky s protějšími stranami, dostaneme trojúhelník $A_1B_1C_1$. Na osách touho trojúhelníku leží výšky stran trojúhelník ABC.