Teorie množin: otázky

Helena Durnová

Jaro 2017

Tento souhrn slouží k tomu, abyste si sami odpovědi na uvedené otázky našli, např. ve skriptech E. Fuchse *Teorie množin pro učitele* (v různých vydáních; můžete použít libovolné vydání). Jako pomůcka a uvedení do problematiky může dobře posloužit kniha Bedřicha Pospíšila *Nekonoečno v matematice*, ev. jiné populárně zaměřené knihy o nekonečnu. Pojmy a poznatky uvedené v závorkách jsou nepovinné. Pokud máte jakékoliv připomínky k textu, pište na adresu:

`hdurnova@ped.muni.cz`

1 Vstupní test, aneb co byste už měli vědět

- 0,99 periodických = 1,00 atp.
- konstrukce číselných oborů (okruh ke SZZ (Bc.))
- definovat sjednocení, průnik, kartézskýc součin dvou množin, systém podmnožin 2^A, odvodit vzorec pro výpočet počtu podmnožin dané (konečné) množiny
- (samozřejmě) definovat pojem relace (jako podmožiny kartézského součinu) mezi množinami, inverzní relace, skládání relací; dále pro relace na množině a její vlastnosti: reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní; ekvivalence a rozklad, uspořádání (vč. hasseovských diagramů a ponětí, jak je konstruovat)
- definovat homomorfismus (lineární zobrazení), dále izomorfismus dvou množin: zachování struktury operace (bijektivní lineární zobrazení) nebo relace - pořádkový izomorfismus)
- definovat pojmy uspořádaná množina, úplně uspořádaná množina
- (samozřejmě) neplést si pojmy asociativní a komutativní (operace!!!! nikoliv relace), distributivní zákon (ptáme se na jeho platnost, když máme dvě operace)
- (samozřejmě) definovat zobrazení množiny na množinu a speciální případy: surjekce, injekce, bijekce; též inverzní zobrazení

- výroková logika: logické spojky "a zároveň" (konjunkce), "nebo" (disjunkce), "když - pak" (implikace), "právě tehdy když" (ekvivalence); negace složených výroků a výroků s kvantifikátory
- důkazy: přímý, nepřímý, sporem, matematickou indukcí

2 Výstupní test, neboli zápočtový

Definice: kromě přesné definice je žádoucí promyslet si vhodné příklady k jednotlivým pojmům:

- sjednocení a průnik libovolného počtu množin (pomocí indexové množiny)
- kartézský součin libovolného počtu množin (pomocí indexové množiny)
- rovnost množin
- ekvivalence množin
- spočetná množina, nejvýše spočetná množina, nespočetná množina
- součet uspořádaných množin
- součin uspořádaných množin
- součet kardinálních čísel
- součin kardinálních čísel
- uspořádání kardinálních čísel, relace $\leq$ pro kardinální čísla
- mocnina kardinálních čísel
- dobře uspořádaná množina
- řetězec, konečný řetězec
- začátek, vlastní začátek
- mohutnost kontinua ($c := 2^{\aleph_0}$)
- ordinální typ
- součet ordinálních typů (jako součet uspořádaných množin)
- součin ordinálních typů (jako součin uspořádaných množin)
- mocnina ordinálního typu a její zpřesnění pomocí transfinitní indukce
- ordinální číslo
- uspořádání ordinálních čísel, relace $\leq$ pro ordinální čísla

- množina všech ordinálních čísel menších než α
- ordinální číslo limitní a izolované
- množina všech spočetných ordinálních čísel (k tomu: počáteční ordinální číslo mohutnosti m)
- (definice množiny $W(\alpha)$ jako množiny všech ordinálních čísel β takových, že $\beta < \alpha$)
- (alefy: definice 6.8 na str. 101)
- ($Z(m)$ - množina všech ordinálních čísel mohutnosti m; $\omega(m)$ -počáteční ordinální číslo mohutnosti m) - toto ord. číslo je vždy limitní)

Věty: kromě přesného znění je dobré si promyslet vhodné příklady a protipříklady.

- vlastnosti sjednocení a průnik libovolného počtu množin (analogie asociativního zákona, komutativního zákona, distributivních zákonů, de Morganových pravidel,...)
- vlastnosti zobecněného kartézského součinu (např. vzhledem k průniku a sjednocení)
- vlastnosti dobře uspořádaných množin (např. jednoačnost izomorfismu uspořádaných množin)
- vlastnosti součtu a součinu uspořádaných množin (platí asociativní zákon? komutativní zákon? distributivní zákon? jsou relace $G + H$ a $G \cdot H$ definované na množinách uspořádání? co je součtem a součinem řetězců?)
- nekonečná množina obsahuje vlastní podmnožinu, která je nekonečná
- nespočetná množina obsahuje spočetnou podmnožinu takovou, že rozdíl původní množiny a této podmnožiny je nespočetná množina
- kartézský součin dvou (tří, ... spočetně mnoha) spočetných množin je spočetná množina - uveďte příklady množin, které jsou na základě platnosti této věty konečné, víte-li, že množina přirozených čísel je spočetná
- porovnávání kardinálních čísel (Cantor-Bernsteinova věta; libovolnou množinu kardinálních čísel lze uspořádat; libovolná dvě kardinální čísla jsou srovnatelná, tedy každá množina kardinálních čísel tvoří řetězec)
- Cantorova věta (k libovolnému kardinálnímu číslu existuje větší kardinální číslo)
- množina všech reálných čísel v intervalu $(0, 1)$ je nespočetná; množina všech reálných čísel je s touto množinou ekvivalentní; POZOR, to neznamená, že neexistuje mohutnější množina než $\mathbb{R}$

- sčítání nekonečných kardinálních čísel (např. mohutnost sjednocení spočetné a nespočetné množiny); uveďte příklady nespočetných množin
- množina je nekonečná právě tehdy, když obsahuje vlastní podmnožinu, která je s ní ekvivalentní
- pro sčítání a násobení kardinálních čísel platí komutatovní a asociativní zákony a také distributivní zákony (pravý i levý)
- vztahy pro "umocňování" kardinálních čísel a pravidla pro počítání s mocninami pro kardinální čísla
- pro sčítání a násobení ordinálních typů platí asociativní zákony
- sčítání a násobení ordinálních typů obecně není komutativní
- pro sčítání a násobení ordinálních typů platí levý (ale ne pravý) distributivní zákon
- množina $W(\alpha)$všech ordinálních čísel menších než α má ordinální typ α
- každá množina ordinálních čísel je dobře uspořádaná
- pro nerovnosti s ordinálními čísly platí obdobná pravidla jako pro nerovnosti s reálnými čísly (pozor, přičítat se musí z téže strany, protože sčítání ordinálních čísel obecně není komutativní)
- (každé nekonečné číslo je některým alefem; každé ordinální číslo je indexem některého alefu)
- každá množina kardinálních čísel je dobře uspořádaná
- (Pro každé ordinální číslo α platí $\aleph\alpha \cdot \aleph\alpha = \aleph\alpha$)
- součet i součin dvou nekonečných kardinálních čísel je větší z těchto dvou kardinálních čísel.
- (pro každé ordinální číslo α platí $card(Z(\aleph_\alpha) = \aleph_{\alpha+1})$
- (množiny $Z(\aleph_\alpha)$ a $W(\omega_{alpha+1})$ mají stejné kardinální číslo a stejný ordinální typ)

Vysvětlete, co znamená:

- "zákon vyloučeného třetího" (tertium non datur)
- antinomie teorie množin
- axiomatická metoda (axiomatická teorie)
- naivní teorie množin

- transfinitní indukce (rozšíření matematické indukce pro dobře uspořádané množiny)
- algebraické číslo
- transcendentní číslo
- řekneme-li, že neexistuje množina všech kardinálních čísel (a že tedy třída všech kardinálních čísel)
- řekneme-li, že neexistuje množina všech ordinálních čísel (a že tedy třída všech ordinálních čísel)
- řekneme-li "pohlcovací zákony"

Vysvětlete, jaký je rozdíl mezi:

- ekvivalencí a rovností množin
- množinou a třídou
- důkazem konstruktivním a existenčním
- dobře uspořádanou množinou, úplně uspořádanou množinou, lineárně uspořádanou množinou, řetězcem
- ordinálním číslem izolovaným a limitním
- ordinálním číslem a ordinálním typem

Okruhy k zápočtu

- Jak se matematici v minulosti vajdařovali k nekonečnu a srovnávání nekonečně velkých množin? (Uveďte, co vám utkvělo v paměti - nápověda: Galileo, Spinoza, Bolzano, Cantor, Kronecker, ...)
- Vysvětlete rozdíl mezi ekvivalencí a rovností množin (definujte oba pojmy, uveďte příklady).
- Napište, co víte o nekonečných kardinálních číslech; zejména definujte pojmy spočetná a nespočetná množina. Dokažte spočetnost množin $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a naznačte důkaz nespočetnosti množiny $\mathbb{R}$. Uveďte, jaké znáte spočetné množiny. Jaké je největší kardinální číslo?
- Napište, co víte o ordinálních typech a ordinálních číslech; zejména uveďte, jaký je mezi nimi rozdíl (ord. typ vs. ord. číslo, ...)
- Axiom výběru a věty s ním ekvivalentní — Zermelova věta, Hausdorffova věta, Zornovo lemma — formulujte jejich znění

References

[1] Bečvář, J. a kol. 1982. *Seznamujeme se s množinami*. Praha: SNTL

[2] Bukovský, L. 1979. *Množiny a všeličo okolo nich*, Bratislava: Veda.

[3] Fuchs, E. 2000. *Teorie množin pro učitele*, Brno: MU.

[4] Pospíšil, B. 1949. *Nekonečno v matematice*. Praha: JČMF. Dostupné na `DML.CZ`