

Obsah

1	Z historie teorie množin	1
1.1	Cvičení 1: Úvodem k tématu, ač zdánlivě mimo téma: nekonečno kolem nás	1
1.1.1	Úkoly k vypracování: Cvičení 1	3
1.2	Cvičení 2: Elementární teorie množin, používaná symbolika . .	3
1.2.1	Kontrolní otázky	3
1.2.2	Úkoly k vypracování: Cvičení 2	4

Poznámky ke cvičením z teorie množin

Helena Durnová

29. října 2020

Kapitola 1

Z historie teorie množin

1.1 Cvičení 1: Úvodem k tématu, ač zdánlivě mimo téma: nekonečno kolem nás

Teorie množin je matematická disciplína, která se stala základem veškerých matematických disciplín a od 50. let 20. století významně ovlivnila vyučování matematice i na základních školách. Dnes se v některých pojetích didaktiky matematiky vracíme k intuici (zejména se tento přístup hodí v geometrii, kde je názornost ve dvojrozměrném a trojrozměrném prostoru podstatná).¹

Základním předpokladem k pochopení vět uvedených ve skriptech E. Fuchse je ochota připustit, že nekonečna můžeme srovnávat nekonečna. Připusti, že něco "trvá do nekonečna" nebo to "nikdy neskončí", že se něco bude "opakovat do nekonečna", není samo o sobě tak těžké jako podívat se na nekonečno "shora". To je to skutečné nekonečno (actual infinity, werkelijke oneindigheid, ale aktuelle Unendlichkeit, aktuální nekonečno). Příkladů toho druhého — tzv. potenciálního — nekonečna najdete jistě řadu: nekonečný příběh; je vesmír konečný?, mám Ti to opakovat do nekonečna? — a skryto je i ve výrazech jako navždy.

S úvahami o nekonečnu se můžeme setkat už u poměrně malých dětí. Vyskytují se v pohádkách, např. Jostein Gaarder, *Kouzelný kalendář*; též *Nekonečný příběh*, ... — co ještě?

Otázka k zamyšlení: Kdy jste se setkali s nekonečnem? (Např. sami jako děti; při praxi ve škole; při aktivitách s dětmi - výlety, tábory; v pohádkách a bájích — uveďte některé; při výuce matematiky na ZŠ / SŠ; při studiu matematiky na VŠ: limita, nekonečné množiny — které znáte?, ...).

¹Mimochodem, věděli jste, že děti, které chodí do školy pěšky nebo jezdí MHD, mají lepší prostorovou představivost než děti, které rodiče všude vozí autem? Věděli jste, že

Částečně intuitivní úvahy o nekonečně velkém, eventuálně nekonečně malém

- Úvahy o nekonečně velkých množinách: které nekonečno je větší?
- Mikuláš Kusánský: nekonečný vesmír
- podle Galilea Galileiho nemá porovnávání nekonečně velkých množin smysl
- úvahy o nekonečně malých veličinách – G. W. Leibniz a I. Newton – 2. krize matematiky

Konstrukce číselných oborů

- Peanovy axiomy — „z ničeho“ vytvoříme přirozená čísla; uspořádání, operace; jaká je to struktura?
- konstruuje dále: kartézský součin $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, rozklad na třídy, operace na reprezentantech tříd
- vyšlo to, zkusíme ještě jednou: kartézský součin $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, rozklad na třídy, operace na reprezentantech tříd
- teď už to nevyjde; ale máme \mathbb{Q} : běžné uspořádání na této množině je *husté*

O nekonečnu vážně i nevážně

- Hilbertův hotel
- ekvivalence množiny celých čísel s množinou přirozených čísel (a jiné)

Podle Bolzana

- - Spinoza tvrdí, že nekonečno je to, co nelze zvětšit
- - Hegel definuje pojem *kvalitativní nekonečno*
- - Cauchy tvrdí, že nekonečno je proměnná, která neomezeně roste

1.1.1 Úkoly k vypracování: Cvičení 1

- Vymyslete výraz tak, aby jeho limita byla rovna nějakému danému číslu (reálnému).
- vymyslete předpis pro bijektivní zobrazení množiny \mathbb{N} na množinu \mathbb{Z} a naopak.
- Četba ze skript E. Fuchse *Teorie množin pro učitele*: Kapitola IV, Historický vývoj teorie množin, oddíl 1. Vývoj pojmu nekonečno. Dílo B. Bolzana. (Hledejte odpovědi na otázku: Jak definují pojem nekonečna B. Spinoza, Hegel, Cauchy?)
- Doplnková četba: Bedřich Pospíšill, *Nekonečno v matematice*.

1.2 Cvičení 2: Elementární teorie množin, používaná symbolika

Tuto teorii znáte již z předmětu *Základy matematiky*. Patří sem pojmy jako průnik množin, sjednocení množin, doplněk množiny, Vennovy diagramy, de Morganova pravidla, ...

Uspořádané množiny znáte z předmětu *Algebra 1*.

Uvedme několik samozřejmých tvrzení:

- Množina je libovolný soubor prvků. Prostě naprosto libovolný, nemusí mít navenek společného vůbec nic, jen to, že patří do téže množiny.
- Uspořádaná množina je libovolná množina, na níž je definováno uspořádání.
- Uspořádání je relace na množině, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.
- Uspořádanou množinu lze výhodně reprezentovat hasseovským diagramem.
-

1.2.1 Kontrolní otázky

1. Dokažte, že platí:

$$(a) \quad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

- (b) $A \div B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$
- (c) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
- (d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- (e) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
- (f) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

2. Rozhodněte, zda pro množinu A a systém konečně mnoha množin $B_i (i \in I)$ platí pro libovolné $i \in I$ následující tvrzení. Pokud ano, tvrzení dokažte, pokud ne, uveďte protipříklad

- (a) $A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} A \setminus B_i,$
- (b) $A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} A \setminus B_i,$

1.2.2 Úkoly k vypracování: Cvičení 2

- nebyly zadány; dobrovolně si zkuste odpovědět na kontrolní otázky

1.3 Cvičení 3: Součet a součin uspořádaných množin

1.3.1 Kontrolní otázky

1. Dokažte, že platí:

- (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- (b) $A \div B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$
- (c) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
- (d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- (e) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
- (f) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

2. Rozhodněte, zda pro množinu A a systém konečně mnoha množin $B_i (i \in I)$ platí pro libovolné $i \in I$ následující tvrzení. Pokud ano, tvrzení dokažte, pokud ne, uveďte protipříklad

- (a) $A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} A \setminus B_i,$
- (b) $A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} A \setminus B_i,$

3. Součet uspořádaných množin

- (a) Definujte součet uspořádaných množin.
- (b) Zvolte si dvě uspořádané množiny a určete jejich součet.
- (c) Popište uspořádání na této nově vzniklé množině a najděte k němu uspořádání duální.
- (d) Ověřte, že relace, které jste definovali, jsou uspořádání

4. Součin uspořádaných množin

- (a) Definujte součin uspořádaných množin.
- (b) Zvolte si dvě uspořádané množiny a určete jejich součin.
- (c) Popište uspořádání na této nově vzniklé množině a najděte k němu uspořádání duální.
- (d) Ověřte, že relace, které jste definovali, jsou uspořádání

5. Definujte pojem *lexikografické uspořádání*. Vysvětlete definici vlastními slovy a uveďte alespň 2 příklady množiny a jejího lexikografického uspořádání.

1.3.2 Úkoly k vypracování: Cvičení 3

- Zvolte si dvě uspořádané množiny o třech až pěti prvcích a určete oba možné součty a oba možné součiny