Strategie podpory matematické gramotnosti SPk200 K 1 n d

Růžena Blažková

PdF MU Brno

Násobení přirozených čísel

Odborná podstata operace násobení

Vyvození násobení na ZŠ

Vlastnosti násobení přirozených čísel

Pamětné spoje

Násobení mimo obor násobilek

Písemné násobení

Historický algoritmus – gelosia (indické násobení)

Násobení přirozených čísel

- **Násobení čísel kardinálních**
- $|A| \cdot |B| = | A \times B |$

- **Kartézský součin dvou množin**
- $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{[x, y],\ x \in A \wedge\ y \in B\}$

Násobení přirozených čísel

- Sčítání několika sobě rovných sčítanců

  o o   o o   o o   o o   o o

- $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$
- $5 \cdot 2 = 10$

$$a \quad \cdot \quad b \quad = \quad c$$

činitel   činitel součin

Vlastnosti násobení v N

- ND – pro jakákoliv dvě přirozená čísla najdeme v množině všech přirozených čísel jejich součin
- K činitele můžeme zaměnit, součin se nezmění

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- A činitele můžeme sdružovat, součin se nezmění

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Např. $5 \cdot (9 \cdot 2) = 5 \cdot (2 \cdot 9) = (5 \cdot 2) \cdot 9$

Metodický postup

1. Vyvození násobení za základě sčítání několik stejných sčítanců
2. Pochopení významu operace, volba vhodných motivačních příkladů, znázornění spojů násobení
3. Zvládnutí základních spojů malé násobilky
4. Zvládnutí řady násobků čísel
5. Násobení mimo obor násobilek zpaměti
6. Písemné násobení

Vyvození vlastností

- Komutativnost
- čtyři po třech $4 \cdot 3 = 12$

o	**o**	**o**
o	o	o
o	o	o
o	o	o

Komutativnost

0	**0**	**0**	**0**
0	0	0	0
0	0	0	0

Komutativnost

- Tři po čtyřech
    - $3 \cdot 4 = 12$
    - $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$

Asociativnost

- **Násobení přirozených čísel je asociativní.** Činitele můžeme sdružovat, součin se nezmění, např.
- $(4 \cdot 2) \cdot 5 = 4 \cdot (2 \cdot 5)$
- obecně $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- $8 \cdot 5 = 4 \cdot 10 = 40$
- Asociativnosti násobení využíváme pro výhodnější počítání (součiny 10, 100, atd.) nebo při násobení mimo obor násobilek, např. $5 \cdot 40 = 5 \cdot (4 \cdot 10) = (5 \cdot 4) \cdot 10$

Násobení číslem 1

- Dědeček dal šesti vnukům po jednom jablku. Kolik jablek dal vnukům celkem?

A	B	C	D	E	F
1	1	1	1	1	1

- $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$
- Spoj $6 \cdot 1 = 6$ vyvodíme snadno, spoj $1 \cdot 6 = 6$ z komutativnosti násobení
- $6 \cdot 1 = 6, \quad 1 \cdot 6 = 6$
- obecně $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- Číslo 1 je neutrálním prvkem pro násobení.

Násobení číslem 0

- **Jestliže babička dala každému z pěti vnuků nula bonbónů, kolik bonbónů jim dala celkem?**
- **A B C D E**
- **0 0 0 0 0**

$$0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

- $5 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 5 = 0$
- Spoj $5 \cdot 0 = 0$ se vyvodí snadno, spoj $0 \cdot 5 = 0$ nelze znázornit, využijeme komutativnosti násobení
- obecně $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
- Číslo 0 je agresivním prvkem pro násobení.

Pomůcky a hry

- Podložky a drobné předměty
- Počty nohou zvířat
- Cukroví, buchty na plechu (pekáči)
- „Hvězdičky“
- Stovková tabule - ornamenty
- Karty
- Loto
- Domino

Pomůcky, hry

- Pexeso
- Bingo
- Pohybové hry – vyhledávání dvojic

Násobení mimo obor násobilek

- Zpaměti – dva typy příkladů
- 1. Násobení desítek
- $5 \cdot 70 = 5 \cdot (7 \cdot 10) = (5 \cdot 7) \cdot 10 = 70$

- 2. Násobení dvojciferných čísel (také velká násobilka
- $5 \cdot 13 = 5 \cdot (10 + 3) = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 3 = 50 + 15 = 65$

Písemné násobení

- **387**
- **· 6**

- **Písemné násobení jednociferným činitelem**
- 213 218 263 564
- · 3 3 3 3

Písemné násobení

- Písemné násobení dvojciferným činitelem
- 213
- · 30

- 213
- · 32

Historický algoritmus

- Indické násobení

Dělení přirozených čísel

- Dělení přirozených čísel je definováno jako inverzní operace k násobení, tj. jestliže pro přirozená čísla

$a, b, c \neq 0$ platí: $a \cdot b = c$, pak $c : a = b$, $c : b = a$.

- Např. $4 \cdot 3 = 12$, pak $12 : 4 = 3$. $12 : 3 = 4$

Názvy jednotlivých čísel:

- $a \quad : \quad b \quad = \quad c$
- dělenec dělitel podíl

Dělení na několik stejných částí

- Př. Dvanáct švestek rozdělte mezi čtyři děti tak, aby měly všechny stejně. Kolik švestek bude mít každé dítě?
- Postupně dáváme každému dítěti po jedné švestce, až všechny švestky vyčerpáme:

A	B	C	D
O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O

Dělení na stejné části

- Se slovním komentářem zapíšeme příklad:
- Kolik jsme rozdělovali švestek? 12
- Kolik bylo dětí? 4
- Kolik švestek má každé dítě? 3
- Zapíšeme příklad: $12 : 4 = 3$
- Podíl je počet prvků každé z částí.
- Odpověď: Každé dítě má 3 švestky.
- Zkouška: $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ nebo $4 \cdot 3 = 12$

Dělení podle obsahu

Př. Dvanáct sešitů rozdělte na hromádky po čtyřech. Kolik hromádek vytvoříte?

/ / / /   / / / /   / / / /

Zápis příkladu: $12 : 4 = 3$

Podíl je počet vytvořených skupin.

(Poznámka: příklad je stejný jako v předcházející úloze, avšak kontext je jiný)

Odpověď:

Zkouška: $4 + 4 + 4 = 12$ nebo $3 \cdot 4 = 12$

Zvláštní případy

- **Dělení číslem 1: 5 : 1 = 5, obecně $a : 1 = a$ (např. 5 jablek rozděl po jednom, kolik dětí podělíš?)**
- **Dělenec se rovná děliteli: 5 : 5 = 1, obecně $a : a = 1,\ a \neq 0$ (např. 5 jablek rozděl pěti dětem, kolik jablek bude mít každý?)**
- **Dělenec je roven nule: 0 : 5 = 0 obecně $0 : a = 0,\ a \neq 0$ (např. nula jablek rozděl pěti dětem, kolik jablek bude mít každé dítě?)**

Dělení nulou

- $5 : 0 = ???$
- $5 : 0 = 5$ zk. muselo by platit $5 \cdot 0 = 5$ – neplatí
- $5 : 0 = 0$ zk. muselo by platit $0 \cdot 0 = 5$ – neplatí

- $5 : 0 = x$ zk. muselo by platit $x \cdot 0 = 5$ – neplatí
- Nenajdeme přirozené číslo, pro které bychom po vydělení nulou mohli provést zkoušku správnosti

Problémy při pamětném dělení

- Nepochopení operace
- Chybně zafixované spoje
- Nepochopení souvislosti operací násobení a dělení
- 4 : 6 nejde
- Nula při dělení 3 : 0 = 3   3 : 0 = 0

Dělení se zbytkem

- Jestliže máme dvě přirozená čísla *a, b* taková, že *a* není násobkem *b*, pak k těmto číslům existují přirozená čísla *q, z* tak, že platí:

$$a = b \cdot q + z$$

kde *a* je dělenec , *b* je dělitel, *q* je neúplný podíl, *z* je zbytek.

Musí platit, že *b* je různé od nuly a zbytek musí být menší než dělitel

Předpokládané znalosti

- Násobení v oboru násobilek
- Nejblíže menší násobek daného čísla k danému číslu
- Dělení v oboru násobilek
- Odčítání, dočítání - určení zbytku

Dělení se zbytkem

- Motivace
- Dramatitace
- Grafické znázornění
- Zápis příkladu
- Zkouška

Dělení se zbytkem - vyvození

- Dělení na stejné části:
- 14 krychlí rozdělte mezi 3 děti, aby měly všechny stejně. (konkrétní činnosti

$$14 : 3 = 4 \quad \text{zb. } 2$$

- Zk. $3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14$
- Každé dítě má 3 krychle a 2 krychle zbydou

Dělení se zbytkem - vyvození

- Dělení podle obsahu:
- 14 krychlí rozdělte na hromádky po třech

$$14 : 3 = 4 \text{ zb } 2$$

Vytvoříme 4 úplné hromádky, 2 krychle zbydou

- Zk. $4 \cdot 3 + 2 = 12 + 2 = 14$

Problémy

- Nedostatečné zvládnutí předpokládaného učiva
- Zápis nejblíže menšího násobku:
- $55 : 8 = 48$, zb. 7
- Zápis nejblíže vyššího násobku:
- $55 : 8 = 7$ zb. 1
- Problém s čísly: $3 : 5$ – nejde
- Hrubá chyba při zápisu zkoušky:
- $3 \cdot 4 = 12 + 4 = 14$

Dělení mimo obor násobilek zpaměti

- Příklady typu 72 : 4
- Rozklad dělence na desetinásobek (dvacetinásobek,…) dělitele:
- 72 = 40 + 32 – obě čísla lze čtyřmi vydělit
- 96 : 3 = (90 + 6) : 3 = 30 + 2 = 32

- *toto učivo lze v rámci IVP vynechat*

Písemné dělení

- Jiný postup při algoritmu
- Směr vodorovný i svislý
- Předpokládá se zvládnutí veškerého předcházejícího učiva

Písemné dělení jednociferným dělitelem

- Jemná metodická řada příkladů s rostoucí náročností:
- a) dělení beze zbytku
- 69 : 3
- 75 : 5
- 153 : 3
- b) dělení se zbytkem
- c) čísla s nulami

Písemné dělení dvojciferným dělitelem

- Metodický postup je analogický dělení jednociferným dělitelem
- Volíme příklady jednodušší, např.
- Je možné v rámci podpůrných opatření nebo v rámci IVP vynechat
- Jako kompenzační pomůcku využít kalkulátor, avšak s porozuměním