3. Neurčitý integrál, určitý integrál

Def 3.1 Nechť *F(x)* a *f(x)* jsou definované na otevřeném intervalu *J*. Jestliže pro všechna $x \in J$ platí *F´(x) = f(x)*, říkáme, že *F(x)* je primitivní funkce k funkci *f(x)* na intervalu *J*. Množinu všech primitivních funkcí k funkci *f(x)* všech primitivních funkcí k funkci *f(x)* na intervalu *J* nazýváme neurčitým integrálem funkce *f(x)* a označujeme $\int f(x)dx$.

Funkce *f(x)* se nazývá **integrand**.

Věta 3.1 Platí:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad x \in J$$

Kde C $\in$ *Q* je tzv. **integrální konstanta**

Věta 3.2 Ke každé spojité funkci v int *J*, ∃ v tomto intervalu **primitivní funkce**.

Základní integrály:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C = \ln(kx)$

3. $\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int a^x dx = a^x \frac{1}{\ln a} + C \qquad a > 0; a \neq 1$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C \qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k = 0, \pm 1, ...$

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot gx + C \qquad x \neq k * t; k = 0, \pm 1, ...$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2 \qquad |x| < 1$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C = -\arg\cosh x + C \qquad x>1$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C_1 = \arg\sinh x + C_1$

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C_1 = -arc\cot gx + C_2$

13. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C_1$

14. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$ $\quad\quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

15. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$ $\quad\quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

16. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\cot ghx + C$

17. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = tghx + C$

18. $\int \frac{f'_{(x)}}{f_{(x)}} dx = \ln\left|f_{(x)}\right| + C$

Věta 3.3 Existují-li na otevřeném intervalu *J* neurčité integrály funkcí $f_1, \ldots, f_n(x)$ a jsou-li $c_1, \ldots, c_n$ libovolné konstanty, pak také na *J* existuje neurčitý integrál funkce: $c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x)$

a platí : $\int (c_1 f_1 + .. + c_n f_n) dx = c_1 \int f_1 dx + .. + c_n \int f_n dx$

Věta 3.4 **Metoda per partes** – Jestliže funkce u(x), v(x) mají na J spojité derivace, pak platí: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

Pozn. **Rekurentní vzorec**

a) $I_n = \int x^n e^x dx$ $\quad\quad u = x^n \quad v' = e^x$

$u' = nx^{n-1} \quad v = e^x$

$I_n = \int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$

$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$ $\quad\quad I_0 = e^x + C$

b) $I_{\acute{n}} = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} \sin x dx'$

$u = \sin^{n-1} x \quad v' = \sin x$

$u' = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \quad v = -\cos x$

$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos x \cos x dx$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-1} x dx + (n-1)\int \sin^n x dx$

$I_n = -\frac{1}{n}\left[\sin^{n-1} x \cos x - (n-1)I_{n-2}\right]$

Víme že $I_1 = \int \sin x dx - \cos x + C$

Substituce

1. $\varphi_{(x)} = t$

Věta 3.5 Nechť funkce F promněnné t je priimitivní funkcí k funkci f, nechť funkce $t = \varphi_{(x)}$ má spojitou derivaci φ'_x a nechť pro každé $x \in (a,b)$ je $\varphi_{(x)} \in (\alpha, \beta)$. Pak v (a,b) platí:

$$\int f_{(\varphi(x))}\varphi'_{(x)}dx = F_{(\varphi(x))} + C$$

Použití: $\int g_{(x)}dx$ kde $g_{(x)} = f_{(\varphi(x))}\varphi'_{(x)} = \begin{vmatrix} t = \varphi_{(x)} \\ dt = \varphi'_{(x)}dx \end{vmatrix} = \int f(t)dt = F(t) + C$

2. $x = \Psi(t)$

Věta 3.6 Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na (a,b). Nechť funkce $x = \Psi(t)$ má spojitou derivaci Ψ' na (α, β) a nechť $a < \Psi(t) < b$, pro $t \in (\alpha, \beta)$. Nechť k funkci Ψ existuje inverzní funkce φ a

$\int f_{(\Psi(t))}\Psi'(t)dx = G(t) + C$ pak platí

$$\int f(x)dx = G(\varphi_{(x)}) + C$$

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \Psi(t) \\ dx = \Psi'(t) \end{vmatrix} = \int f(\Psi(t))\Psi'(t)dt = G(t) = G(\Psi(x)) + C$$

Integrování racionálních funkcí

Def 3.2 **Lomenou racionální funkcí** nazýváme takovou funkci $f(x)$, kterou lze psát ve tvaru podílu dvou mnohočlenů $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ s reálnými koeficienty pro $\forall x$ pro něž $Q_m(x) \neq 0$.

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + .. + b_1 x + b_0} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

Pokud *n*<*m* nazýváme $f(x)$ **ryze lomenou racionální funkcí**.

Věta 3.7 Racionální funkci $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ lze vždy když $n \geq m$ psát ve tvaru:

$f(x) = R_{n-m}(x) + g(x)$, kde $R_{n-m}(x)$ je **mnohočlen *n-m* stupně** a $g(x)$ **je ryze lomená racionální funkce**.

Věta 3.8 Každý mnohočlen Q_m s reálnými koeficienty lze uvést na tvar:

$$Q_m(x) = a_m (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_r)^{k_r}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{l_2}\ldots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}$$

kde α_i jsou kořeny o násobnosti k_i a kvadratické výrazy $\left(x^2+px+q\right)$ mají záporný diskriminant.

Věta 3.9 Nechť f(x) je ryze lomená racionální funkce a mnohočlen $Q_m(x)$ lze rozložit podle předchozí věty 3.8. Pak funkci $f(x)$ lze rozložit na součet elementárních zlomků takto:

(*)

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-\alpha_2} + \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \ldots +$$

$$+ \frac{K_1x+L_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{K_2x+L_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2} + \ldots + \frac{K_{l_1}x+L_{l_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}} + \ldots + \frac{K_{l_r}x+L_{l_r}}{x^2+p_{l_r}x+q_r} + \frac{K_{l_r}x+L_{l_r}}{\left(x^2+p_{l_r}x+q_r\right)^2} +$$

$$+ \ldots + \frac{K_{l_r}x+L_{l_r}}{\left(x^2+p_{l_r}x+q_r\right)^{l_r}}$$

Takovýto zápis nazýváme **rozkladem ryze lomené racionální funkce $f(x)$ v parciální zlomky.**

Koeficienty A_1, .. , L_{l_r} lze získat např. (viz další kapitoly).

Metoda neurčitých součinitelů

Rovnici $(*)$ vynásobíme mnohočlenem $Q_m(x)$. Protože $Q_m(x)$ lze rozložit podle věty 3.8 bude na levé i pravé straně mnohočlen. Porovnáním koeficientů u stejných mocnin proměnné x dostaneme podmínky pro koeficienty A_1, … . Vzniklá soustava lineárních rovnic je vždy řešitelná.

Dosazovací metoda

Po vynásobení rovnice $(*)$ $Q_m(x)$ dostaneme na levé i pravé straně mnohočleny. Tato rovnice je splněna i pro nulové body mnohočlenu Q_m. Jejich postupným dosazením dostaneme podmínky pro neznámé koeficienty A_1, … .

Př: $Q(x) = (x-\alpha)S(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{R(x)}{S(x)}$$

$$P(x) = A\frac{Q(x)}{x-\alpha} + \frac{R(x)Q(x)}{S(x)}$$

$$P(x) = AS(x) + R(x)(x-\alpha) \qquad x=\alpha$$

$$P(\alpha) = AS(\alpha) + R(\alpha)*0$$

$$A = \frac{P(\alpha)}{S(\alpha)}$$

Označme *R(u,v)* podíl dvou mnohočlenů s proměnnými ve tvaru *u,v*.

Integrály takových funkcí řešíme pomocí následujících substitucí:

1. $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/s}\right]dx$ $\qquad \frac{ax+b}{cx+d} = t^s \qquad$ pro s>2

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}$ $\qquad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}t \qquad$ pro D>0, a>0

3. $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{(ax^2+bx+c)} + k\int \frac{dx}{\sqrt{\ }}$

$$P_n(x)dx = \left[Q_{n-1}\left(\sqrt{\ }\right)\right]!\sqrt{\ } + k$$

4. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Eulerovy substituce: $\qquad a>0 \quad : \quad t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}$

$\qquad c \geq 0 \quad : \quad xt = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c}$

jsou-li α, β kořeny ax^2+bx+c, pak $\qquad t = \sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$

5. Binomické integrály

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^P dx$$

- lze převést na elementární funkci, když jedno z čísel $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n}+p$ je celé číslo.

p - celé $\qquad x = t^S \qquad$ přičemž $\qquad m = \frac{k}{s}, n = \frac{r}{s}$

$\frac{m+1}{n}$ - celé $\qquad a + bx^n = t^S$

$\frac{m+1}{n} + p$ - celé $\qquad ax^{-n} + b = t^S$

6. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ vždy: $tg\frac{x}{2} = t$

Navíc:

a) R-lichá k *sinx* $\cos x = t$

b) R-lichá k *cosx* $\sin x = t$

b) R-sudá k oběma $tgx = t$

7. Transcendentní funkce

a) $\int R(a^x)dx$ $a^x = t$

b) $\int e^{kx}P_n(x)dx$ per partes $u' = e^{kx}$ $r = P_n(x)$

c) $\int R(\ln x)dx$ $\ln x = t$

d) $\int [P(x)\cos kx + Q(x)\sin kx]dx$ metoda neurčitých koeficientů