## *Určitý integrál*

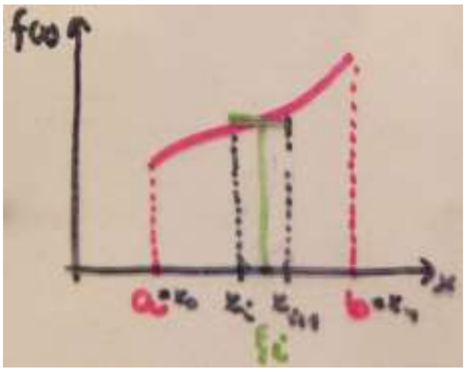
**Def 3.3.** Nechť uzavřený interval $\langle a,b \rangle$ je částí def. oboru funkce *f(x)*. Ji-li dáno *n+1* čísel $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pro něž platí:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

říkáme, že je dáno **dělení $D_n$** intervalu $\langle a,b \rangle$.

Dělící body dělení $D_n$ definují *n* částečných intervalů $\langle x_0, x_1 \rangle$, $\langle x_1, x_2 \rangle$, … s délkou: $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, …, $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$, pak zřejmě $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$

Největší z čísel $\Delta x_i$ nazveme normou dělení $D_n$, označujeme *D*. Ozn $\xi_1, \ldots, \xi_n$ reálná čísla pro něž $\xi_1 \in \langle x_0, x_1 \rangle, \xi_2 \in \langle x_1, x_2 \rangle$, …, $\xi_n \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle$



Číslo $\sigma(D_n) = f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ nazýváme **<u>integrálním součtem</u>** funkce *f* příslušející dělení $D_n$ na intervalu $\langle a,b \rangle$.

Jsou-li $M_1, \ldots, M_n$ **suprema** (max) funkce *f* na intervalu $\langle x_0, x_1 \rangle$, …
a $m_1, \ldots, m_n$ **infima** (min) funkce *f* na intervalu $\langle x_0, x_1 \rangle$, … $\langle x_{n-1}, x_n \rangle$, pak čísla

$S(D_n) = M_1 \Delta x_1 + \ldots + M_n \Delta x_n$ **-horní součet** přísl. $D_n$ na $\langle a,b \rangle$.
$s(D_n) = m_1 \Delta x_1 + \ldots + m_n \Delta x_n$ **-dolní součet** přísl. $D_n$ na $\langle a,b \rangle$.

**Def 3.4.** Maximální (minimální) hodnota z horních (dolních) součtů příslušející všem dělením $D_n$ intervalu $\langle a,b \rangle$ se nazývá **horní (dolní) integrál funkce** *f* na $\langle a,b \rangle$.

Jestliže horní integrál je roven dolnímu integrálu funkce *f* na intervalu $\langle a,b \rangle$, pak tuto společnou hodnotu nazýváme **<u>určitým integrálem funkce *f*</u>** na $\langle a,b \rangle$ **(Cauchy-Riemannův interval).**

A označujeme jej: $\int_a^b f(x)dx$.

Existuje-li $\int_a^b f(x)dx$, řekneme, že funkce *f* je integrovatelná na $\langle a,b \rangle$ v C.-R. smyslu.

**Věta 3.10.** Je-li funkce *f* integrovatelná na $\langle a,b\rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sigma(D_n) = \lim_{n\to\infty} S(D_n) = \lim_{n\to\infty} s(D_n)$$

**Věta 3.11.** Každá spojitá funkce na $\langle a,b\rangle$ je na tomto intervalu integrovatelná ve smyslu C.-R. smyslu.

**Věta 3.12.** **Newtonova-Leibnitzova věta**
Jestliže *f(x)* je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a *F(x)* je primitivní funkce k *f(x)*, pak platí:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

**Věta 3.13** Jestliže $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na $\langle a,b\rangle$ pak platí:

1. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$ $\quad C = konst.$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ $\quad$ a < C < b
4. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ $\quad$ je-li $f(x) \geq 0$ na intervalu $\langle a,b\rangle$
5. $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ $\quad$ $f(x) \geq g(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$

**Věta 3.14** **O střední hodnotě** – je-li $g(x)$ nezáporná (nekladná) na $\langle a,b\rangle$ a $f(x)$ spojitá na $\langle a,b\rangle$, integrovatelné, pak existují $\xi \in \langle a,b\rangle$, že platí:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

Číslo $f(\xi)$ se nazývá **střední hodnota funkce** *f* na $\langle a,b\rangle$.

**Věta 3.15** **Substituční metoda pro určité integrály** – Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$. Nechť funkce $\varphi(t)$ je na $\langle \alpha,\beta\rangle$ ryze monotónní a nechť je spojitá i se svou první derivací, přičemž $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Pak platí:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

**Věta 3.16** **Metoda per partes pro určité integrály** – Mají-li funkce $u(x)$, $v(x)$ na $\langle a,b\rangle$ spojité derivace, pak platí:

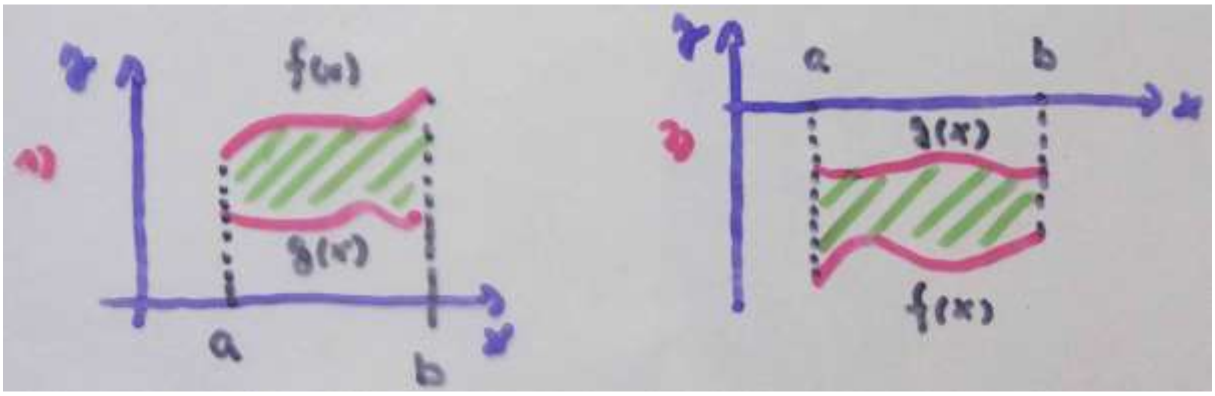
$$\int_a^b u'v\,dx=[uv]_a^b-\int_a^b uv'\,dx$$

## *Použití určitého integrálu*

**Věta 3.17** Obsah P obrazce U, ohraničeného přímkami $x=a$, $x=b$ a grafy funkcí $y=f(x)$, $y=g(x)$ spojitých na $\langle a,b\rangle$, přičemž pro $\forall x\in\langle a,b\rangle$

1) $0\le g(x)\le f(x)$ se rovná $P=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

2) $f(x)\le g(x)\le 0$ $P=-\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$



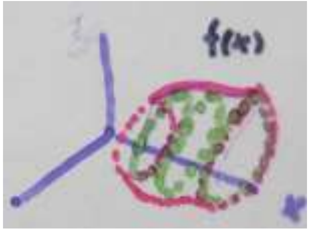

**Pozn.** Polární souřadnice

$$r=f(\varphi)$$

$$P=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\varphi$$

**Věta 3.18** Objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne ritací rovinné křívky, která je grafem spojité funkce $y = f(x)$ def. na $\langle a,b\rangle$, kolem osy *x*, je

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$




**Def 3.5** Nechť je dána křivka *c*, kterou je možno vyjádřit pomocí funkce $f(x)$. Zvolíme-li na křivce *c* body *A*, $B_1$, $B_3$, .. , $B_n = B$, pak spojnici všech těchto bodů nazveme lomenou čarou vepsanou křivce *c*. Délkou této lomené čáry AB rozumíme součet délek všech úseček $\overline{AB_1} + \overline{B_1B_3} + .. + \overline{B_{n-1}B_n}$ .


**Def 3.6** Délkou křivky *c* mezi body *A,B* rozumíme suprémum (max. hodnotu) z množiny všech délek lomených čar vepsaných křivce *c*. Je-li tato množina shora ohraničená, říkáme, že křivka *c* je schopna **rektifikace**. Není-li shora ohraničená, řekneme, že křivka *c* nemá konečnou délku.

**Věta 3.19** Je-li křivka c dána jako graf funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a,b\rangle$ a má-li funkce $f(x)$ na $\langle a,b\rangle$ spojitou derivaci, pak pro délku oblouku jejího grafu na $\langle a,b\rangle$ platí

$$s = \int_a^b \sqrt{\left[1+(f(x))^2\right]}dx$$

**Pozn. 1.** Pokud je křivka *c* dána parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ pro $t \in \langle \alpha,\beta\rangle$ pak

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2\right]}dt$$

**Pozn. 2.** Pokud je křivka *c* dána v polárních souřadnicích $r = f(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha,\beta\rangle$ pak

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

**Věta 3.20** Obsah *P* plochy vytvořené rotací grafu hladké funkce $y = f(x)$ kolem oxy *x* pro $x \in \langle a,b\rangle$ je dán:

$$P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

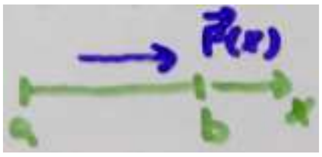
**Pozn. 1.** Pro křivku zadanou parametricky $s = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$

**Pozn. 2.** Pro křivku zadanou v polárních souřadnicích $r = f(\varphi)$

$$s = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin\varphi \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi$$

## Použití určitého integrálu ve fyzice

$$A = \int F(x)dx$$




**Těžiště obrazce** $y = f(x)$

$$x_T = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx} \qquad y_T = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx}$$

**Moment setrvačnosti**

$$J = \int_{(m)} r^2\,dm$$

**Def 3.6** Nevlastní integrály s nekonečnými mezemi se nazývají

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

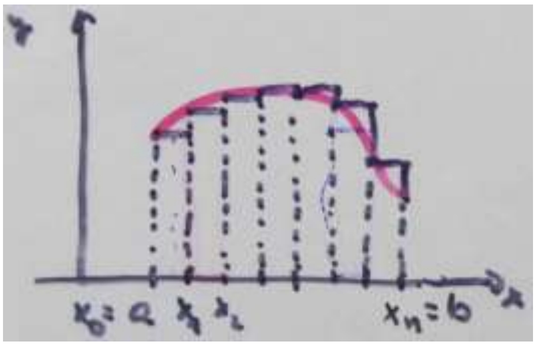
**Def 3.7** Nevlastní integrály nazýváme konvergentním jestliže:

1) Funkce $f(x)$ je integrovatelné na každém konečném $\langle a,b\rangle$
2) Existuje-li vlastní limita $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(x)dx = B \qquad \lim_{x\to\infty} \int_x^b f(x)dx = B$

Jestliže tato vlastní limita neexistuje, říkáme, že **integrál diverguje**.

**Věta 3.21** Jestliže funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na každém intervalu $\langle a,b\rangle$ a pro $\forall x \in \langle a,\infty)$ platí $0 \le f(x) \le g(x)$ pak z konvergence $\int_a^{\infty} g(x)dx$ plyne konvergence $\int_a^{\infty} f(x)dx$. Diverguje-li $\int_a^{\infty} f(x)dx$, pak diverguje i $\int_a^{\infty} g(x)dx$.
Analogie pro ost. nevl. int.

## Přibližný výpočet určitých integrálů




a) **Obdélníková metoda**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum f(\xi_i)\Delta x \qquad \text{kde } \xi_i = x_{i-1} \quad , \ \Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_{i+1} - x_i$$

b) **Lichoběžníková metoda**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + .. + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

c) **Simpsonova metoda**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + .. + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right)$$

$2n$ – sudý počet intervalů