5. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

5.1 Diferenciální rovnice 1. řádu (DR)

$y' = f(x,y)$ $\qquad\qquad$ $y' = \dfrac{dy}{dx}$

- řešení diferenciální rovnice - funkce $u(x)$ taková, že $u'(x) = f(x,y)$
  ($u(x)$ integrál DR)
- Cauchyova úloha (počáteční úloha) - je dána DR a reálná čísla x_0, u_0. Máme najít takové řešení DR, aby splňovalo podmínku $u(x_0) = u_0$.
- DR bývá často dána ve tvaru $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

5.2 Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

a) $y' = f(x)$ $\qquad$ řešení $u(x) = \int f(x)dx + C$

b) $P(x) + Q(y).y' = 0$ $\qquad \rightarrow \qquad$ $\int P(x)dx + \int Q(u)du = C$ $\qquad$ ($y = u$)

c) $P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$ $\qquad$ rovnice se separovatelnými proměnnými

$\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \dfrac{Q_2(y)}{P_2(y)}y' = 0$ $\qquad \rightarrow \qquad$ $\int \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \int \dfrac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = C$

5.3 Homogenní diferenciální rovnice

$y' = f(x,y)$, $\qquad$ kde pro funkci f platí $f(tx,ty) = f(x,y)$

lze převést na tvar $y' = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, pak transformací $y = zx$, $y' = z'x + z$ převedeme na rovnici $z'x + z = g(z)$, což je rovnice se separovanými proměnnými.

5.4 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu (LDR)

$y' + p(x).y = q(x)$, $\qquad$ - kde $p(x)$, $q(x)$ jsou dané funkce

a) je-li $q(x) = 0$ $\qquad$ - *homogenní* lineární diferenciální rovnice 1. řádu ("*bez pravé strany*")

tj. $\dfrac{y'}{y} + p(x) = 0$ $\qquad$ - řešíme separací proměnných

$$\frac{1}{y}dy = -p(x)dx$$

$$C_1 + \ln y = -\int p(x)dx$$

$$C_2 y = e^{-\int p(x)dx}$$

řešení: $y = C.e^{-\int p(x)dx}$

b) $q(x) \neq 0$ - lineární diferenciální rovnice 1. řádu s pravou stranou
je-li $p(x)$, $q(x)$ spojité, pak **obecné řešení**

$$y = \left[\int q(x).e^{\int p(x)dx} + C \right].e^{-\int p(x)dx}$$

Metoda variace konstant

Vezmeme řešení LDR bez pravé strany, kde konstantu *C* změníme na funkci *C*(*x*). Neznámou funkci *C*(*x*) v řešení $y = C(x).e^{-\int p(x)dx}$ rovnice s pravou stranou určíme zpětným dosazením do LDR s pravou stranou.

Pomocí partikulárního řešení

Obecné řešení LDR s pravou stranou můžeme vyjádřit jako součet obecného řešení LDR bez pravé strany a nějakého libovolného (partikulárního) řešení Y LDR s pravou stranou:

$$y = C.e^{-\int p(x)dx} + Y$$

5.5 Bernoulliova DR

$y' + p(x)y = q(x)y^k \qquad k \neq 0,1$

pokud $k > 0$ - jedno řešení je $y = 0$
substitucí $z = y^{1-k}$ převedeme na LDR

Rovnice typu $F(x, y') = 0$
$F(y, y') = 0$
řešíme metodou derivování - volíme $y' = p$

5.6 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

Rovnici $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$ pro $a_0(x) \neq 0$ nazýváme LDR *n*-tého řádu ($n \geq 2$).
Je-li $f(x) \equiv 0$, pak mluvíme o homogenní LDR, v opačném případě jde o nehomogenní LDR.
Jsou-li všechny $a_i(x) = konst$, pak hovoříme o LDR s konstantními koeficienty.

Základní vlastnosti:

1. jsou-li u, v dvě řešení homogenní LDR, pak také každá funkce
$w = C_1 u + C_2 v \qquad C_1, C_2$ - konst
je řešením homogenní LDR

2. Jestliže homogenní LDR má n lineárně nezávislých řešení $u_1, u_2, \ldots, u_n$, pak libovolné řešení homogenní LDR lze zapsat ve tvaru
$$v = C_1u_1 + C_2u_2 + \ldots + C_nu_n \qquad C_1, \ldots, C_n \text{ - konst}$$

3. Řešení $u_1, u_2, \ldots, u_n$ homogenní LDR tvoří fundamentální systém řešení, právě když wronskián
$$w(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \ldots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$
Je-li $w(x) = 0$ alespoň v 1 bodě, pak je roven nule pro všechna x.

Určení fundamentálního systému ve speciálních případech

a) Homogenní LDR s konstantními koeficienty (HLDR)

Věta: Nechť λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ jsou m_i -násobné kořeny charakteristické rovnice
$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$
$k \leq n$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla.
Pak n funkcí
$$e^{\lambda_1 x}, x.e^{\lambda_1 x}, \cdots, x^{m_1 - 1}.e^{\lambda_1 x}$$
$$e^{\lambda_2 x}, x.e^{\lambda_2 x}, \cdots, x^{m_2 - 1}.e^{\lambda_2 x}$$
$$\vdots$$
$$e^{\lambda_{k1} x}, x.e^{\lambda_k x}, \cdots, x^{m_k - 1}.e^{\lambda_k x}$$
tvoří fundamentální systém diferenciální rovnice
$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$$
na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Jestliže charakteristická rovnice má jednoduchý komplexní kořen $\lambda_1 = \alpha + \beta.i$, $\beta \neq 0$, pak komplexně sdružené číslo $\lambda_2 = \alpha - \beta.i$ je také jejím kořenem. Pak máme dvojici řešení HLDR
$$u_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta.x)$$
$$u_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta.x)$$

Každé řešení $u(x)$ HLDR lze získat lineární kombinací funkcí fundamentálního systému.

b) Nehomogenní LDR

Věta: Nechť funkce $v(x)$ je nějaké partikulární řešení nehomogenní LDR a funkce $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ tvoří fundamentální systém příslušné homogenní LDR. Pak každé řešení $u(x)$ nehomogenní LDR lze psát ve tvaru
$$u(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x) + \cdots + C_nu_n(x) + v(x)$$

Pozn.: Často se využívá odhadu partikulárního řešení.

Parciální diferenciální rovnice

- počet proměnných > 1
- řád rovnice je určen řádem nejvyšší derivace

A) vlnová rovnice

a)1D $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (*) $u = u(x,t)$

b)3D $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ $u = u(x, y, z, t)$

zjednodušený zápis:

$$\Delta u = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Obecné řešení rovnice (*)

$$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{C}\right) + g\left(t + \frac{x}{C}\right),$$

kde f a g jsou libovolné funkce argumentů

$v = t - \frac{x}{C}$ a $w = t + \frac{x}{C}$

B)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = f(x)$$

$$z = \int f(x)dx + g(y) = F(x) + g(y)$$

Funkce $F(x)$ a $g(y)$ určíme na základě počátečních nebo okrajových podmínek.