Impuls síly (silový popud)

Impuls síly (I, jednotka N.s) je vektorová veličina, vyjadřující časový účinek síly. Je roven změně hybnosti Δ***p*** tělesa, závisí na něm změna hybnosti tělesa. Tento vztah znamená, že změna hybnosti za určitý časový okamžik Δ*t* je roven změně hybnosti tělesa, na něž síla působí (= **I. impulsová věta**).

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p}$$

F = konst

$$\boxed{\mathbf{F}.\Delta t = m.\Delta \mathbf{v}}$$

d**p**/dt = m . d**v**/dt = m . **a** = **F** (síla)

d**p** = m . d**v**/dt . dt

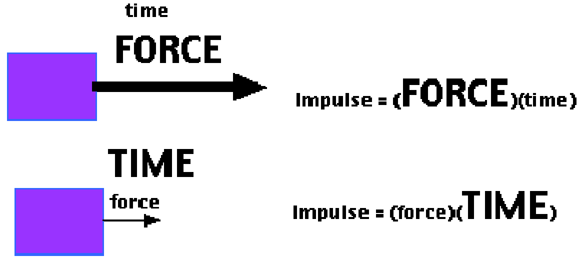
d**p** = **F**(t) . dt (impuls síly)

F ≠ konst

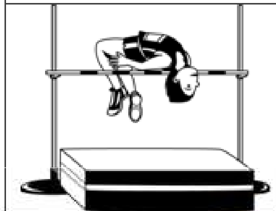
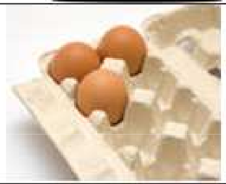
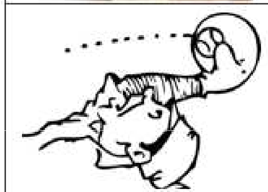
$$\int_{t_1}^{t_1+\Delta t} F(t)dt = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \frac{dp}{dt} dt = p(t_1+\Delta t) - p(t_1) = \Delta p$$

Je zřejmé, že stejné změny hybnosti může být dosaženo krátkodobým působením velké síly nebo delším působením síly malé. Nastane-li změna hybnosti za malý časový interval, působí velká síla (Proto bolí, když se klepneme kladívkem.)

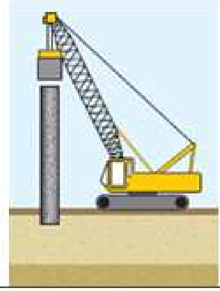
Malá síla po dlouhou dobu nedokáže těleso rozpohybovat, zatímco velká síla po krátkou dobu uvede těleso do pohybu.



Impulsová síla malá, delší čas působení

SITUATION		EXPLANATION
	High jumper lands on a mattress.	▪ Lengthen the time of impact ▪ Result in a smaller impulsive force
	Goods that are fragile wrapped with a soft but rigid material.	▪ Lengthen the time of impact ▪ Result in a smaller impulsive force
	Player wears gloves and swings the hand to the back when catching the ball.	▪ Lengthen the time of impact ▪ Result in a smaller impulsive force
	Parachutist bends his knees when he lands.	▪ Lengthen the time of impact ▪ Result in a smaller impulsive force

Impulsová síla velká, krátký čas působení

SITUATION		EXPLANATION
	Pestle and mortar are made of hard rock.	▪ Impact time is shorter ▪ Produce larger impulsive force to destroy the food.
	Hammer head is made of hard material.	▪ Impact time is shorter ▪ Produce larger impulsive force to hit the nail.
	In construction, hard ram is felled on the upright pile with high velocity.	▪ Impact time is shorter ▪ Produce larger impulsive force to hit the pile.

Příklad

Jak velký impuls síly uvede do pohybu o rychlosti 0,36 $km.h^{-1}$ původně nehybné těleso o hmotnosti 50 kg?

$v' = 0\ m.s^{-1}$
$v = 0{,}36\ km.h^{-1} = 0{,}1\ m.s^{-1}$
$m = 50\ kg$

$I = m.\ v - m.\ v' = m.\ \Delta v = 50.0{,}1 = \underline{5\ N.s}$

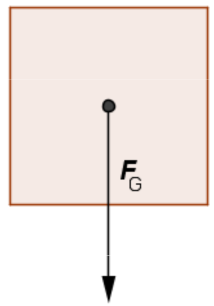
Příklad

Míč o hmotnosti 0,25 kg získal úderem při odbíjené rychlost 14 $m.s^{-1}$. Jak velká byla síla úderu trvajícího 0,01 s?

$m = 0{,}25\ kg$
$\Delta v = 14\ m.s^{-1}$
$\Delta t = 0{,}01\ s$

$F.\Delta t = m.\Delta v$
$F = m.\Delta v/\Delta t = 0{,}25.\ 14/0{,}01 = \underline{350\ N}$

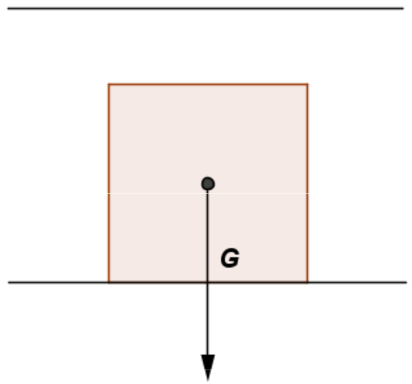
Tíha a tíhová síla



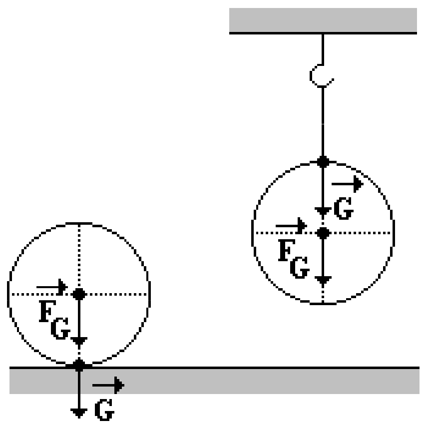
Tíhová síla (F_G) je síla, kterou Země působí na každé těleso při povrchu a uděluje mu tíhové zrychlení **g**.

$$F_G = mg$$

Je to vektorová veličina se svislým směrem. Důsledkem působení tíhové síly je volný pád. Protože tíhové zrychlení je na různých místech Země různé, je i velikost tíhové síly na různých místech Země jiná.



Tíha tělesa (**G**) je síla, kterou působí nehybné těleso na vodorovnou podložku nebo závěs. Tíha tělesa je důsledkem tíhové síly, kterou působí Země na těleso. Tíhová síla tedy vyvolává tíhu tělesa. Jestliže je těleso v klidu, má tíha i tíhová síla stejný směr i stejnou velikost a platí, že obě síly jsou stejně velké.



Příklad

Trenér asistuje svému svěřenci při zvedání nakládací činky o hmotnosti 100 kg v případě cvičení bench press. Trenér působí na nakládací činku silou 70 N a sportovec silou 920 N, oba směrem vzhůru. Podařilo se jim zvednout nakládací činku? Jakou výslednou silou bylo působeno na činku?

F_G = m.g = 100 · 9,81 = 981 N

F = 70 N + 920 N + (−981 N) = <u>9 N</u>

F < F_g => <u>Činku se podařilo zvednout</u>.

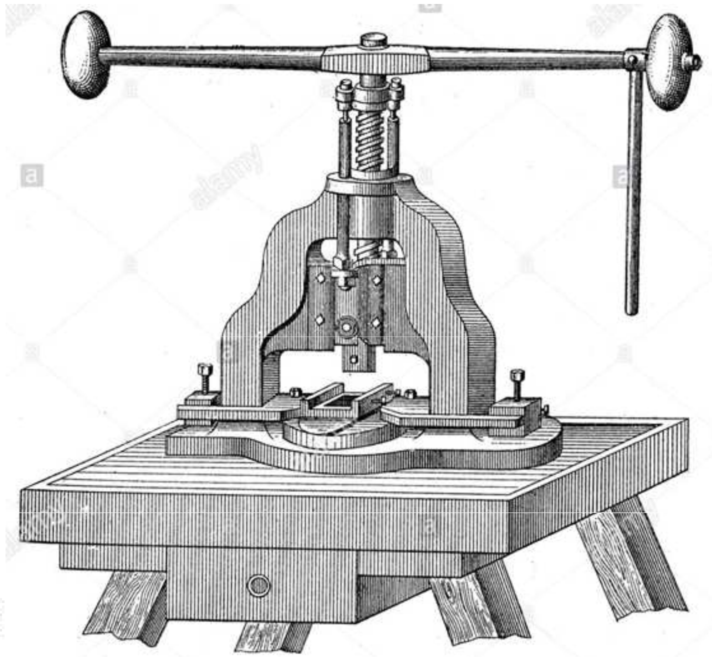
Tlak a tlaková síla

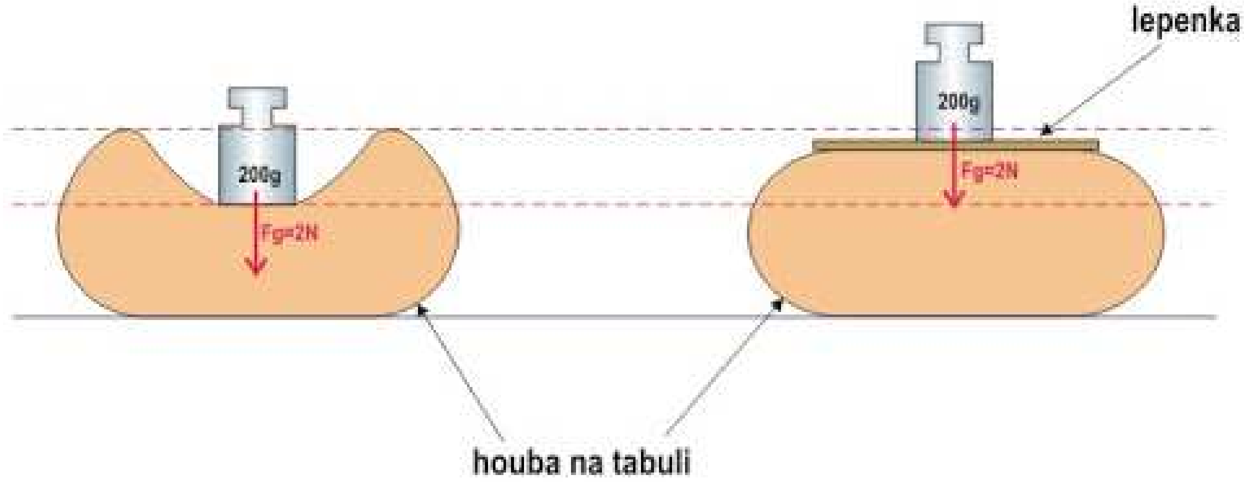
Tlaková síla je síla, působící kolmo na určitou plochu povrchu pevné látky nebo tekutiny.

$$F_{\mathrm{tl}} = pS$$

kde *p* je tlak a *S* je obsah plochy.

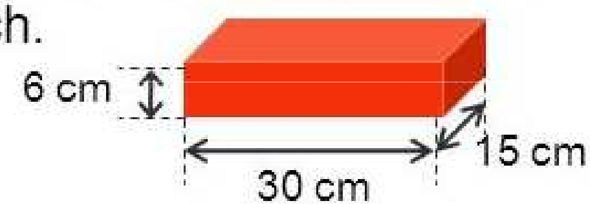
Tlak (p, Pa) je velikost síly, působící na jednotku plochy.





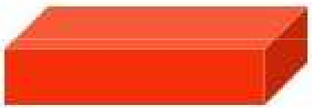
Příklad

Cihla má rozměry 30 cm, 15 cm a 6 cm. Její hmotnost je 5,4 kg. Vypočítej tlak, který způsobuje na podložku ve všech polohách.



$m = 5{,}4\ \text{kg}$
$a = 30\ \text{cm} = 0{,}3\ \text{m}$
$b = 15\ \text{cm} = 0{,}15\ \text{m}$
$c = 6\ \text{cm} = 0{,}06\ \text{m}$

$F = m \cdot g$
$F = 5{,}4 \cdot 10$
$F = 54\ \text{N}$



$S_1 = a \cdot b$
$p_1 = ?\ \text{Pa}$

$$p_1 = \frac{F}{S_1} = \frac{F}{a \cdot b}$$

$$p_1 = \frac{54}{0{,}3 \cdot 0{,}15}$$

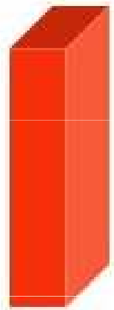
$$\underline{\underline{p_1 = 1\,200\ \text{Pa} = 1{,}2\ \text{kPa}}}$$

$S_2 = a \cdot c$
$p_2 = ?\ \text{Pa}$

$$p_2 = \frac{F}{S_2} = \frac{F}{a \cdot c}$$

$$p_2 = \frac{54}{0{,}3 \cdot 0{,}06}$$

$$\underline{\underline{p_2 = 3\,000\ \text{Pa} = 3\ \text{kPa}}}$$



$S_3 = b \cdot c$
$p_3 = ?\ \text{Pa}$

$$p_3 = \frac{F}{S_3} = \frac{F}{b \cdot c}$$

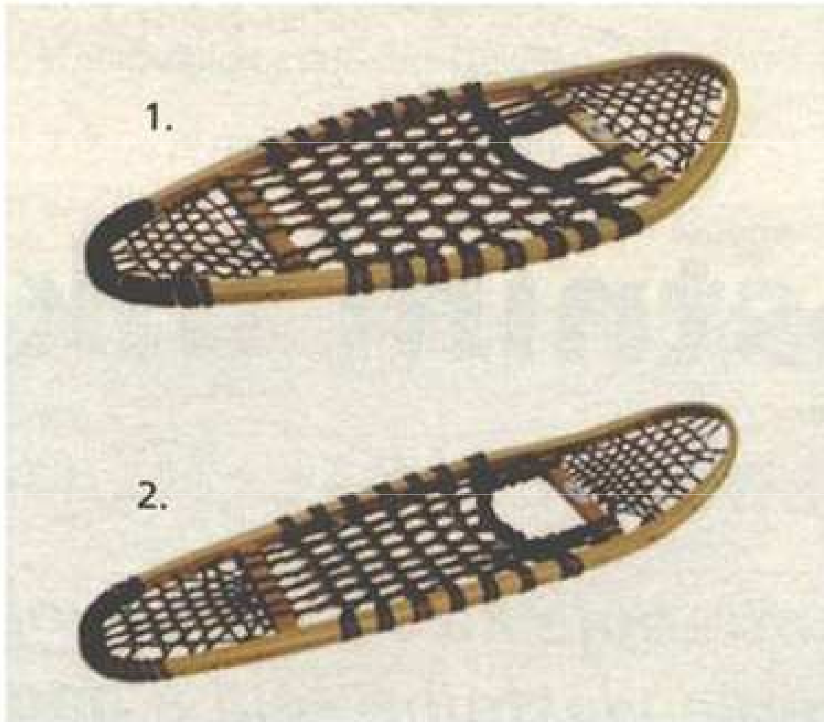
$$p_3 = \frac{54}{0{,}15 \cdot 0{,}06}$$

$$\underline{\underline{p_3 = 6\,000\ \text{Pa} = 6\ \text{kPa}}}$$

Nejmenší tlak 1,2 kPa vyvolá cihla položená na největší ploše, na další je tlak 3 kPa, na nejmenší ploše je největší tlak, tj. 6 kPa.

Zvětšením plochy *S* se zmenší hodnota tlaku *p*. Proto se při prolomení ledu doporučuje lehnout si na led, případně použít prkno.

Podobně lze snížit tlak i redukcí hmotnosti, což není vždy reálné.



Příklad

Hmotnost tanku je 36 t, celková plocha jeho pásů je 4,5 m2. Jaký tlak způsobuje tank na vodorovnou plochu?

m = 36 t = 36000 kg => F = 360000 N
S = 4,5 m2
p = ?

p = F : Sp = 360000 : 4,5p = 80000 Pa = <u>80 kPa</u>

Příklad

Jak velikou tlakovou silou musíme působit na plochu $2m^2$, abychom vyvolali tlak 200 kPa?

S =$2m^2$
p = 200 kPa = 200 000 Pa
F = ?

F = p.S = 200000 . 2 = 400 000 N = <u>400 kN</u>

Statické a smykové (vlečné) tření

Vznikají při pohybu těles v látkovém prostředí. Působí proti směru pohybu. Jsou způsobeny nerovnostmi a deformacemi povrchu.

Síla $\mathbf{F}_v$, kterou působíme na těleso, je kompenzována silou **statického tření** $\mathbf{F}_s$ (klidová třecí síla) až do určité hodnoty $\mathbf{F}_{s\,max}$.

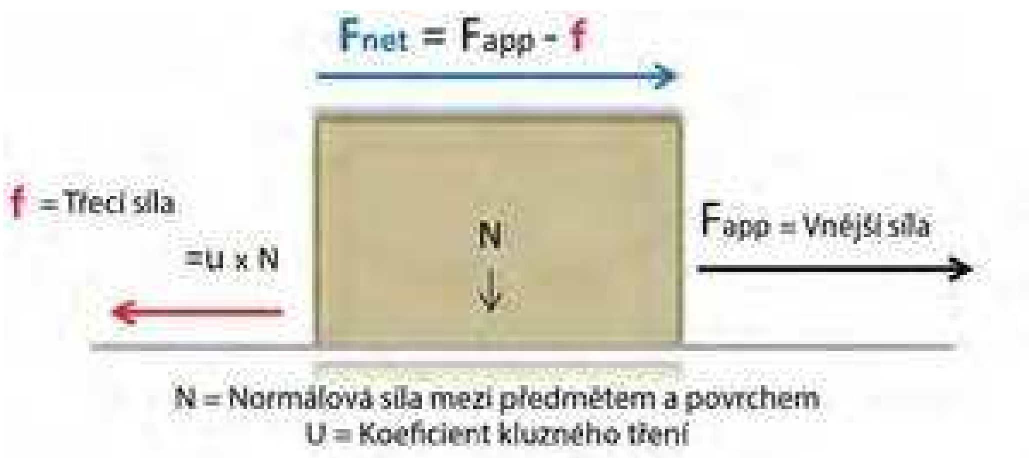
$$F_{s\max} = \mu_s F_N$$

$\mathbf{F}_N$ je **normálová síla** (kolmá tlaková síla) působící mezi tělesem a podložkou a μ_s je součinitel statického tření, bezrozměrná veličina (poměr třecí a normálové síly).

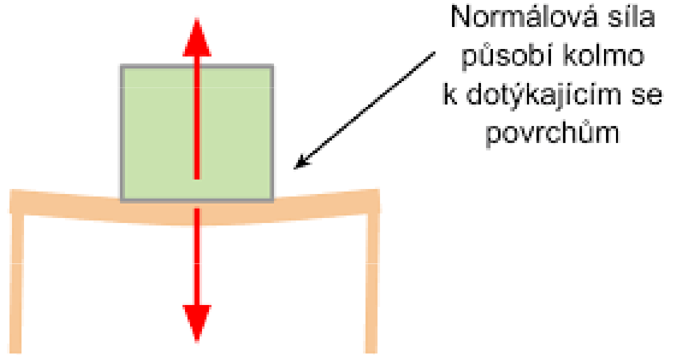
Těleso nemůže být uvedeno do pohybu, dokud je vnější vtištěná síla $\mathbf{F}_v$ v rovnováze se silou statického tření $\mathbf{F}_s$. Je-li $\mathbf{F}_v$ větší než $\mathbf{F}_{s\,max}$, začne se těleso pohybovat. Pokud je tento pohyb rovnoměrný, je vtištěná síla $\mathbf{F}_v$ v rovnováze se silou **smykového (vlečného) tření** $\mathbf{F}_t$ (třecí síla za pohybu).

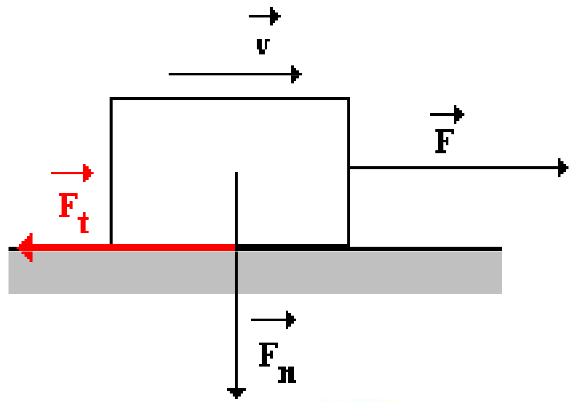
$$F_t = \mu F_N$$

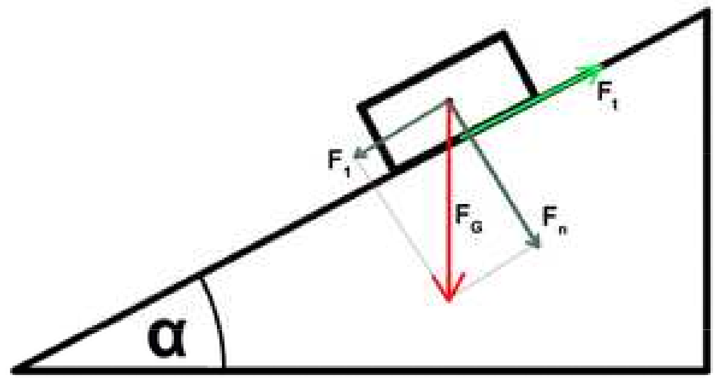
$\mathbf{F}_N$ je **normálová síla** (kolmá tlaková síla) působící mezi tělesem a podložkou a μ je součinitel smykového tření, bezrozměrná veličina (poměr třecí a normálové síly).

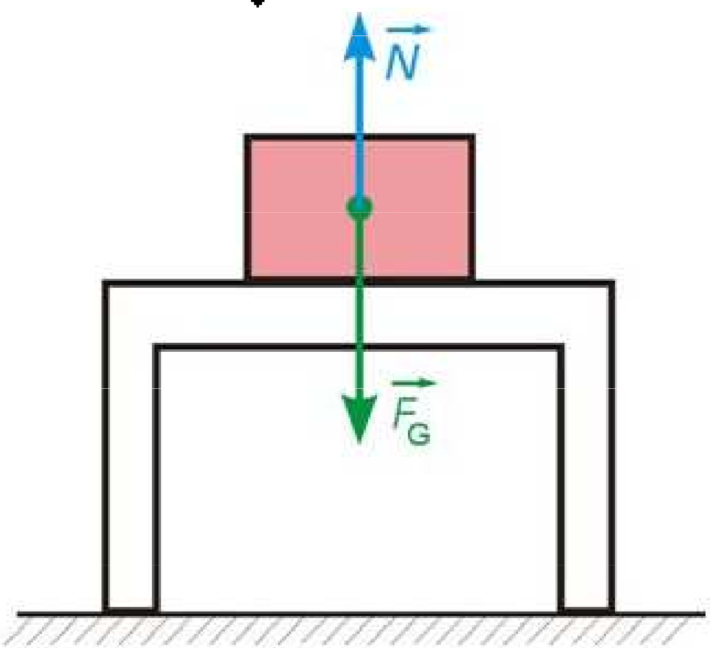


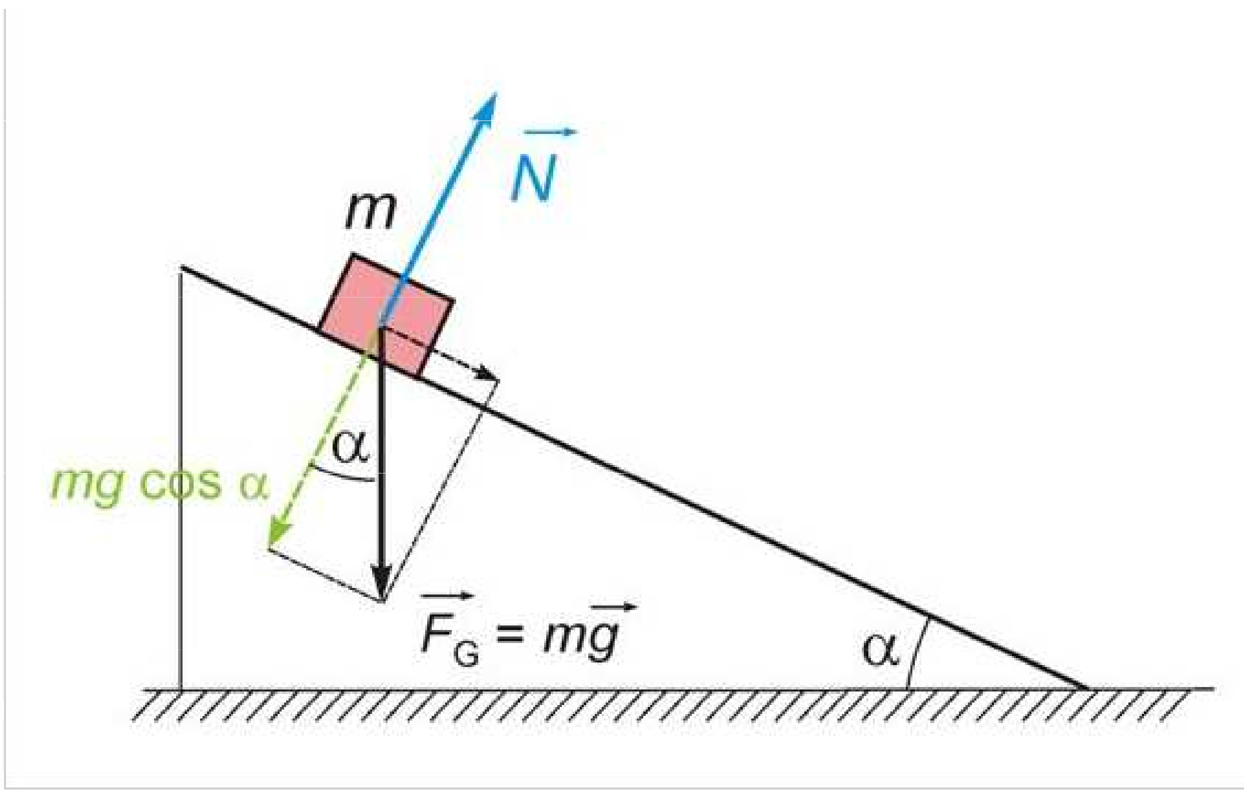
Způsoby zakreslení normálové síly



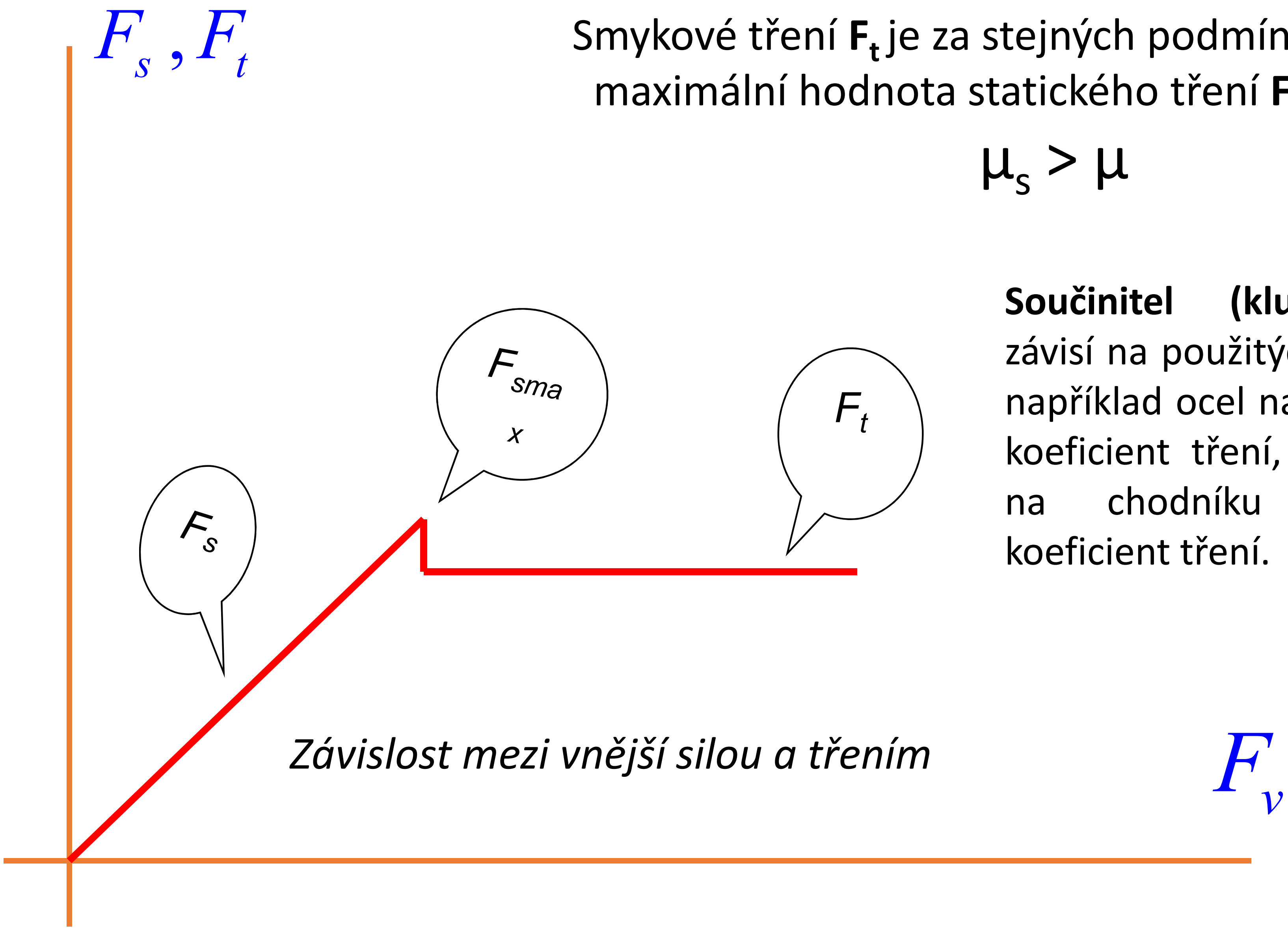








Hodnota μ závisí na relativní rychlosti těles (v rozmezí 1 cm.s^{-1} do několika m.s^{-1} je však tato závislost zanedbatelná). Hodnota μ závisí na druhu materiálu a kvalitě povrchů, ale nezávisí na mikroskopické ploše dotyku.



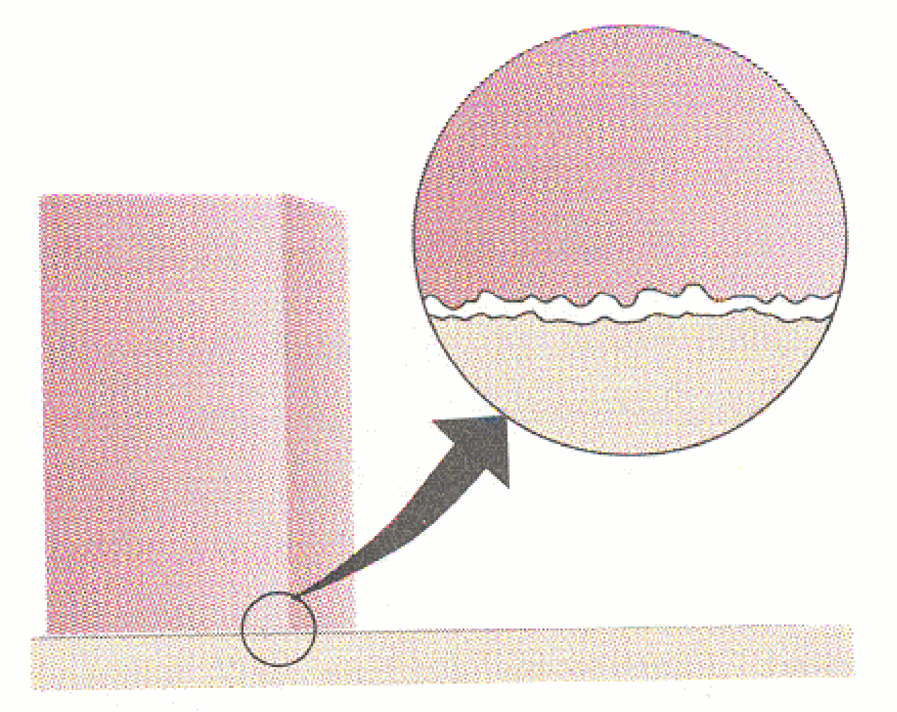
Smykové tření $\mathbf{F_t}$ je za stejných podmínek menší než maximální hodnota statického tření $\mathbf{F}_{s\,max}$. Odtud

$$\mu_s > \mu$$

Součinitel (kluzného) tření závisí na použitých materiálech; například ocel na ledě má nízký koeficient tření, zatímco guma na chodníku má vysoký koeficient tření.

Závislost mezi vnější silou a třením

Tření vzniká vzájemným působením molekul (atomů, iontů) podložky a tělesa v místě skutečného kontaktu. Účinná plocha dotyku je značně menší než geometrická plocha vypočtená z rozměrů tělesa.



Skutečný kontakt vzniká jen v místech, kde se dotýkají výstupky obou povrchů.

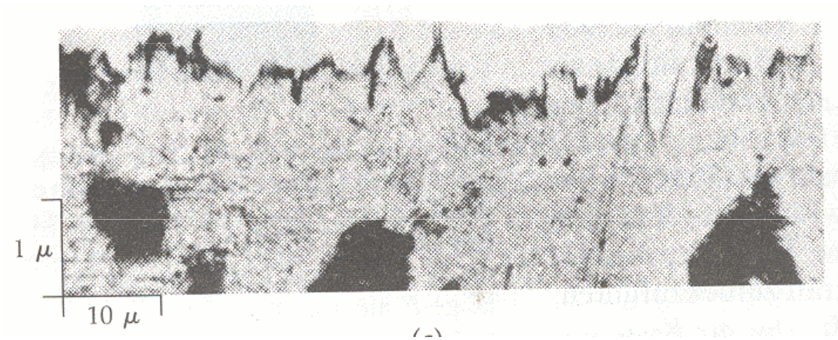
Maximální statické tření je úměrné mikroskopické dotykové ploše S_m. Ta je ovšem úměrná tlaku mezi povrchy $\mathbf{F}_N / S_m$. Odtud

$$S_m \frac{F_N}{S_m} = F_N$$

Tento součin je nezávislý na velikosti mikroskopického dotyku (tj. na obsahu styčných ploch) a závisí jen na tlakové síle. Proto platí vztah

$$F_{s\,\max} = \mu_s F_N$$

$$F_s \leq \mu_s F_N$$



Mikroskopický snímek vyleštěného povrchu oceli. Nepravidelné výstupky dosahují velikosti až 10^{-5} cm.

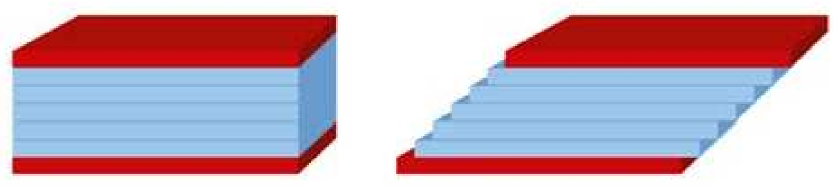
Coulombův zákon tření

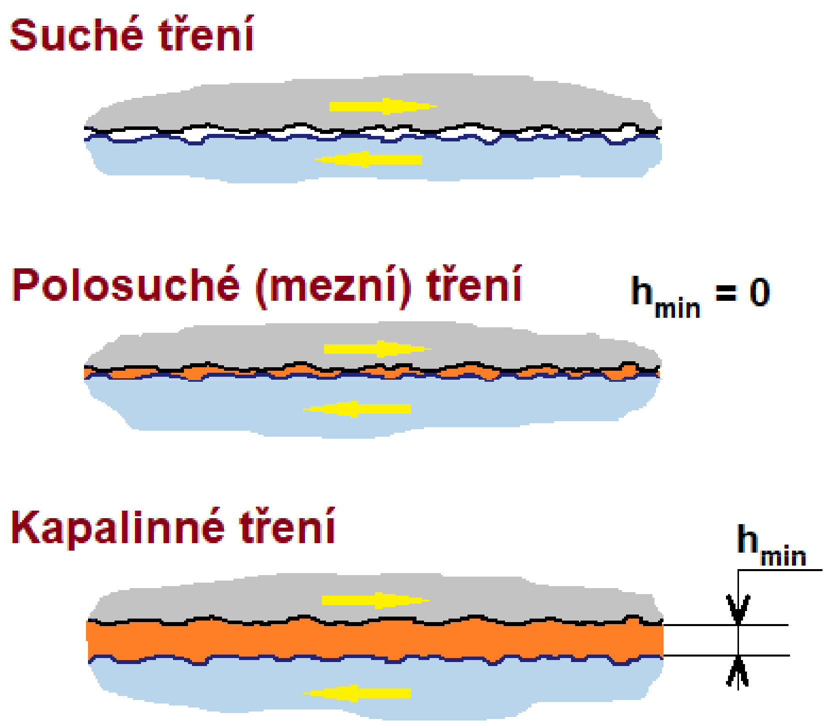
Tření za pohybu (přesněji velikost třecí síly u kinematického tření) není závislé na rychlosti.

Smykové tření splňující toto pravidlo (platí pouze v rozmezí 1 $cm.s^{-1}$ do několika $m.s^{-1}$). se v technické praxi nazývá také **„suché“ tření**. Zákon neplatí pro styk dvou těles promazaných tekutým mazivem nebo pro povrchy nedokonalé tuhosti, měnící s pohybem svou povrchovou mikrostrukturu a tím i své třecí vlastnosti.

Tření povrchu pevných těles s kapalinami nebo plyny se označuje jako **odpor prostředí**.

Tření mezi částicemi či vrstvami tekutin se nazývá **vnitřním třením** (či přeneseně podle jeho projevu vazkostí či viskozitou).





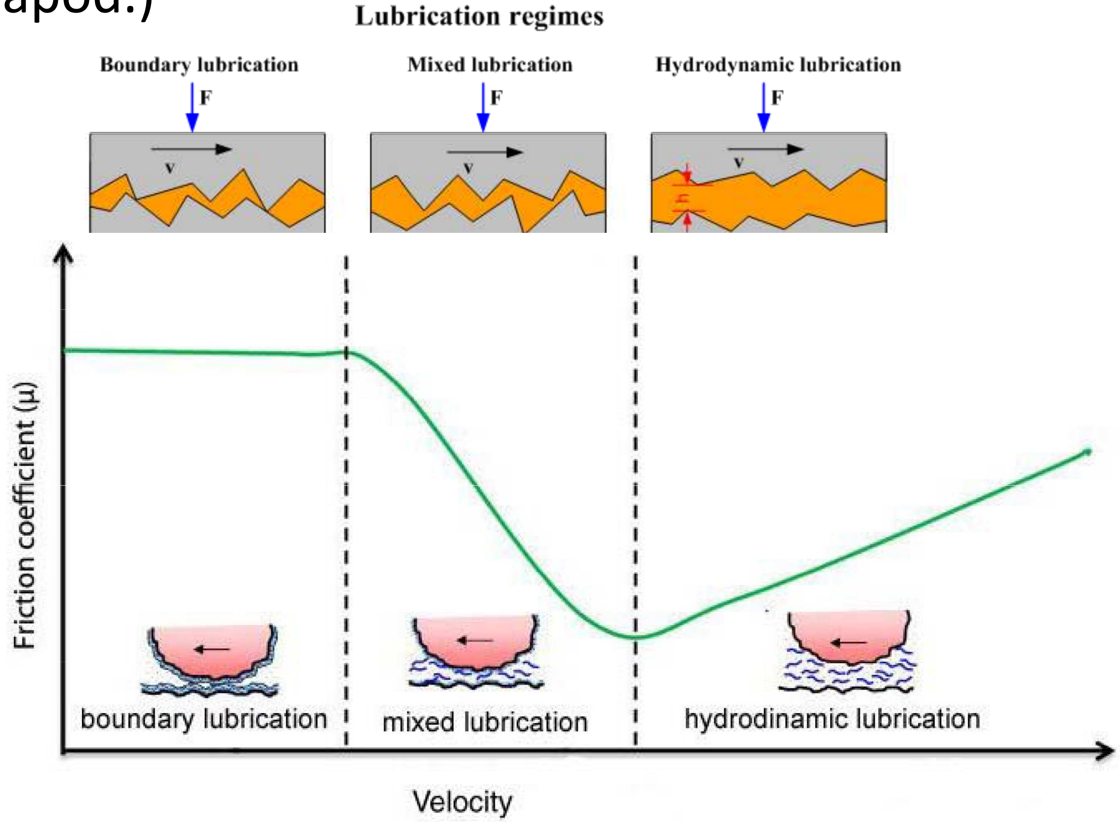
Maziva

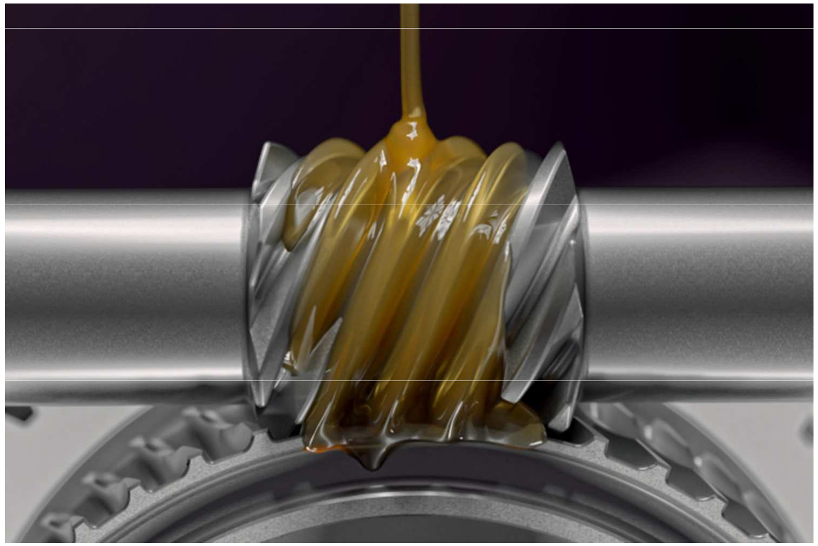
Mazivo (lubrikant) je látka určená k omezení tření mezi dvěma povrchy.

Kapalná maziva typicky obsahují 90 % základového oleje (většinou ropné frakce) a do 10 % aditiv.

Plastická maziva (vazelína)

Prášková maziva (suchý grafit, PTFE, disulfid molybdenu, disulfid wolframu apod.)



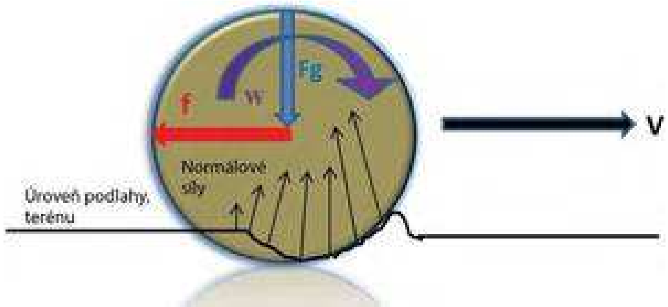


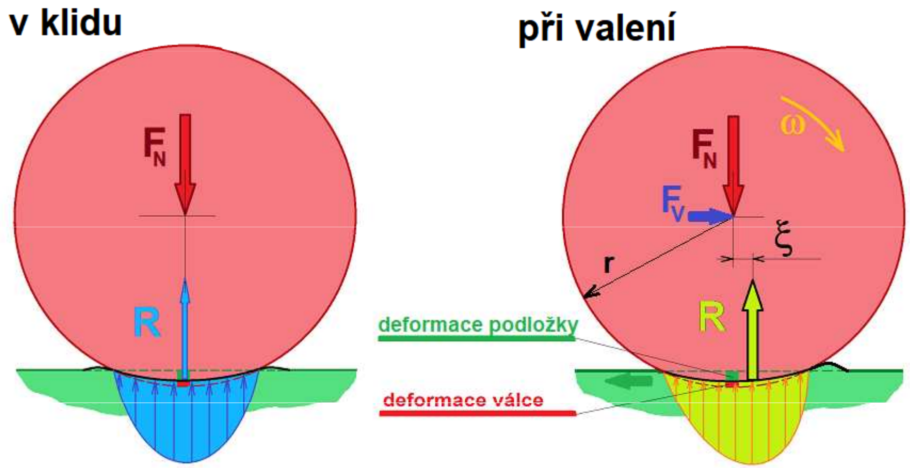
Valivý odpor (valivé tření)

Valivý odpor (nepřesně valivé tření, neboť se stýkající se povrchy navzájem netřou) je odpor, který působí na těleso kruhového průřezu při jeho valivém pohybu po podložce.

$$F_v = \xi \frac{F_N}{R}$$

ξ je součinitel valivého odporu [m].

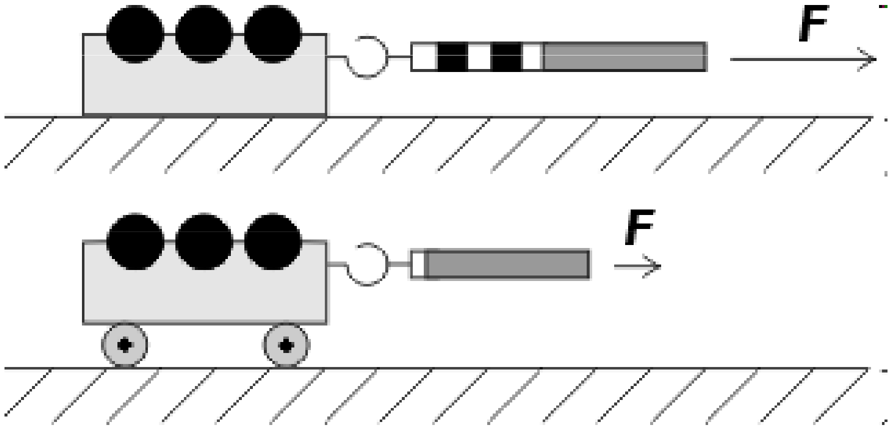




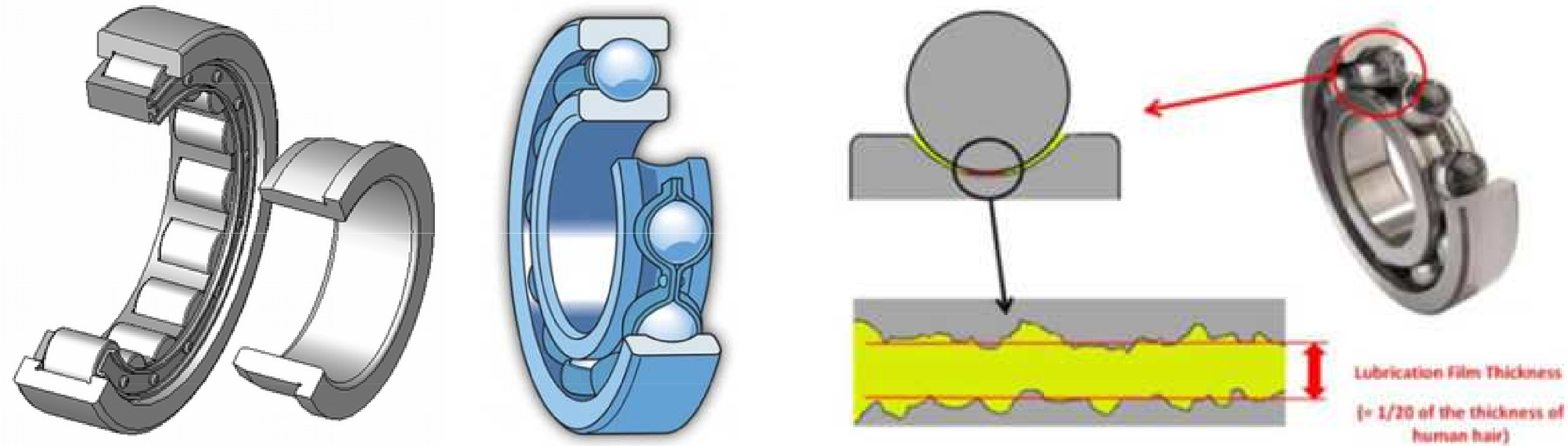
Velikost koeficientu ξ pro valení pneumatiky auta po betonu je 0,01 až 0,02 m. Při valení kola vagonu po koleji je 0,001 až 0,002 m.

Valivý odpor vzniká při deformaci pneumatiky a vozovky. Pokud je vozovka tuhá, dochází pouze k deformaci pneumatiky. Nejmenší valivé odpory mají logicky kolejová vozidla, naopak největší mají např. terénní vozidla a pouštní speciály. Pneumatika se stýká s vozovkou v ploše zvané stopa pneumatiky.

Za stejných podmínek je valivý odpor mnohem menší než třecí síla při smykovém tření.

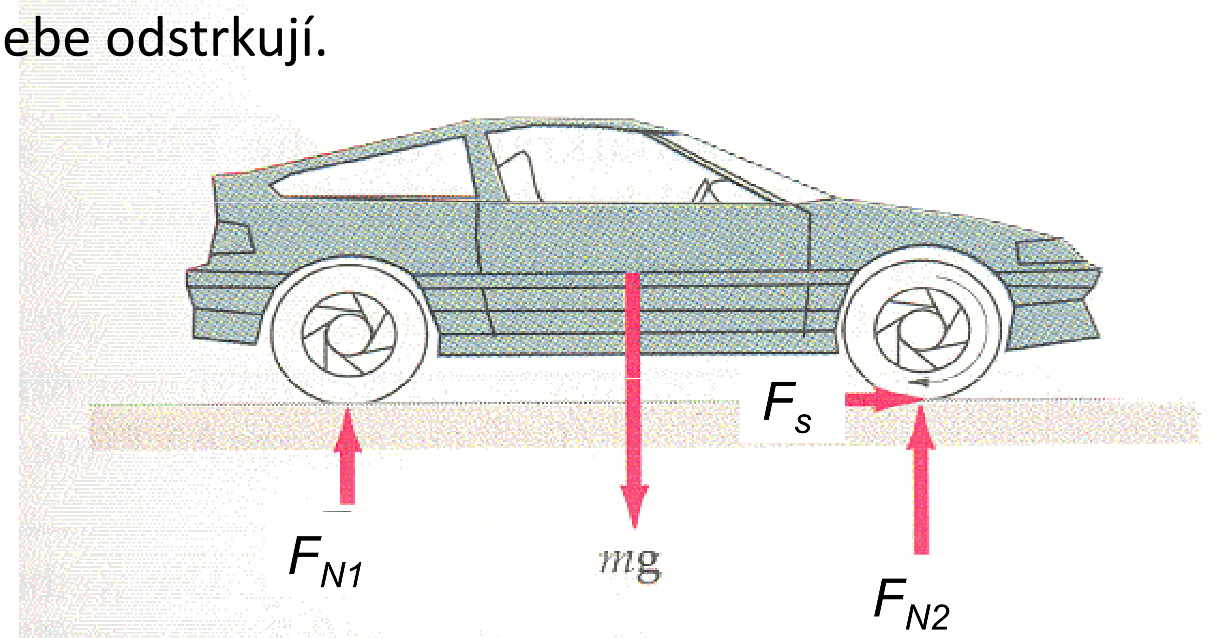


Toho se využívá u válečkových nebo kuličkových ložisek, používaných ke snížení tření.



Tření a jízda automobilu

Stojí-li auto na dokonale hladké ploše, mezi jeho pneumatikami a plochou není tření. V tomto případě by se kola auta sice točila, ale auto by nejelo vpřed. Aby auto získalo potřebné zrychlení, musí působit vnější síla. Aby se automobil dal po vodorovné silnici do pohybu, působí motorem poháněná kola na vozovku, v podstatě ji od sebe odstrkují.



Tíhová síla $m.\boldsymbol{g}$ se rozloží na dvě paralelní složky $\boldsymbol{F}_{N1}$ a $\boldsymbol{F}_{N2}$. Tyto složky vyvolají statické tření (pokud pneumatiky neprokluzují). Pneumatika působí na silnici vtištěnou silou $-\boldsymbol{F}_v$ a pokud není překročena hodnota $\boldsymbol{F}_{s\ max}$, je síla statického tření rovna vtištěné síle. Síla tření $\boldsymbol{F}_s$ působí na pneumatiku podle principu akce a reakce. Tato síla působí zrychlení auta.

Rozjíždění auta. Pneumatiky auta působí na vozovku silou směřující proti směru pohybu, proto podle zákona akce a reakce musí vozovka působit stejně velkou silou na kola, ale opačného směru. Tření mezi vozovkou a pneumatikami je zde **silou hnací**. Toto platí při rozjíždění nebo jízdě stálou rychlostí. Pokud řidič stlačí plynový pedál silně, překročí vtištěná síla horní hranici statického tření, pneumatiky začnou prokluzovat, protože se **statické tření** změní na **smykové**, které je ovšem za stejných podmínek menší. Pro rychlý rozjezd auta je proto třeba volit jen takový výkon motoru, aby prokluzování nenastalo. Při zrychlování auta bez prokluzování pneumatik zůstává plocha dotyku pneumatiky a silnice v klidu. Jde tedy o **statické tření**. Při prokluzování pneumatik jde o tření smykové. Při statickém tření můžeme pro zrychlení auta psát $a = F_s/m$.

Brzdění auta. Je-li brzdící síla menší než maximální hodnota statického tření, je auto brzděno silou **statického tření**. Když však se brzdy zablokují a pneumatiky po silnici kloužou, jde o **tření smykové**, které je menší. Zablokování brzd tedy vede k prodloužení brzdné dráhy.

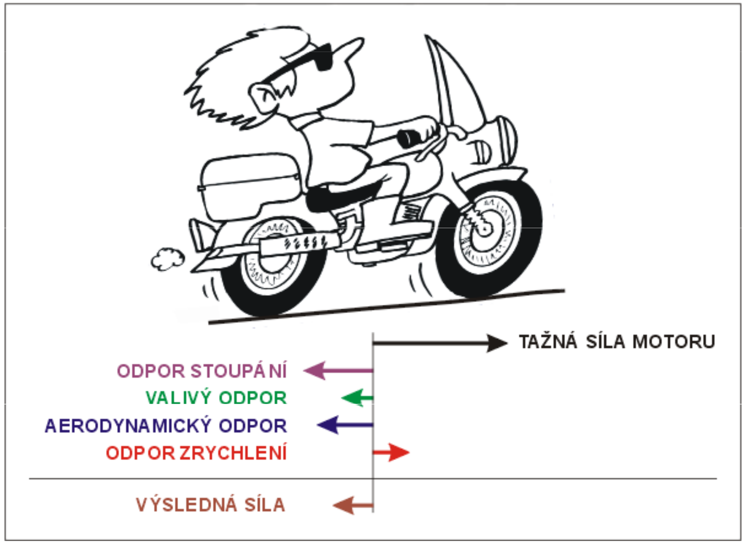
Auto jede po silnici stálou rychlostí. V tomto případě se pneumatiky odvalují po silnici a jde tedy o **tření valivé**, které je značně menší než tření smykové. Za této situace je značná část výkonu motoru (při jízdě po vodorovné silnici) spotřebována na překonání odporu vzduchu.

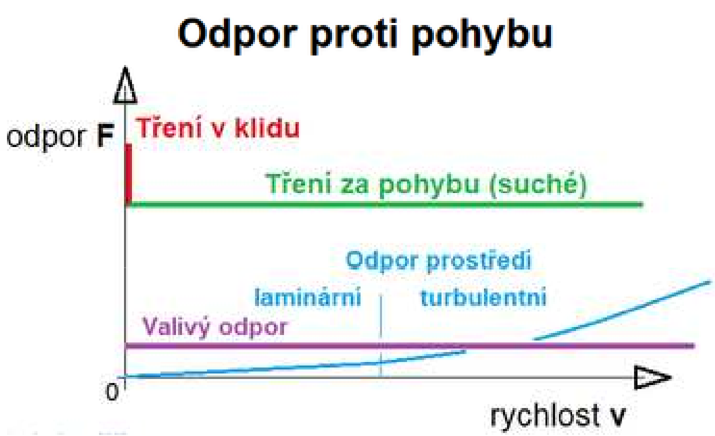
Pneumatika se při jízdě do jisté míry deformuje a tato deformace způsobuje odpor vůči valivému pohybu. Rovná plocha se může také deformovat, zvláště pokud je relativně měkká - např. písek: jízda po zpevněné vozovce je mnohem snadnější než po písečné pláži.

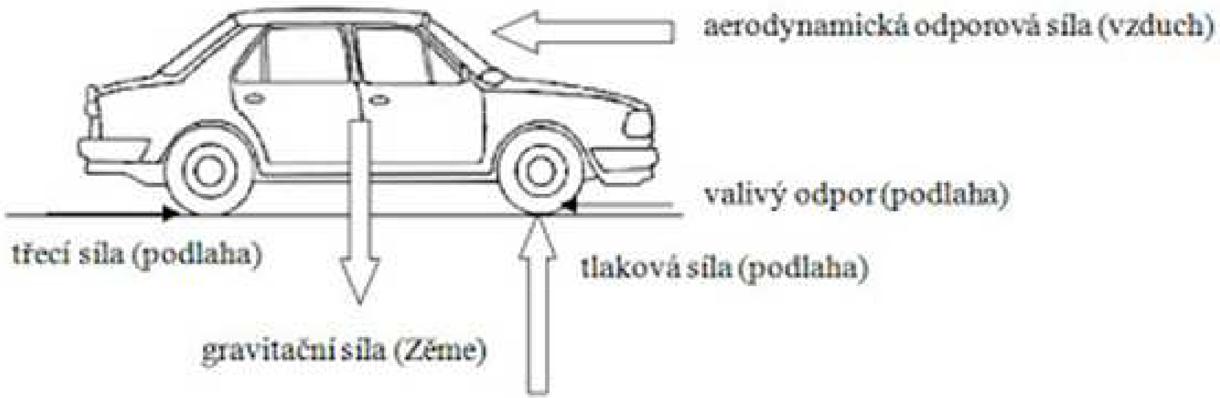
Valivý odpor měří ztrátu energie, když se předmět valí na určitou vzdálenost.

Energie se rozptyluje:

- v důsledku tření na kontaktním rozhraní;
- v důsledku pružných vlastností materiálu;
- v důsledku nerovnosti valivého povrchu.



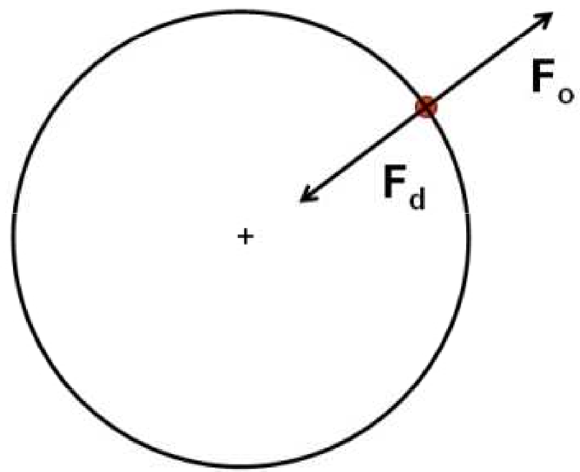




Dostředivá síla

Dostředivá (centripetální) **síla** je síla, která má směr do středu křivosti trajektorie tělesa při křivočarém pohybu (při pohybu po kružnici do středu kružnice). Má směr normály k trajektorii v daném místě, je tedy kolmá na vektor rychlosti (má stejný směr jako dostředivé zrychlení $\mathbf{a}_d$). Dostředivá síla způsobuje změnu směru vektoru rychlosti (dostředivé zrychlení), a tím zakřivení trajektorie, velikost vektoru rychlosti však nemění. Pro její velikost platí:

$$F_d = m \cdot a_d = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$



Protože směřuje do středu kružnice, udržuje hmotný bod na kruhové dráze.

Dostředivá síla existuje z pohledu pozorovatele v inerciálních vztažných soustavách.

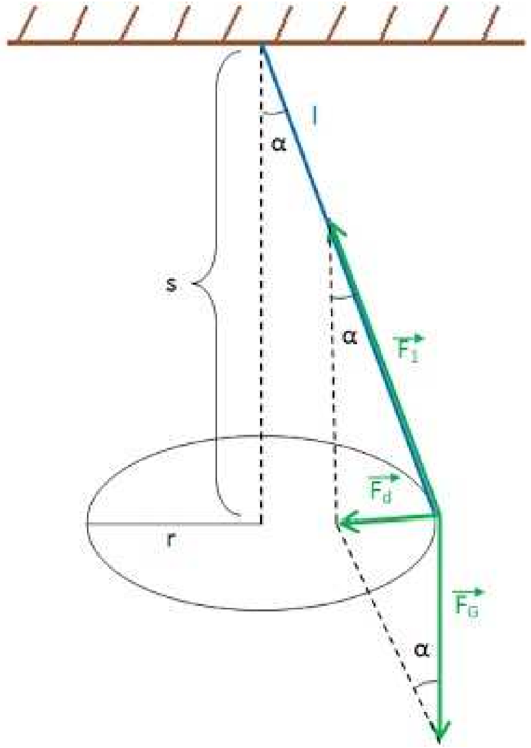
$F_d = m \,.\, a_d$ $\quad a_d = \omega^2 r = v^2/r$ $\quad \omega = 2\pi f$

$\boxed{F_d = m\omega^2 r \quad \text{nebo} \quad F_d = mv^2/r}$

$\boxed{F_d = F_o}$

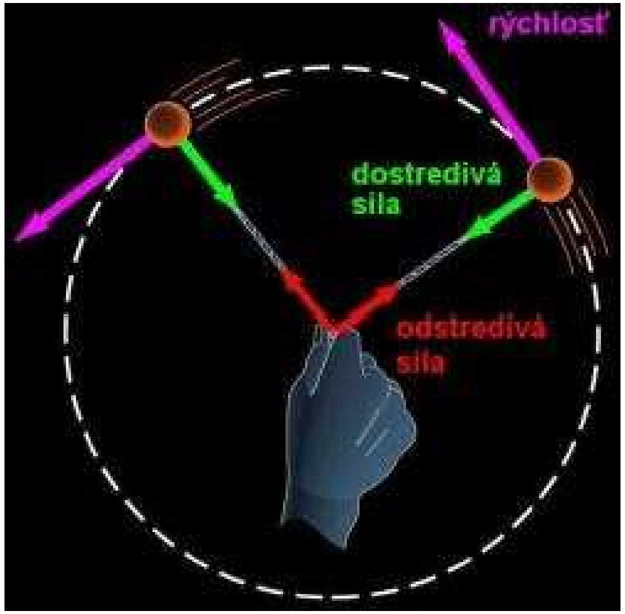
Dostředivá síla může mít původ v libovolném vzájemném silovém působení dvou těles. Může být realizována např. tahovou silou, gravitační silou (družice při pohybu kolem Země, planety při pohybu kolem Slunce), magnetickou (vychylování elektronů) apod.

Působí-li na hmotný bod při rovnoměrném pohybu po kružnici několik sil, je dostředivá síla jejich výslednice. Např. dostředivá síla F_d působící na sedačku řetízkového kolotoče je při otáčení kolotoče výslednicí tíhové síly F_g a tahové síly F_t řetězu.

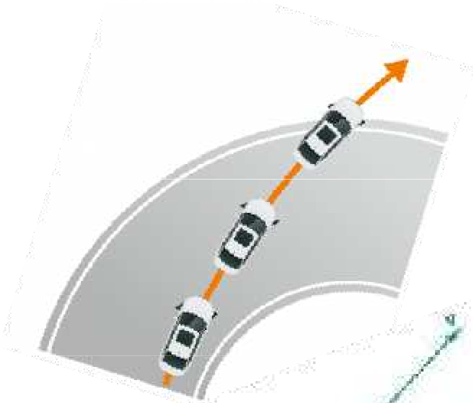


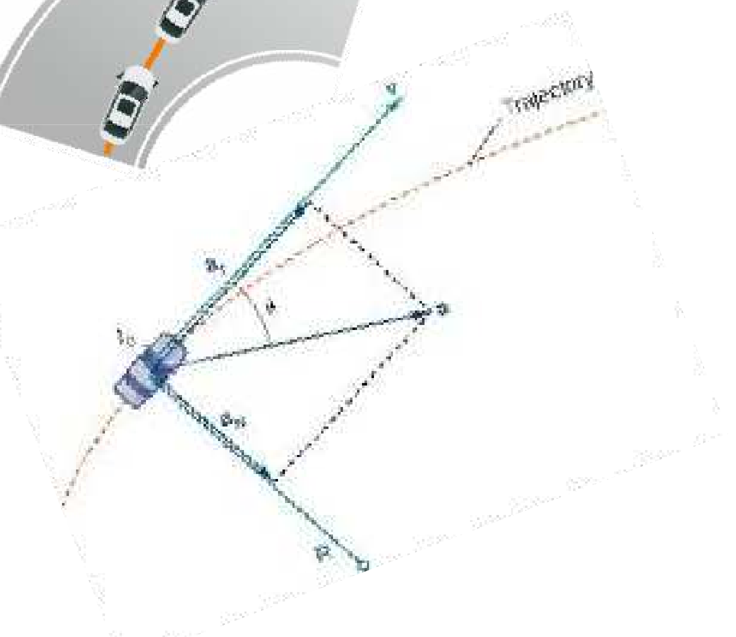
Přestane-li dostředivá síla na těleso působit, pohybuje se těleso dále ve směru tečny ke kružnici. Proto jiskry, které odlétají od brusného kotouče při broušení kovů, mají směr tečen k brusnému kotouči v těch bodech, z nichž odlétají.

Roztočením **kuličky upevněné na niti** je dostředivá síla vyvolána silou ruky. Při rovnoměrném pohybu po kružnici působí ruka na kuličku prostřednictvím napjatého vlákna dostředivou silou. Zanikne-li dostředivá síla např. přetržením vlákna, kulička se od tohoto místa dále pohybuje ve směru rychlosti **v**, kterou měla v okamžiku zániku síly.



Hod kladivem





Působení dostředivé síly se uplatňuje také **při jízdě vozidla v zatáčce**. Dostředivou silou působí povrch vozovky na pneumatiky vozidla. Zanikne-li nedostatečným třením dostředivá síla, dochází ke smyku vozidla, které se pak dále pohybuje ve směru tečny k původní trajektorii vozidla.

Neinerciální vztažné soustavy

Neinerciání vztažná soustava je soustava, která se vzhledem k inerciální vztažné soustavě pohybuje jinak než rovnoměrným přímočarým pohybem. V neinerciální vztažné soustavě izolované těleso nezůstává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.

Pozorovatel, nacházející se v neinerciální vztažné soustavě, která se pohybuje se zrychlením **a**, pozoruje pohyb izolovaného tělesa se zrychlením -**a**. Tento pohyb vysvětluje existenci tzv. **setrvačné síly** působící na těleso o hmotnosti m

$$\mathbf{F} = m.\mathbf{a}.$$

Zrychlení, které udílí setrvačná síla tělesům, je pro všechna tělesa stejně velké (nezávisí na jejich hmotnosti).

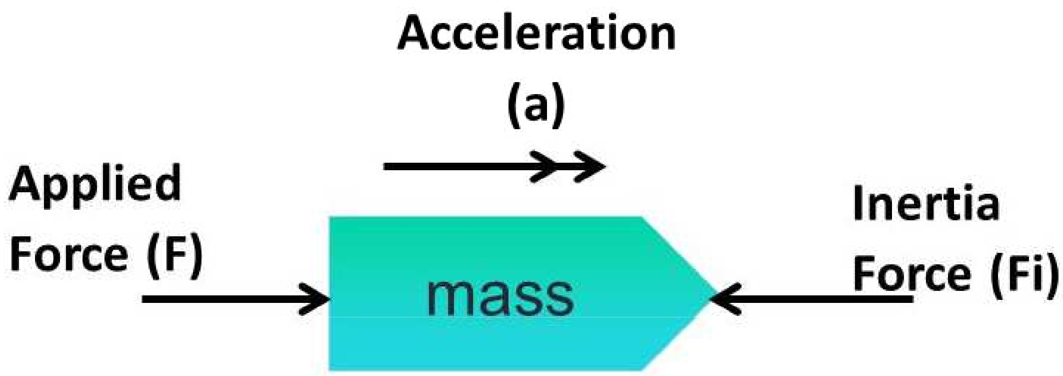
Setrvačná síla je „zdánlivá“ (nepravá) síla způsobující změnu pohybového stavu (změnu rychlosti) těles v neinerciálních vztažných soustavách. Přitom je to síla, která v této soustavě nemá svůj původ, pouze účinek. Setrvačná síla se označuje jako „zdánlivá“ (nepravá), protože se ve skutečnosti nejedná o sílu, mající původ ve vzájemném působení (interakci) těles. Newtonovy pohybové zákony platí jen pro inerciální vztažné soustavy (z definice) a proto pokud je chceme použít k výpočtu v soustavě neinerciální, musíme je upravit, a to právě přidáním setrvačné síly.

d'Alembertův princip

Součet aktivních (vnějších) sil ($\mathbf{F}_{akt}$) a setrvačných sil ($\mathbf{F}_s$) působících na těleso v neinerciálních soustavách je nulový (= aktivní síly jsou ve vzájemné rovnováze se setrvačnými silami):

$$\mathbf{F}_{akt} + \mathbf{F}_s = 0$$
$$\mathbf{F}_{akt} = -\,\mathbf{F}_s$$

To umožňuje převést dynamický problém na řešení statické rovnováhy.



F + Fi = 0 so F = -Fi

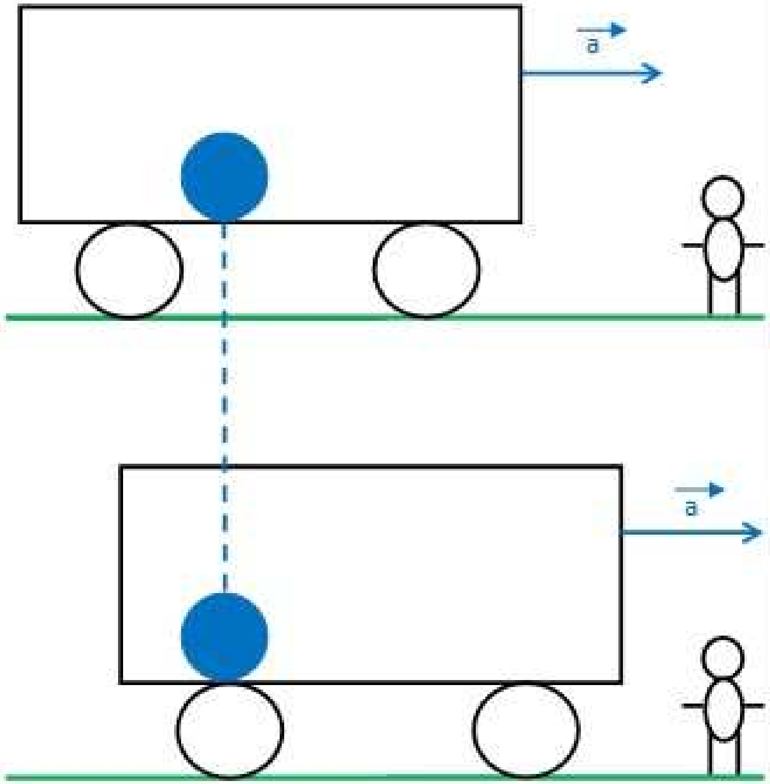
F = ma

so ma = - Fi

or Fi = - ma

Setrvačná síla

POHYB KULIČKY VZHLEDEM K POZOROVATELI NA NÁSTUPIŠTI (V IVS)

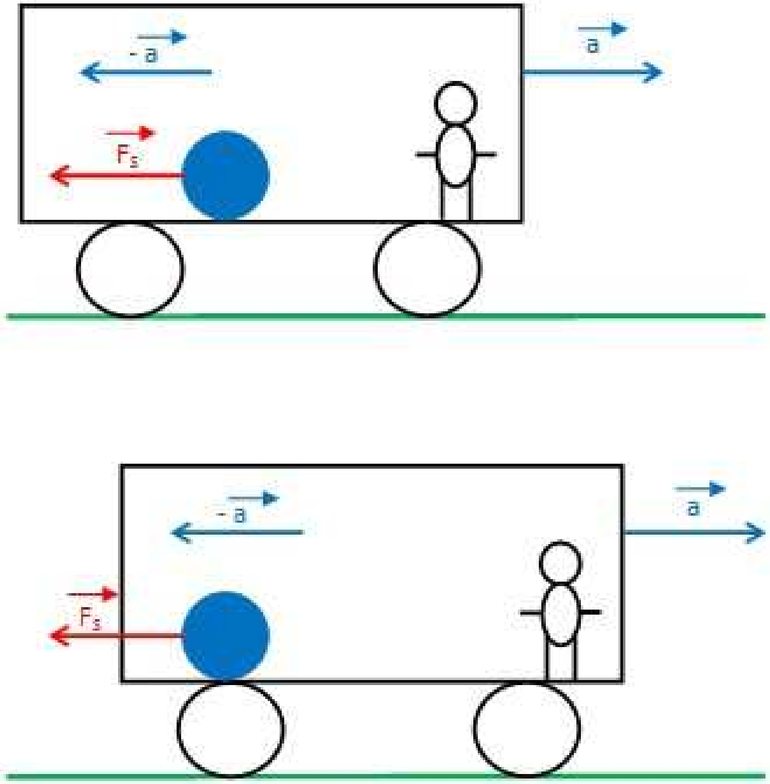


→ kulička vzhledem k IVS (spojená se zemským povrchem) je v klidu

→ zadní stěna vagónu se přibližuje ke kuličce

→ na kuličku nepůsobí žádná síla

POHYB KULIČKY VZHLEDEM K POZOROVATELI VE VAGÓNU (V NIVS)



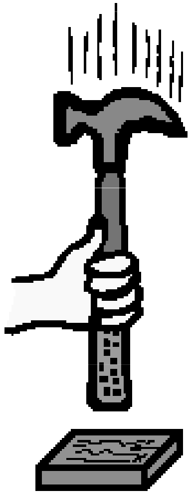
→ kulička se dala do zrychleného pohybu směrem k zadní stěně vozu se zrychlením $-\mathbf{a}$

→ v NIVS na kuličku začala působit síla (F_s)

$F_s = -m \cdot \mathbf{a}$

F_s ... SETRVAČNÁ SÍLA
m ... hmotnost kuličky

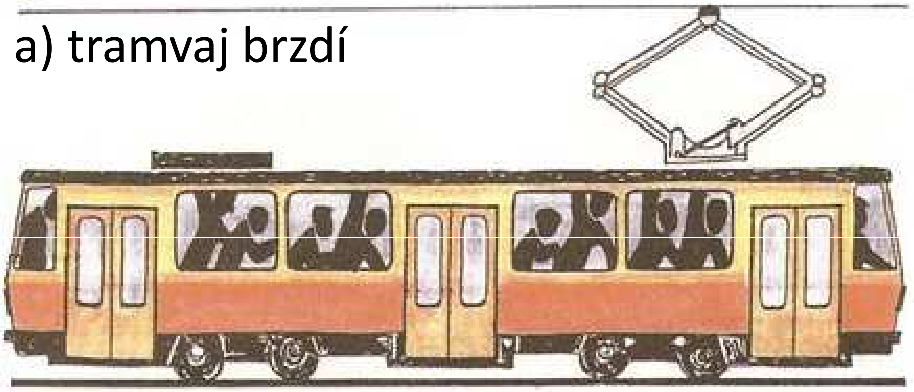
Setrvačná síla



Bezpečnostní pásy
Airbagy
Dětské sedačky

a

a) tramvaj brzdí

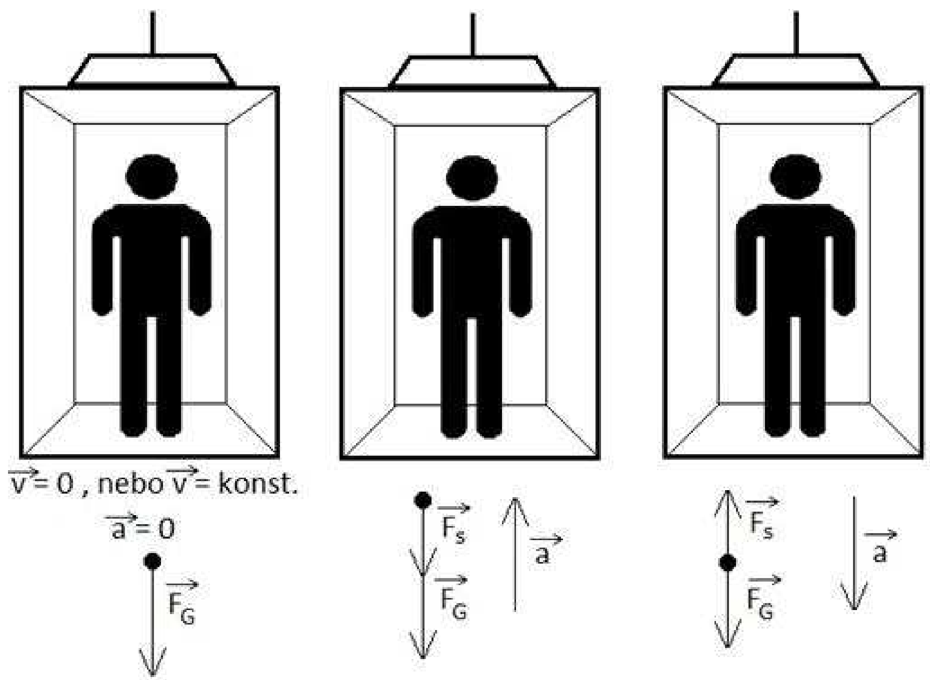


b

b) tramvaj se rozjíždí

Setrvačnost v gravitačním poli

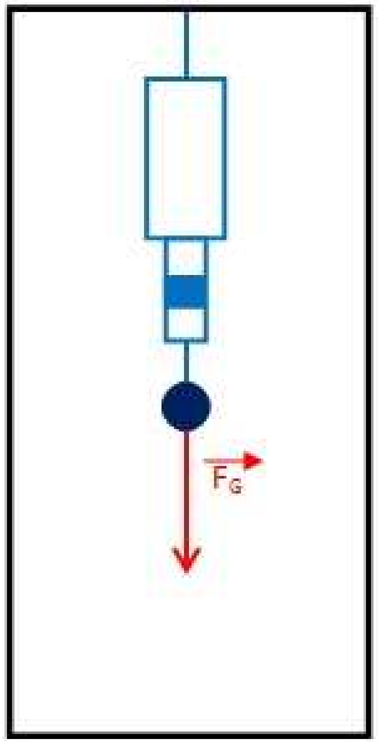
Při pohybu kabiny směrem vzhůru uděluje setrvačná síla tělesu zrychlení směrem dolů a na těleso působí výsledná síla rovná součtu obou sil. V kabině dochází k přetížení tělesa. Při pohybu kabiny směrem dolů uděluje setrvačná síla tělesu zrychlení směrem vzhůru a těleso působí silou rovnou rozdílu sil. V případě, že by se kabina pohybovala volným pádem, pak by na těleso působila nulová výsledná síla a těleso by bylo v beztížném stavu.



Ke značnému přetížení těles dochází např. v kabině kosmických lodí při jejich startu a letu do kosmického prostoru.

A

kabina v klidu nebo pohybu rovnoměrném přímočarém



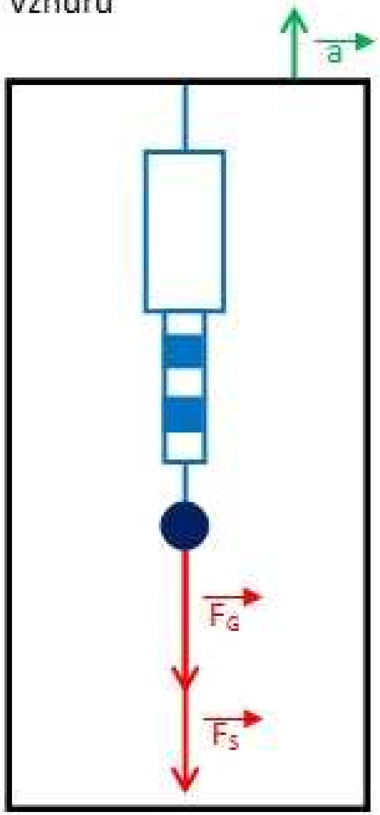
velikost výsledné síly:

$|F| = |F_G|$

F = mg

B

kabina se pohybuje se zrychlením a směrem vzhůru



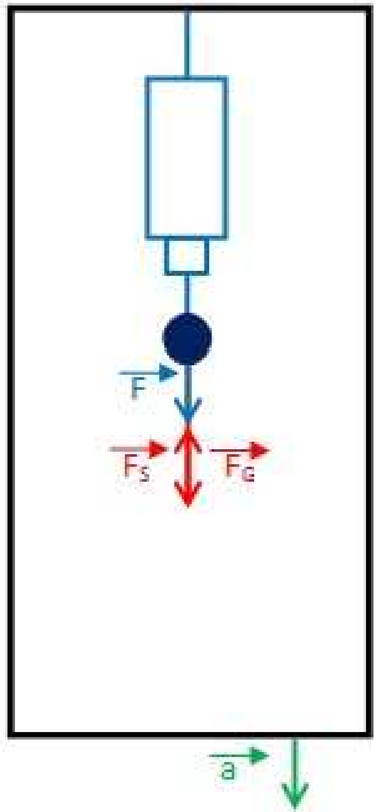
$|F| = |F_G| + |F_S|$

F = mg + ma

(člověk pociťuje zvětšení tíhy)

C

kabina se pohybuje se zrychlením a směrem dolů



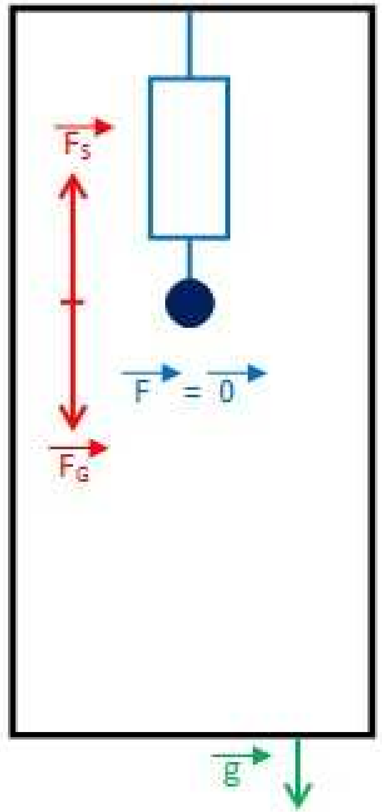
$|F| = |F_G| - |F_S|$

F = mg - ma

(člověk pociťuje zmenšení tíhy)

D

kabina se pohybuje volným pádem

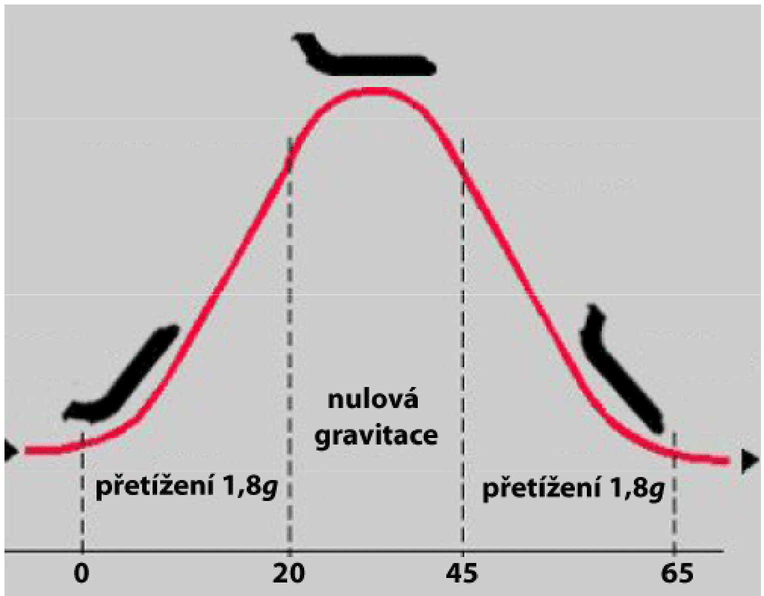


$|F| = 0$

BEZTÍŽNÝ STAV

Simulace beztížného stavu

Beztížný stav můžeme nasimulovat na pár sekund pomocí speciálně upraveného letadla při parabolickém letu. Ten probíhá tak, že letadlo zvedne přední část a stoupá pod úhlem 47°, při této fázi letí letadlo po přímce a pasažéři pociťují téměř dvojnásobné přetížení (1,8*g*). Pak letadlo zamíří na parabolickou trajektorii, kde jsou všechny síly kompenzovány (tah motoru kompenzuje odpor vzduchu, vztlak křídel je kompenzován záporným úhlem náklonu křídel) a na letadlo působí jen gravitační síla – letadlo padá volným pádem pod úhlem 42°. Vše je ve stavu beztíže po dobu 22 s. Po dobu dalších 25 s pasažéři opět pociťují dvojnásobné přetížení. Tato doba je nutná k dosažení běžných letových parametrů.



Odstředivá (centrifugální) síla

Odstředivá síla je síla působící na těleso, resp. hmotný bod, směrem od středu křivosti trajektorie. Existují dva odlišné typy sil, které mají odstředivý směr:

1. **reakce na dostředivou sílu v inerciální vztažné soustavě** (= síla skutečná).
2. **setrvačná odstředivá síla** v otáčející se neinerciální vztažné soustavě, má charakter zdánlivé síly, a proto k ní neexistuje žádná reakce.

Zaměňování těchto dvou druhů sil je nesprávné a často zavádějící, ale běžné.

Reakce na dostředivou sílu

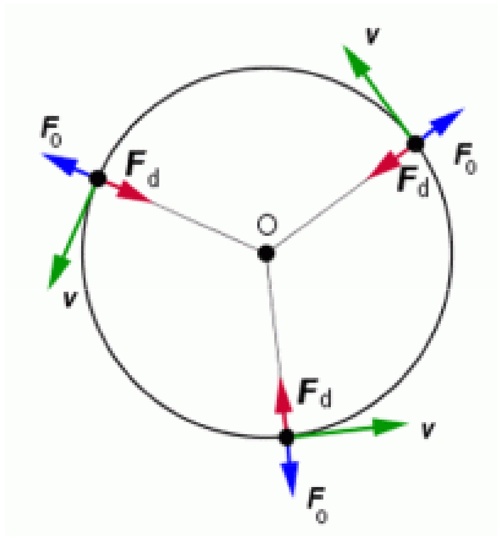
Těleso A, které se v inerciální vztažné soustavě pohybuje po zakřivené trajektorii, má dostředivé zrychlení. Podle druhého Newtonova zákona (zákon síly) musí být toto zrychlení způsobeno silou, kterou nějaké jiné těleso B působí na těleso A. Tato síla má stejný směr jako zrychlení, to znamená do středu, a proto se nazývá dostředivou silou. Podle třetího Newtonova zákona (akce a reakce) musí také těleso A působit stejně velkou silou na těleso B, ale opačným směrem. To znamená, že tato reakce má směr od středu otáčení a lze ji označovat jako odstředivou sílu.

Aby železniční vůz projel levou zatáčkou a nepokračoval v pohybu přímým směrem (zákon setrvačnosti), musí na něj působit **dostředivá síla** směrem doleva. Na železnici tuto dostředivou sílu zajišťuje kolej a můžeme ji nazvat akcí. Zároveň s ní vzniká reakce, takže vůz působí na kolej stejně velkou silou, ale směrem doprava. Kdyby nebyla kolej dobře uložena, tato síla by s ní pohnula (což se občas i stane, zejména při spolupůsobení pnutí v extrémních vedrech). Míří směrem od středu oblouku, takže jí můžeme říkat **odstředivá síla**. Je to síla skutečná, ale působí na kolej, nikoli na jedoucí vůz. Nemá tedy význam sčítat ji se silami působícími na vůz. Situaci jsme popsali v inerciální vztažné soustavě spjaté se Zemí. V této soustavě není žádná odstředivá síla, která by působila na vůz.

Velikost odstředivé F_o působící na kolej je stejná jako velikost dostředivé síly F_d , kterou působí kolej na vůz.

$$F_o = F_d = ma_d = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \,,$$

kde m je hmotnost vozu, v je okamžitá rychlost jízdy, a $=v^2/r$ je dostředivé zrychlení, r je poloměr křivosti oblouku a ω =v/r je úhlová rychlost.



Setrvačná odstředivá síla

Setrvačná odstředivá síla se zavádí v neinerciálních vztažných soustavách, kde mají předměty setrvačné zrychlení, které není způsobeno žádnými skutečnými silami, ale vlastním pohybem soustavy.

Ve vztažné soustavě spjaté s vozem také působí kolej na vůz skutečnou dostředivou silou, jenže vůz se nepohybuje. To můžeme přisoudit působení stejně velké síly opačného směru. Má směr od středu oblouku, jde tedy o odstředivou sílu. Na rozdíl od výše popsané síly působící na kolej, tato síla musí působit na vůz, aby se nepohyboval. Její velikost musí být právě taková, aby kompenzovala dostředivou sílu, to znamená

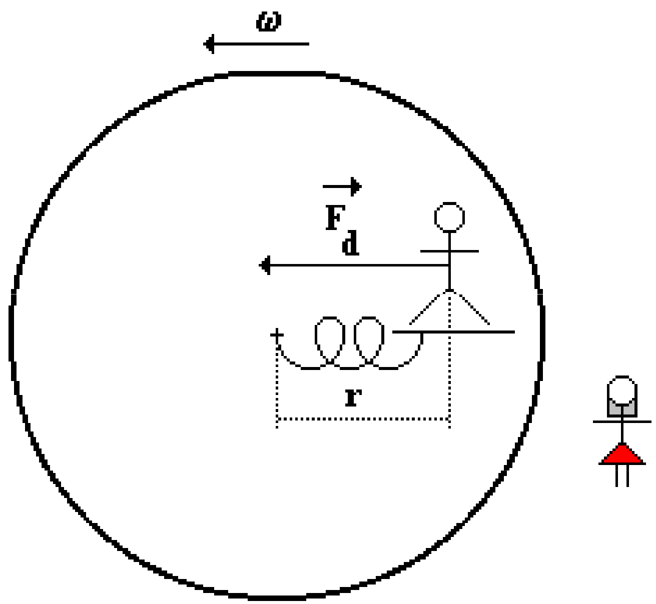
$$F_{\mathrm{s}} = F_{\mathrm{d}} = m a_{\mathrm{d}} = \frac{m v^2}{r} = m \omega^2 r\,.$$

Setrvačné odstředivé zrychlení vozu je stejně velké jako dostředivé zrychlení:

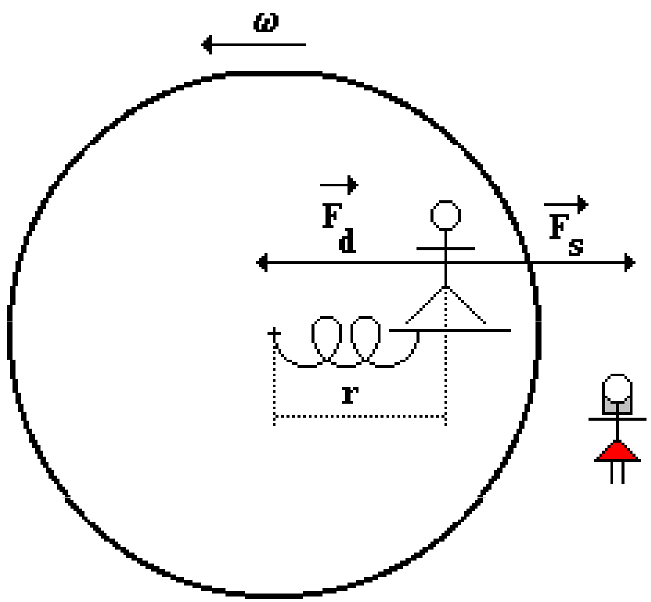
$$a_{\mathrm{o}} = F_{\mathrm{s}}/m = a_{\mathrm{d}}$$

Proto v této soustavě setrvává vůz v klidu**. Setrvačná odstředivá** síla je úměrná hmotnosti předmětu, na který působí, takže pro každý předmět ve voze má jinou velikost. Naopak velikost odstředivého zrychlení a_o je pro všechny předměty v této soustavě společná.

Setrvačná odstředivá síla



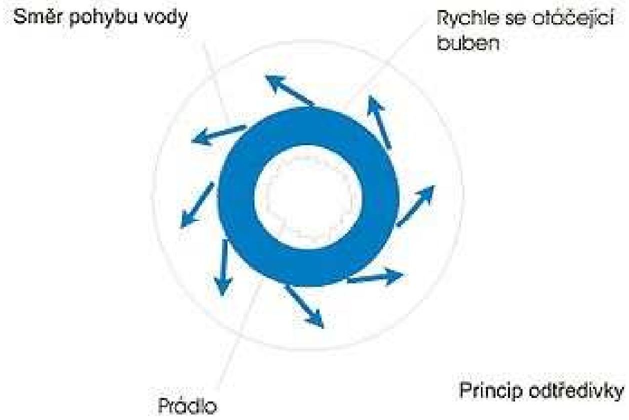
Z hlediska osoby stojící na zemi působí na osobu na sedačce **dostředivá síla** (pohybuje se po kružnici) o velikosti.



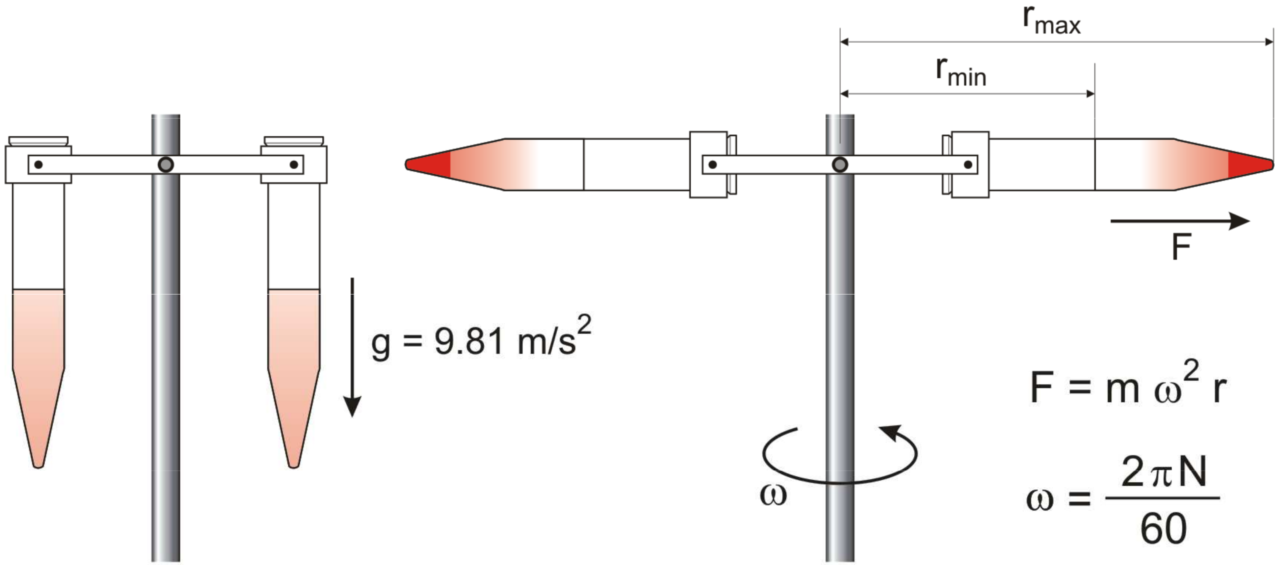
Osoba sedící na sedačce je vzhledem ke kolotoči (neinerciální vztažná soustava) v klidu. Přitom se ale pohybuje po kružnici - tedy působí na něj síla dostředivá. Má-li být osoba sedící na sedačce v klidu, musí být výslednice sil působící na sedačku nulová. Proto na sedačku působí ještě síla, která má stejnou velikost jako síla dostředivá, ale opačný směr a přitom nemá svůj původ v silovém působení ostatních těles. Jedná se o **setrvačnou odstředivou sílu**.

Ždímačka

Ždímačka slouží k odstranění přebytečné vody z právě vypraného prádla. Většina automatických praček v sobě ždímačku integruje. Z pohledu neinerciální vztažné soustavy se buben ždímačky otáčí v otáčející se vztažné soustavě, kde vzniká odstředivá síla F_o, která má směr od středu křivosti. Prádlo v bubnu pračky se pohybuje ve směru rotace bubnu. Čím rychleji se buben pohybuje, tím je větší odstředivá síla a prádlo se více přibližuje ke stěně bubnu. Na kapalinu působí odstředivá síla, což způsobuje, že kapalina pokračuje ve své trajektorii, která je přímočará. Stěna bubnu má otvory, kterými kapalina uniká, takto se prádlo zbavuje vody a je částečně sušeno. Směr pohybu vody po opuštění bubnu je ve směru odstředivé síly, a její výsledná dráha je přímočará.



Odstředivka



$$F = m\,\omega^2\,r$$

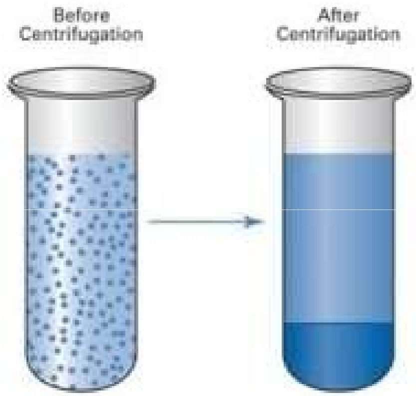
$$\omega = \frac{2\pi N}{60}$$

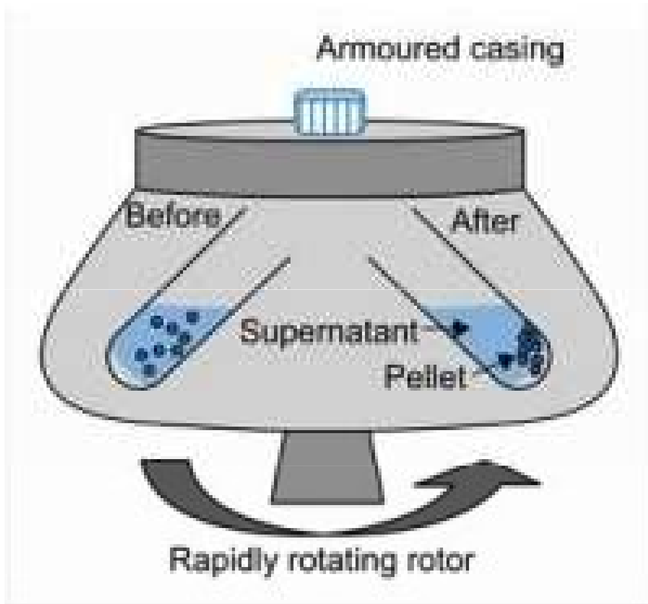
m = mass of particle

r = distance of particle from axis of rotation

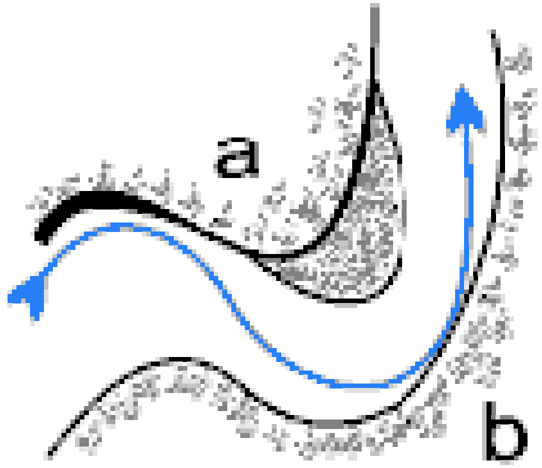
ω = average angular velocity (rad/s)

N = revolution per minute, r.p.m.





Meandry vodních toků

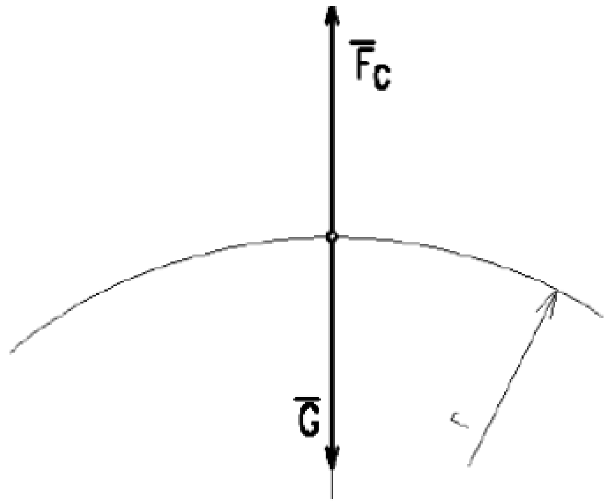


Meandr je zákrut řeky způsobený boční erozí – vymíláním břehů na jedné straně a usazováním na straně druhé. Na tvar říčních meandrů má vliv i Coriolisova síla.

Tg

Příklad

Určete potřebnou rychlost, kterou musí mít motocyklový kaskadér v drátěné kouli, aby mohl bezpečně projet vrcholem koule (tj. hlavou dolů). Koule má průměr 5 m.



Pro bezpečný průjezd musí platit: $F_s > G$

$$m\frac{v^2}{r} > m \cdot g$$

r = 5 m
v = ?

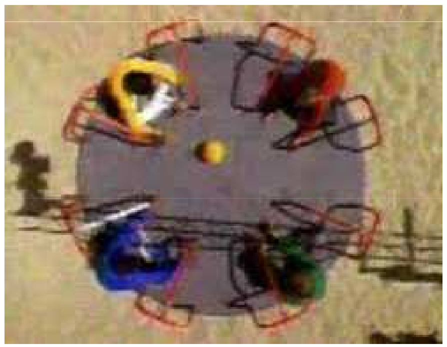
$$tedy\ v > \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{9{,}81 \cdot 2{,}5} = \underline{4{,}95\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})}$$

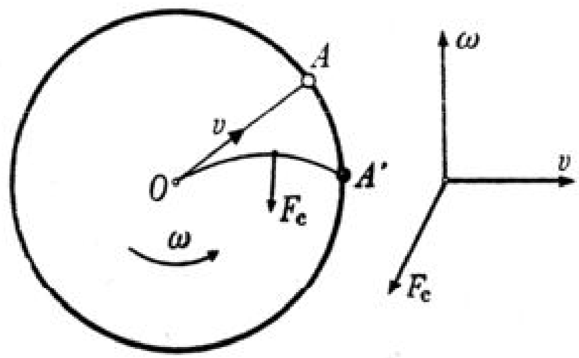
Coriolisova síla

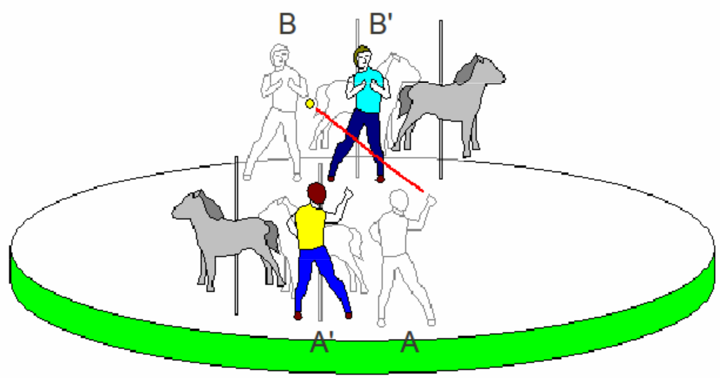
Coriolisova síla působí na každé těleso, které se volně pohybuje v rotující soustavě. Má směr kolmý na spojnici těleso – osa otáčení. Pokud se těleso pohybuje od středu otáčení, tak způsobuje stáčení trajektorie pohybujícího se tělesa proti směru otáčení soustavy. Pokud se těleso pohybuje ke středu otáčení, tak způsobuje stáčení trajektorie pohybujícího se tělesa ve směru otáčení. Toto stáčení trajektorie se označuje jako **Coriolisův efekt** a je <u>pozorovatelný</u> pouze <u>z neinerciální vztažné soustavy</u>.

Příklad

Děti sedí na obvodu malého dětského kolotoče. Když se kolotoč netočí, tak není problém hodit míč jinému dítěti. Ve chvíli, kdy se kolotoč začne otáčet, tak děti mají problém se trefit. Rodič stojící na zemi nic takového nepozoruje, míč poletí stále přímočaře.

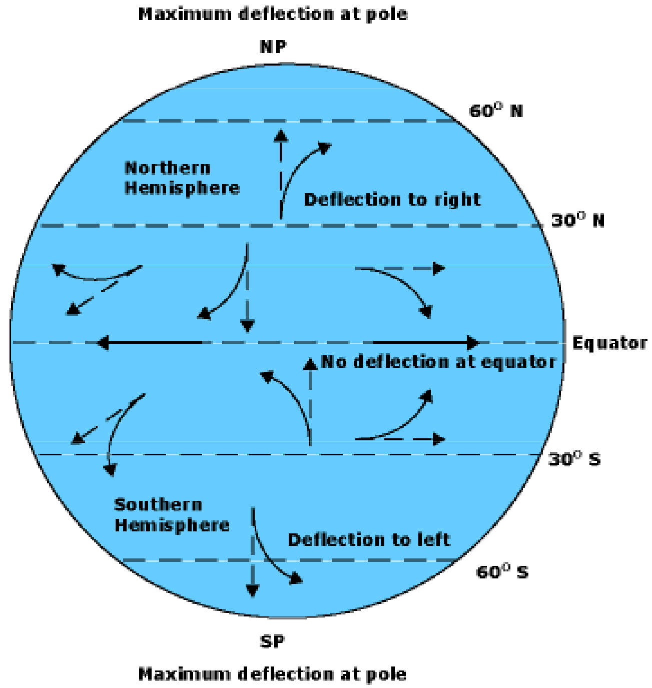


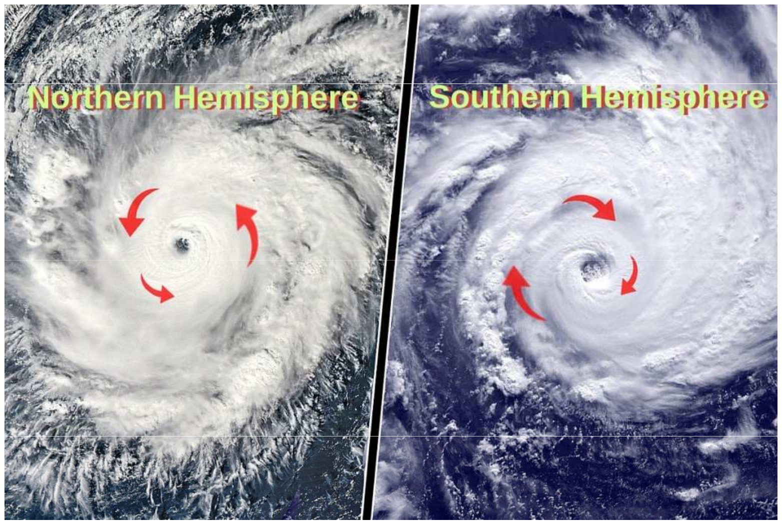


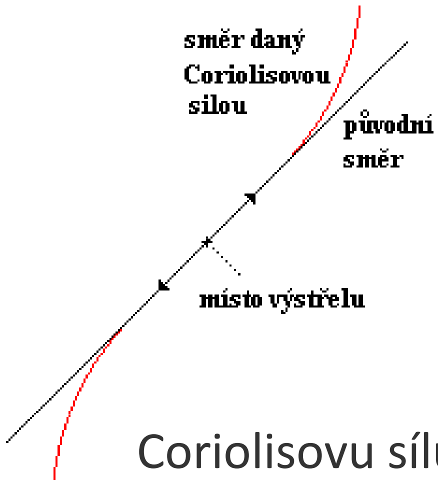


Coriolisova síla

Otáčející se neinerciální soustavou je Země. Z vesmíru bychom pozorovali, že jakákoli hmota pohybující se ve směru poledníku je odkláněna na severu doprava a na jihu doleva. Coriolisova síla ovlivňuje vznik cyklon, pasátů, apod. – na severní polokouli se kolem tlakových výší (anticyklon) vzduch pohybuje po směru hodinových ručiček, okolo tlakových níží (cyklon) ve směru opačném. Na jižní polokouli je tomu naopak.







Hurikány vzniklé na Severní polokouli se točí proti směru hodinových ručiček a naopak.

Coriolisovu sílu musíme brát v úvahu i při výpočtech trajektorií balistických střel, jak se ostatně přesvědčili ostřelovači za první světové války při odstřelování Paříže dělem na vzdálenost 100 km.

Energie hmotného bodu a soustav hmotných bodů

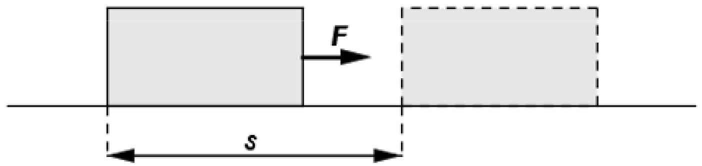
Energie je skalární fyzikální veličina, která charakterizuje formy pohybu hmoty. Různým formám hmoty odpovídají různé druhy pohybu. Jednotkou energie je Joule (J).

Mechanická energie charakterizuje mechanický pohyb těles a vzájemné silové působení těles (hmotných bodů, soustav hmotných bodů).

<u>Hmotný bod má mechanickou energii, jestliže se buď vzhledem k určité vztažné soustavě pohybuje (kinetická energie), nebo se nachází v silovém působení jiných těles (potenciální energie).</u>

Mechanická práce je děj, kdy síla působící na fyzikální těleso posouvá tímto tělesem nebo jeho částí po určité dráze. Zároveň je mechanická práce fyzikální veličina, která vyjadřuje (kvantifikuje) množství práce.

Posuvný pohyb



Mechanická práce závisí na síle, která na těleso působí, na dráze, po které se těleso přemísťuje, a na úhlu, který svírá síla a trajektorie pohybu tělesa.

1) *Síla působí ve stejném směru jako pohyb tělesa*. Přemisťuje-li se těleso po přímce působením konstantní síly F rovnoběžné s trajektorií pohybu tělesa, pak lze velikost práce zapsat ve tvaru

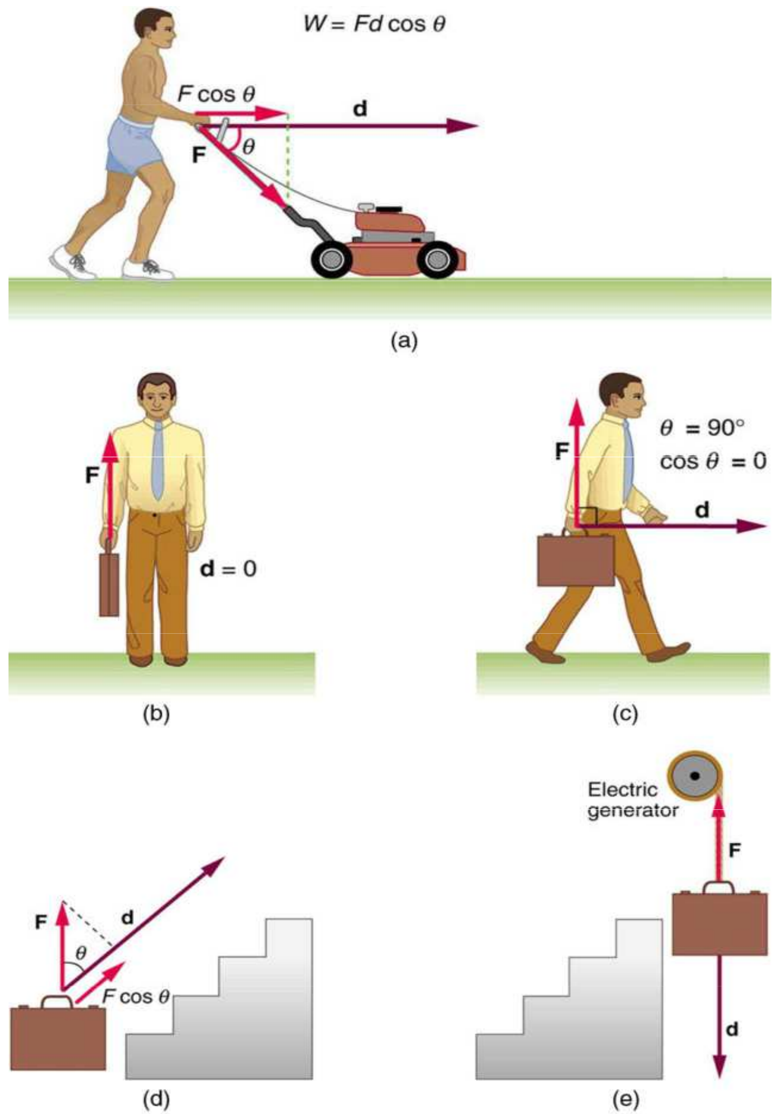
$$W = Fs$$

kde F je velikost působící síly a s je délka dráhy, kterou těleso urazilo.

2) *Síla působí v jiném směru než pohyb tělesa*. Práci koná složka síly rovnoběžná s trajektorií tělesa.

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$$

$$W = Fs\cos\alpha$$



3) *Síla se mění nebo dráha je zakřivena*. V obecném případě, tedy i pokud je dráha zakřivena nebo síla je proměnná, použijeme pro výpočet integrál tzv. elementárních prací

$$W = \int_0^s \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_0^s (F \cos \alpha) \, \mathrm{d}s$$

Otáčivý pohyb

Mechanická práce závisí na **momentu síly**, který na těleso působí, na úhlu, o který se těleso otočí, a na úhlu, který svírá vektor momentu síly a osa otáčení tělesa. Otočí-li se těleso kolem neměnné osy otáčení působením konstantního momentu síly **M** rovnoběžného s osou otáčení tělesa o úhel α, pak lze velikost práce W zapsat ve tvaru

$$W = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha}$$

$$W = M\alpha$$

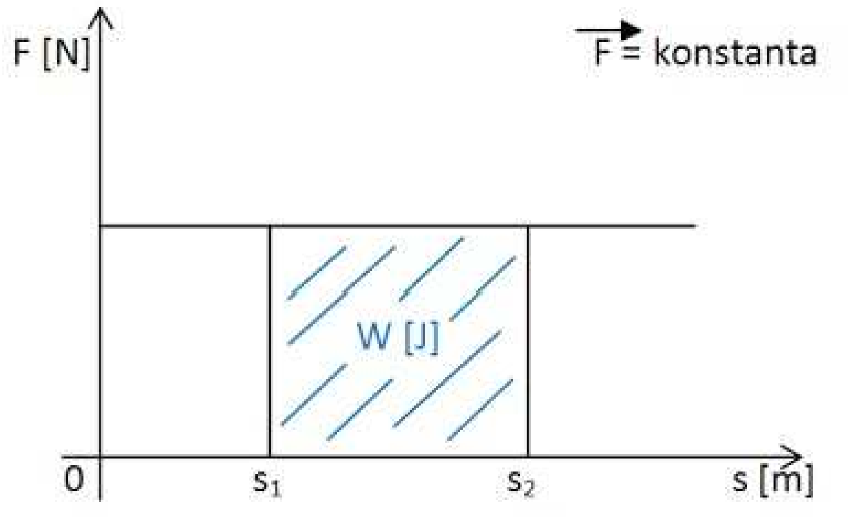
kde M je velikost působícího momentu síly a α je úhel, o který se těleso otočilo.

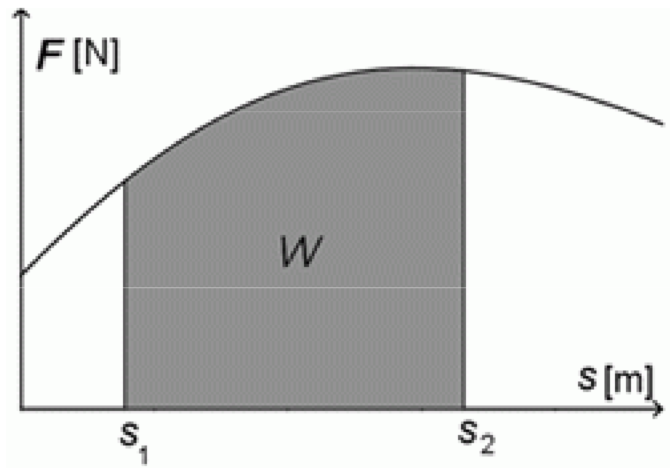
Práci koná složka **momentu síly** rovnoběžná s osou otáčení tělesa. **Úhel otočení** lze považovat za vektor (přesněji axiální vektor) směřující ve směru osy otáčení a orientovaný podle pravidla pravé ruky.

Pokud je moment síly proměnný, použijeme pro výpočet integrál tzv. *elementárních prací* $\mathrm{d}W = \mathbf{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}$

$$W = \int_0^{\alpha} \mathbf{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}$$

Grafický výpočet mechanické práce





Kinetická energie

Kinetická energie (též pohybová energie) je jeden z druhů mechanické energie, kterou má pohybující se těleso. Je to tedy práce, kterou musíme vykonat, abychom urychlili těleso na určitou rychlost. Velikost kinetické energie tělesa, vykonávajícího posuvný pohyb závisí na jeho hmotnosti a rychlosti. Vykonává-li těleso rotační pohyb, závisí jeho energie na úhlové rychlosti a momentu setrvačnosti. Je-li těleso v klidu, má nulovou kinetickou energii. Protože pohyb těles je relativní, záleží hodnota kinetické energie na tom, z jaké vztažné soustavy těleso pozorujeme.

$$E_k = \frac{1}{2}m.v^2$$

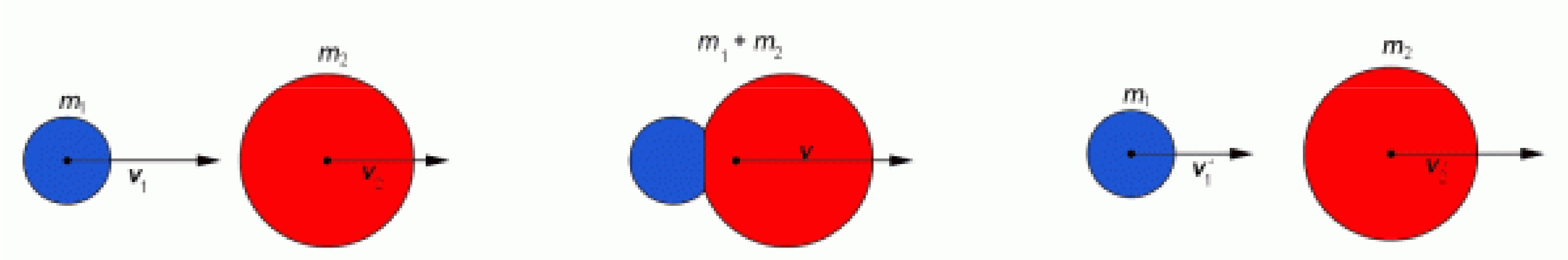
Pro soustavu *n* bodů

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \ ... + \frac{1}{2}m_n v_n^2$$

Soustavu hmotných bodů tvoří např. kulečníkové koule, střepiny po výbuchu granátů, tělesa sluneční soustavy, …

Dokonale pružný ráz

Srazí-li se dvě dokonale pružné koule, probíhá ráz ve dvou fázích. V první fázi se koule deformují vlivem nárazových sil a po velmi krátkou dobu se pohybují společnou rychlostí *v*. Část kinetické energie se přitom změní na potenciální energii pružnosti. Protože však jsou koule dokonale pružné, vrátí se opět do původního tvaru, odskočí od sebe a pohybují se rychlostmi v'_1, v'_2. Potenciální energie pružnosti se opět přemění na kinetickou energii.



Při pružném rázu platí zákon zachování hybnosti i zákon zachování mechanické energie.

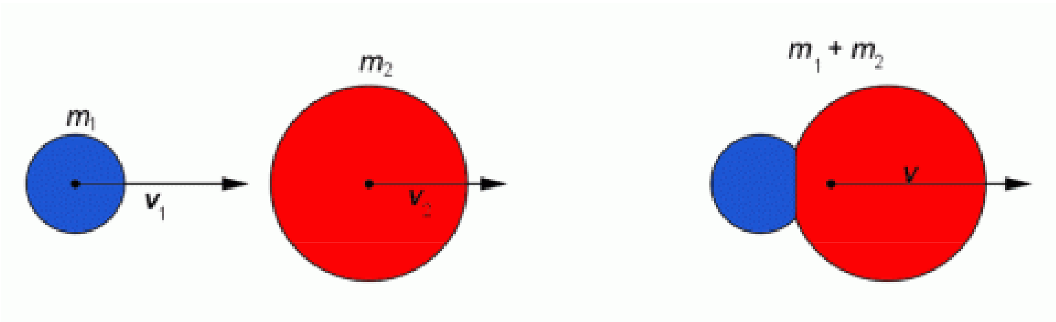
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Odtud plynou zajímavé důsledky: Jestliže mají koule stejnou hmotnost, je rychlost $v'_1 = v_2$ a naopak, tj. koule si při rázu vymění rychlosti. Jestliže je navíc druhá koule před rázem v klidu, první se zastaví a druhá se bude pohybovat rychlostí v_1.

Nepružný ráz

Uvažujeme dvě plastické koule o hmotnostech m_1, m_2, které se pohybují po téže přímce rychlostmi v_1, v_2 téhož směru. Při srážce vznikají na styčné ploše síly, kterými se koule deformují. Protože u plastických koulí je deformace trvalá, zůstanou po rázu obě koule u sebe a budou se pohybovat společnou rychlostí *v*.



Pro koule platí zákon zachování hybnosti, podle něhož je součet hybností před rázem rovný hybnosti po rázu. Platí tedy

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

Hybnost koulí před rázem i po rázu leží v téže přímce a mají stejný směr. Vztah pro rychlost vypočítáme

$$\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = v$$

Kinetická energie po rázu je menší než součet kinetických energií před rázem. Nárazové síly při rázu konají práci spojenou s deformací koulí, přičemž části kinetické energie přejde ve vnitřní energii koulí.

Potenciální energie

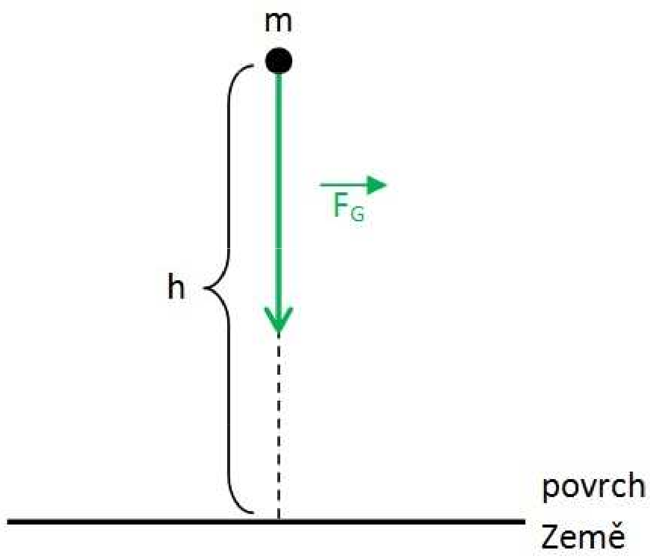
Potenciální energie (též polohová energie) je druh energie, kterou má každé těleso nacházející se v potenciálovém poli určité síly.

Potenciální energie tíhová

V případě, že lze silové působení popsat homogenním tíhovým polem s tíhovým zrychlením **g** (tedy v přiblížení, kdy zanedbáváme pokles tíhového zrychlení s výškou), lze potenciální energii tělesa s hmotností m, vyjádřit jednoduchým vztahem

$$E_{\mathrm{p}} = mgh$$

kde *h* je výška nad úrovní, pro kterou je potenciální energie nulová (zpravidla zemský povrch).



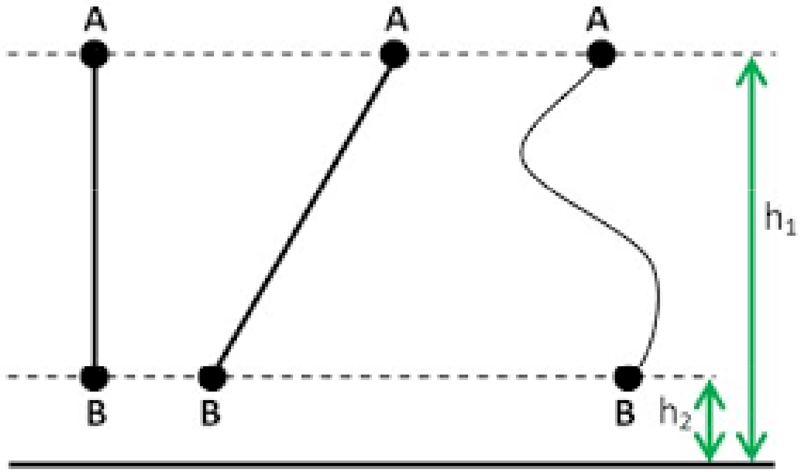
Mechanická práce vykonaná tíhovou silou se rovná úbytku tíhové potenciální energie tělesa, přesněji soustavy těleso – Země.

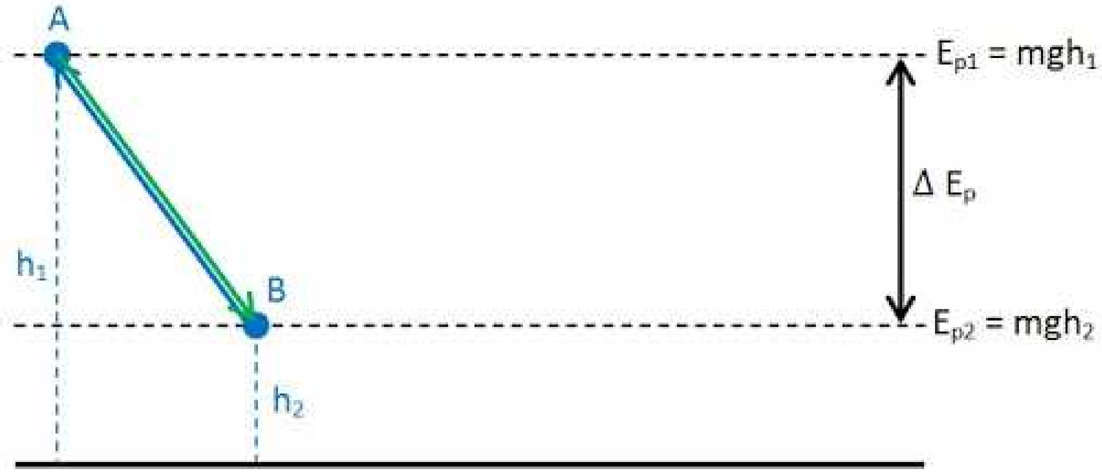
$$W = m.g.(h_1 - h_2) = -\ (m.g.h_2 - m.g.h_1) = -\Delta E_p$$

Mechanická práce vykonaná vnější silou se rovná přírůstku tíhové potenciální energie tělesa, přesněji soustavy těleso – Země.

$$W = m.g.(h_1 - h_2) = m.g.h_1 - m.g.h_2 = \Delta E_p$$

Práce vykonaná tíhovou silou Fg nebo vnější silou F při přemisťování v tíhovém poli Země závisí na počáteční a konečné výšce tělesa, nikoli na tvaru trajektorie po které se těleso pohybuje nebo dráze které při tom urazí.





Jakou práci vykoná prodavač, když zvedne bednu s lahvemi o hmotnosti 25 kg rovnoměrným pohybem svisle vzhůru na polici ve výšce 1,5 m?

Na bednu působí svisle dolů Země gravitační silou F_g, prodavač na bednu musí působit stejně velkou silou svisle vzhůru po dráze s (rovnoměrný pohyb) a vykoná práci W.

$F = F_g$

$m = 25$ kg

$s = 1{,}5$ m

$W = ?$ J

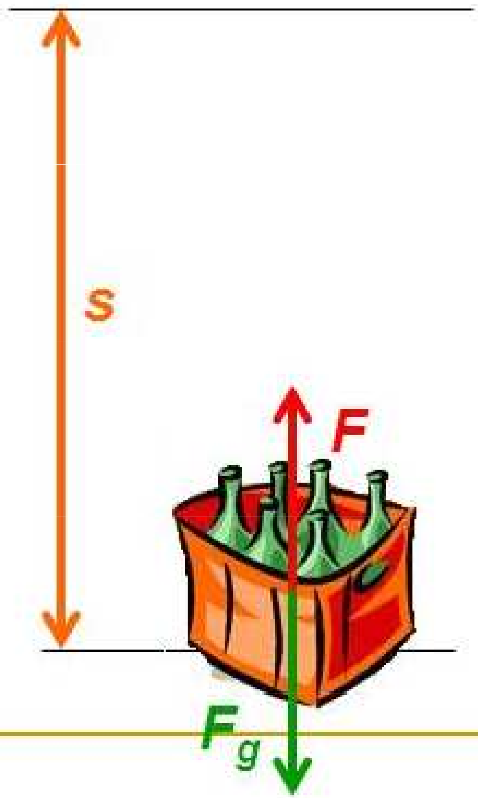
$W = F \cdot s, \quad F = F_g = m \cdot g, \quad g = 10$ N/kg

$W = m \cdot g \cdot s$

$W = 25 \cdot 10 \cdot 1.5$

$\underline{\underline{W = 375\ \text{J}}}$

Prodavač vykonal práci 375 J.



Dráhový účinek síly

Konzervativní silové pole je silové pole, které může konat práci, ale v izolovaném systému na uzavřené křivce je celková vykonaná práce nulová. Mezi konzervativní síly patří např. gravitační síla a elektrostatická síla.

Nekonzervativní síly jsou silami, jejichž práce na uzavřené křivce je nenulová. Při jejich působení tedy dochází k „rozptýlení“, disipaci energie, proto se též nazývají disipativní. Jde například o síly tření.

Gyroskopické síly jsou síly jejichž pole nelze popsat potenciální energií, protože nekonají práci již vzhledem ke své podstatě – působí totiž vždy kolmo ke směru pohybu. Nedochází u nich tedy ani k disipaci energie. Příkladem je působení stacionárního magnetického pole na pohybující se nabitou částici (magnetická část Lorentzovy síly), ze zdánlivých sil pak Coriolisova síla.

Součet kinetické a potenciální energie tvoří celkovou **mechanickou energii** tělesa (soustavy těles).

$$E = E_k + E_p$$

$$E = \frac{1}{2}.m.v^2 + m.g.h$$

Mechanická práce je mírou přeměny energie a mírou přenosu energie z tělesa na těleso.

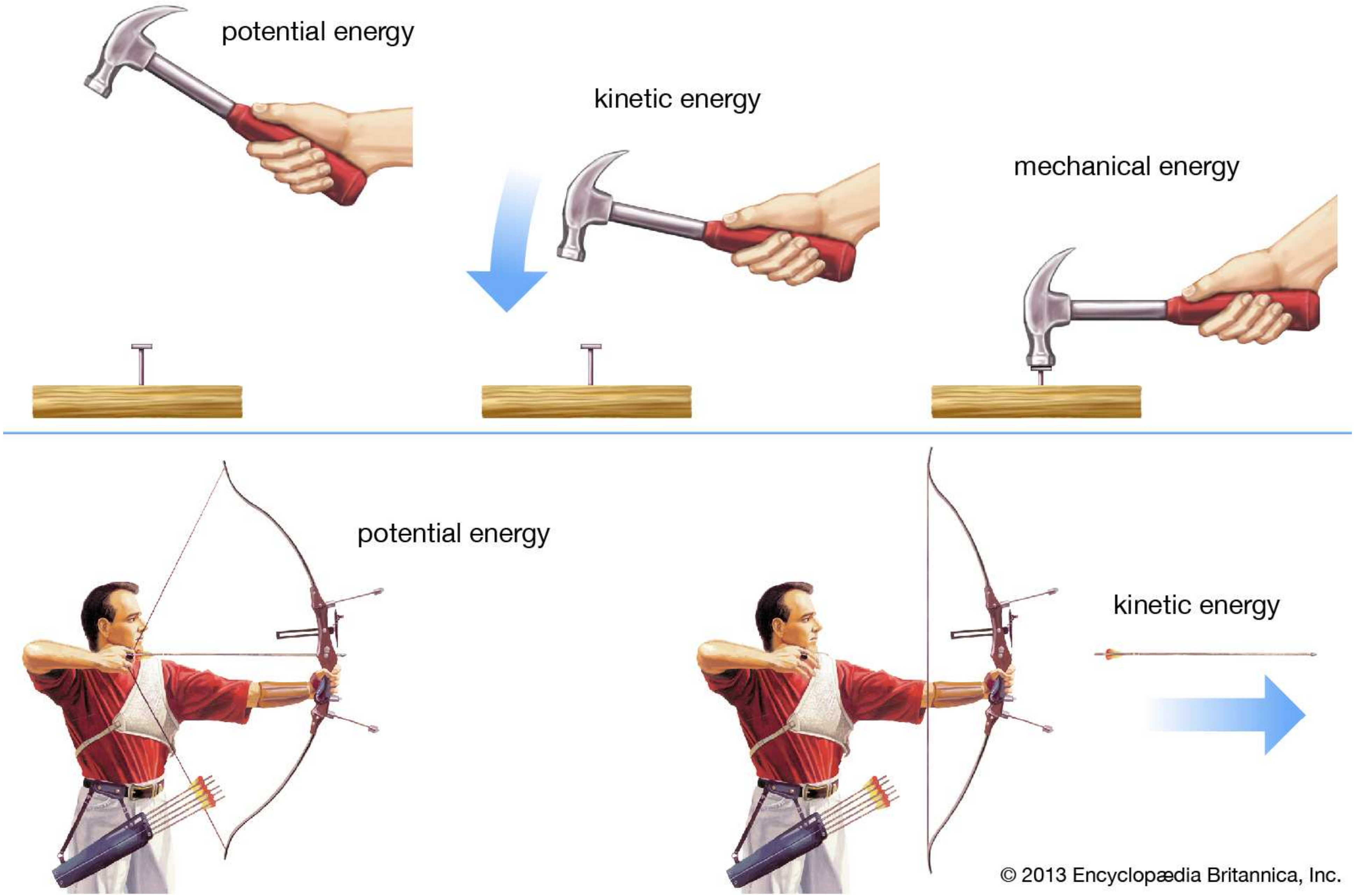
Mechanická energie a mechanická práce jsou dvě různé veličiny. Mechanická práce charakterizuje určitý stav těles (pohybový stav, vzájemné působení těles), mechanická práce charakterizuje fyzikální děj, při kterém se stav těles mění.

Zákon zachování mechanické energie v izolované soustavě

V izolované soustavě (soustavě, kde nepůsobí žádné vnější síly jako tření nebo odpor prostředí) se při všech mechanických dějích mění potenciální energie v kinetickou a naopak, přičemž mechanická energie je konstantní

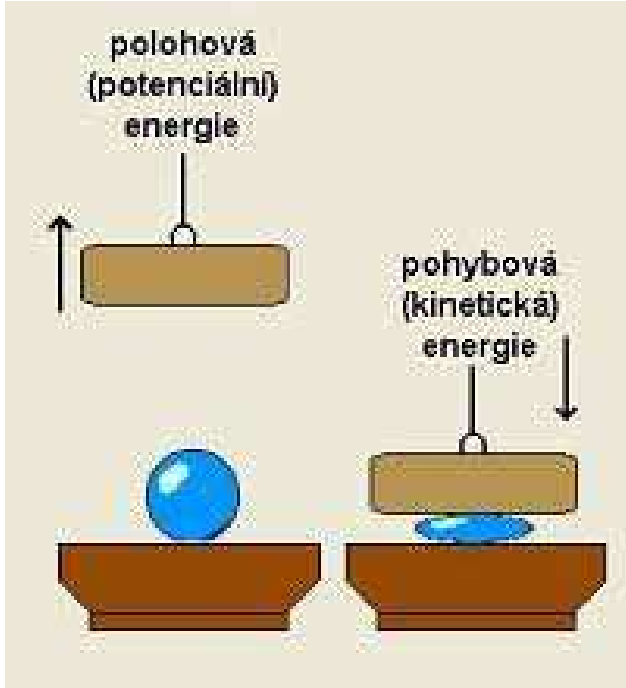
$$E = E_k + E_p = konst$$

V izolované soustavě nemůže energie sama od sebe vznikat nebo zanikat, mění se pouze jeden druh energie v jiný.


potential energy
kinetic energy
mechanical energy
potential energy
kinetic energy

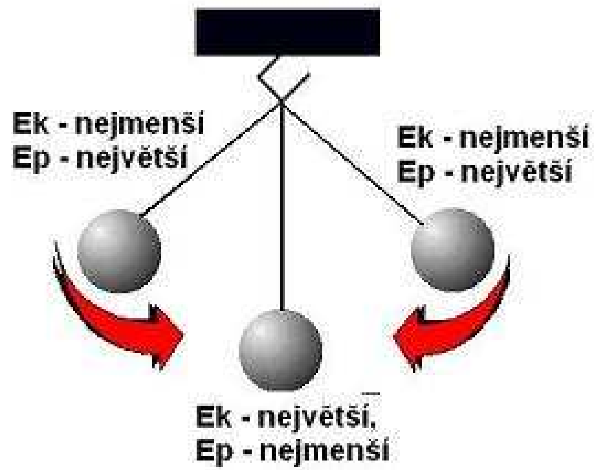
Zákon zachování mechanické energie:

$$E_p + E_k = \text{konst.}$$



Rozšířená podoba:

$$E_p + E_k + W_{deformační} = \text{konst.}$$



Příklad

Kámen o hmotnosti 2 kg padá volným pádem z věže o výšce 80 m. Jakou má kinetickou a jakou tíhovou potenciální energii pro $g = 10\ m.s^{-2}$

a) Na začátku pádu
b) V čase 1 s od počátku pádu
c) Při dopadu?

Na začátku pádu

v = 0 proto Ek = <u>0 J</u>

Ep = m.g.h = 2.10.80 = <u>1600 J</u>

V čase 1 s od začátku pádu

v = g.t

$Ek = ½.m.v^2 = = ½.m.(g.t)^2 = ½.2.(9,81.1)^2 =$ <u>100 J</u>

$s = ½.g.t^2 = ½.9.81.1^2 = 5$ m

Ek = m.g.(h-s) = <u>1500 J</u>

Při dopadu

$s = ½.g.t^2 = ½.g.(v/g)^2 = v^2/2.g$ odtud pro s = h platí $v = \sqrt{2.h.g}$

$Ek = ½.m.v^2 = ½.m.2.h.g = m.g.h = 2.9,81.80 =$ <u>1600 J</u>

h = 0 proto Ep = <u>0 J</u>

Výkon

Výkon je skalární veličina vyjadřující, jak rychle se koná mechanická práce, vyjadřuje množství práce vykonané za jednotku času (P, jednotka Watt).

Průměrný výkon je podílem celkové práce W a doby t za kterou byla práce vykonána

$$P_s = \frac{W}{t}$$

Okamžitý výkon získáme ze vztahu

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

Mechanický výkon je mechanická práce vykonaná za jednotku času. Stroj, který má větší výkon, vykoná za stejný čas více práce.

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv\cos\alpha = F_t v$$

kde F_t označuje složku síly ve směru pohybu (tečná složka síly) a α je úhel mezi vektorem rychlosti a vektorem působící síly.

$$P = M \cdot \omega$$

kde M je moment síly.

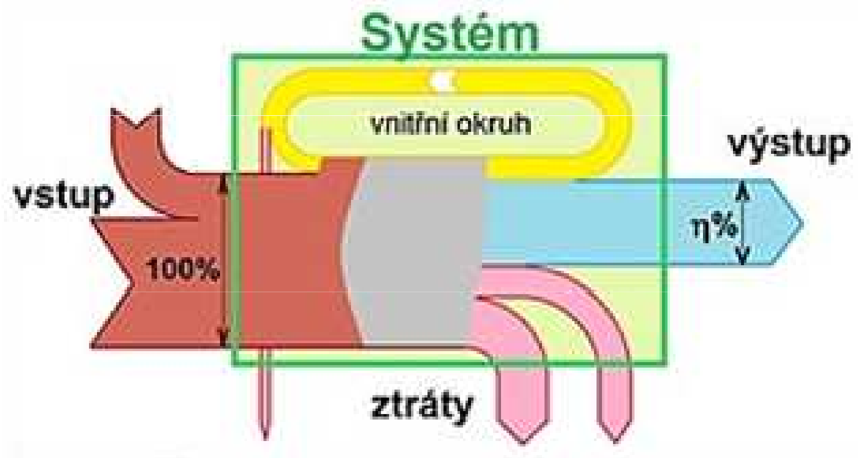
Příkon

Množství energie spotřebované za jednotku času se označuje jako **příkon**.

Účinnost

Vzájemný poměr výkonu (P´) a příkonu (P) vyjadřuje poměrnou fyzikální veličinu nazývanou **účinnost**, která se často vyjadřuje v procentech (poměr násobený 100).

$$\eta = \frac{P'}{P}$$



Jeřáb zvedá břemeno m = 5 t za 20 s do výšky 5 m. Určete příkon elektromotoru v kW, jestliže celková účinnost je 70 %.

$m = 5\ t = 5000\ kg$
$t = 20\ s$
$h = 5\ m$
$\eta = 70\ \% = 0{,}7$

$P_1 = W/t = m.g.h/t = 5000.9{,}81.5/20 = 12265{,}5\ W$

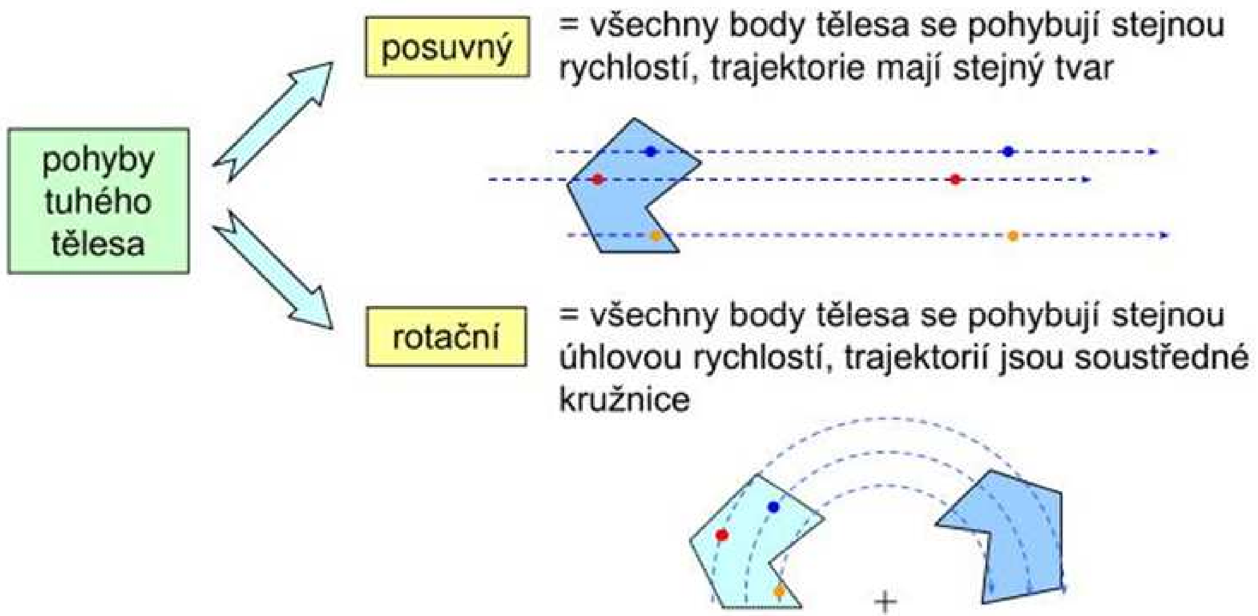
$P_2 = P_1/\eta = 12265{,}5/0.7 = \underline{17{,}5\ kW}$

Mechanika tuhého tělesa

Tuhé těleso

Tato část mechaniky se zabývá pohyby tělesa, při kterých těleso nelze nahradit hmotným bodem, tzn. nelze zanedbat jeho rozměry a tvar a musí se uvažovat otáčivý pohyb tělesa. Na těleso působící síly ve skutečnosti mohou mít i deformační účinky. Proto si reálné těleso nahradíme tuhým tělesem, u kterého deformační účinky zanedbáváme.

Tuhé těleso: nemění účinkem vnější síly svůj tvar ani objem. Dokonale tuhá tělesa ve skutečnosti neexistují, existují jen **tělesa „pevná"**, jejichž tvar, resp. objem, se účinkem sil nepatrně mění. Pohyb tuhého tělesa se vždy skládá z **pohybu posuvného** (translace) a **pohybu otáčivého** (rotace).

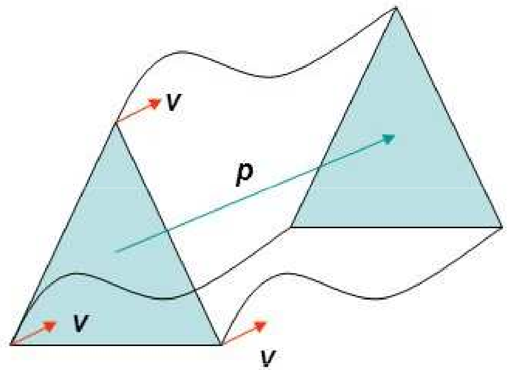


V praxi dochází ke skládání obou pohybů v jeden.

Skládání pohybů není obecně komutativní.

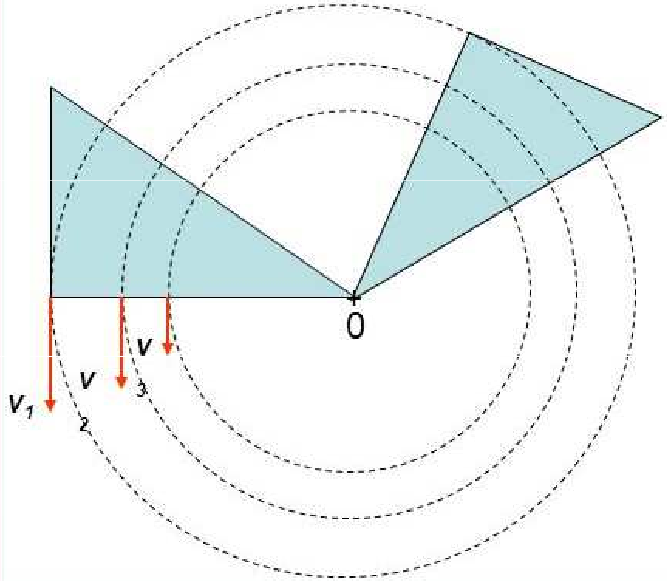
POHYB TUHÉHO TĚLESA

- **translační = posuvný :**
  - všechny body tělesa mají stejnou rychlost a opisují stejné trajektorie
  - každá přímka pevně spojená s tělesem je stále rovnoběžná se svou původní polohou



Tuhé těleso může konat složený pohyb (posuvný i otáčivý současně).

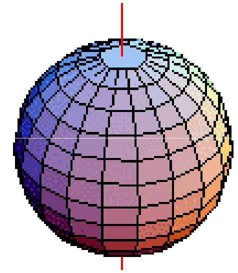
- **rotační = otáčivý :**
  - těleso rotuje kolem pevné osy
  - všechny body mají v daném okamžiku stejnou úhlovou rychlost ω, *ale různou okamžitou rychlost* ($v=r.\omega$)
  - jednotlivé body opisují soustředné kružnice se středem v ose otáčení



Železniční vagón jedoucí po přímé trati, bedna posunovaná po podlaze, píst ve spalovacím motoru, …

Vodovodní kohoutek, dveře, ventilátor, brusný kotouč, CDčko v mechanice počítače, …

Rotační (otáčivý) pohyb



Rotační (otáčivý) pohyb čili otáčení (rotace) kolem osy je takový pohyb tuhého tělesa, při kterém se všechny body tělesa otáčejí kolem jedné společné osy se stejnou úhlovou rychlostí. Otáčivý pohyb může vykonávat i těleso, které není tuhé, pak mluvíme například o diferenciální rotaci.

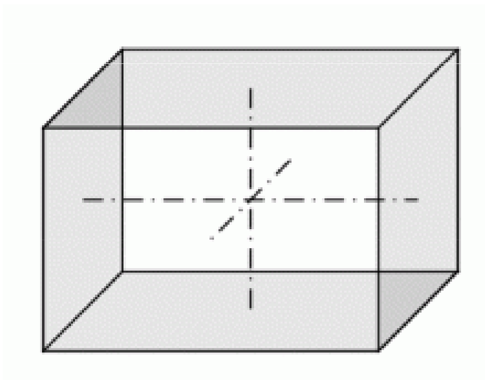
Trajektoriemi jednotlivých bodů tělesa jsou kružnice (nebo jejich části), jejichž středy leží na (okamžité) ose otáčení.

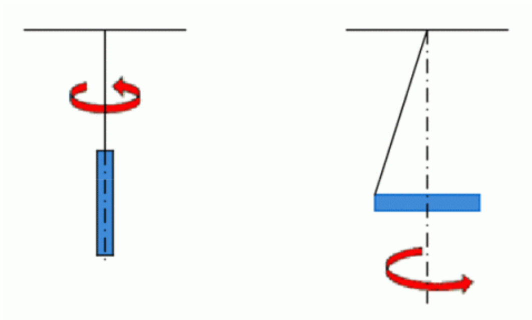
Jako **osa otáčení** se označuje přímka, kolem které se těleso při otáčivém pohybu otáčí. Body tělesa, které na ose leží, zůstávají na svých místech, jejich rychlost je nulová. Při otáčivém pohybu se rozlišuje pohyb kolem **pevné osy** nebo kolem **okamžité (volné) osy**.

Otáčení kolem pevné osy. Všechny body ležící na ose otáčení jsou při tomto pohybu v klidu. Při otáčení kolem pevné osy má osa stálý směr a všechny body tělesa kolem ní opisují kruhové oblouky se středem na ose otáčení. Všechny body tělesa mají stejnou úhlovou rychlost $\omega = d\varphi/dt$ a stejné úhlové zrychlení dané vztahem $\varepsilon = d\omega/dt$.

Při otáčení tělesa kolem nehybné osy působí na jednotlivé body tělesa **setrvačné síly**, směřující od osy otáčení: **odstředivá síla** způsobená nerovnoměrným rozložením hmotnosti vzhledem k ose rotace, a **deviační moment** snažící se vychýlit osu rotace tak, aby hmotnost byla rozložena rovnoměrně i podél osy rotace. Tyto síly jsou vyrovnávány reakcemi v ložiscích os (ložiska jsou tak jedny z nejnamáhanějších strojních součástí). Proto se otáčivé části strojů, kola motorových vozidel apod. vyvažují tak, aby osa otáčení procházela těžištěm.

Pokud osa rotace mění svou polohu v prostoru, je velikost úhlové rychlosti opět dána vztahem $\omega = d\varphi/dt$. V takovém případě se hovoří **o otáčení kolem okamžité (volné) osy**. Při obecném pohybu změní po určité době okamžitá osa rotace svou polohu v prostoru a nová poloha je s předchozí polohou obecně mimoběžná.
Všechny osy souměrnosti tělesa jsou volnými osami. Každé tuhé těleso má alespoň tři volné osy. Volné osy tělesa se protínají v těžišti a jsou navzájem kolmé. Když se těleso otáčí kolek kterékoliv z nich , je výslednice setrvačných sil nulová a stejně je nulový i moment síly.





Prochází–li osa otáčení těžištěm tělesa a zároveň má směr některého z hlavních momentů setrvačnosti tělesa, otáčí se kolem ní těleso bez toho, aby na ložiska působilo nějakými dodatečnými silami (kromě tíhové síly). Těleso trvale rotuje kolem této osy, dokonce i když k ní není upevněno.

Pro těleso, otáčející se kolem volné osy, platí **zákon setrvačnosti**. Nepůsobí–li na těleso vnější síly, zachovává se úhlová rychlost a také směr osy otáčení vzhledem k inerciální vztažné soustavě.

Otáčení tělesa je stabilní kolem volných os s největším a nejmenším momentem setrvačnosti, nejstabilnější pak kolem osy, vzhledem ke které má těleso největší moment setrvačnosti. Poznatky o volných osách se využívají při konstrukci rotujících součástí strojů a zařízení – rotory, setrvačníky.

Vzájemně si odpovídající veličiny při přímočarém a rotačním pohybu

Všechny veličiny posuvného pohybu mají své protějšky pro rotační pohyb.

translační pohyb		rotační pohyb	
element dráhy	$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, $\mathrm{d}s$	element úhlové dráhy	$\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$
rychlost	$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$	úhlová rychlost	$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}$
zrychlení	$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$	úhlové zrychlení	$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$
hmotnost	m	moment setrvačnosti	J
síla	$\boldsymbol{F}$	moment síly	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
hybnost	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	moment hybnosti	$\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$
I. impulsová věta	$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$	II. impulsová věta	$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$
pohybová rovnice	$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$	pohybová rovnice	$J\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}$
element práce	$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$	element práce	$\mathrm{d}W = \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$
výkon	$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$	výkon	$P = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$
kinetická energie	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$	kinetická energie	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2$

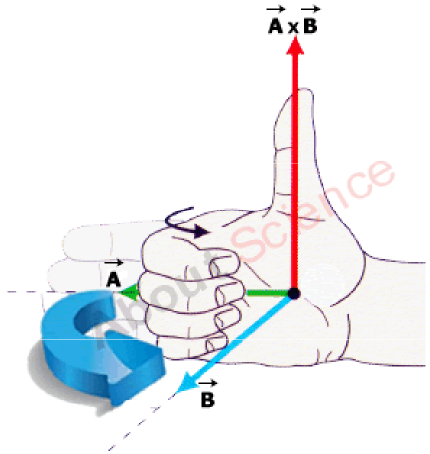
Přímočarý	**Rotační**
Souřadnice $\vec{x}$	**Úhel** $\vec{\alpha}$
Rychlost $\vec{v} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$	**Úhlová rychlost** $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt}$
Zrychlení $\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}$	**Úhlové zrychlení** $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{\alpha}(t)}{dt^2}$
Hybnost $\vec{p} = m\vec{v}$	**Moment hybnosti** $\vec{H} = \vec{r} \times \vec{p}$
Síla $\vec{F} = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = m\vec{a}$	**Moment síly** $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\varepsilon}$
Hmotnost M	**Moment setrvačnosti** J
Energie $E = \frac{mv^2}{2}$	**Energie** $E = \frac{J\omega^2}{2}$

Moment síly vzhledem k ose otáčení

Má-li se těleso uvést do otáčivého pohybu, musí se na něj působit silou. **Otáčivý účinek síly** závisí kromě velikosti a směru působící síly také na **poloze jejího působiště**. Je charakterizován vektorovou fyzikální veličinou nazvanou **moment síly vzhledem k ose otáčení** (**M**), jednotka N.m.

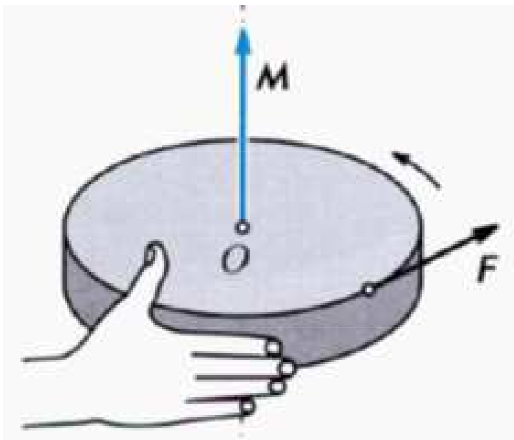
Moment síly *M* lze vyjádřit pomocí vektorového součinu:

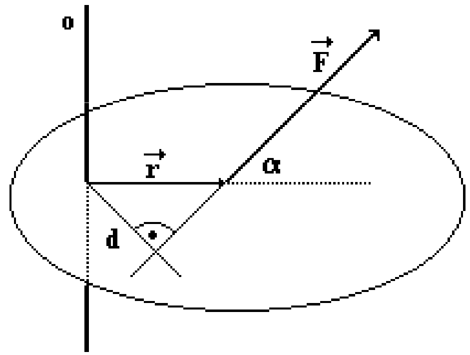
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$



kde ***r*** je polohový vektor působiště síly ***F*** vzhledem k ose otáčení jako počátku.

Směr momentu síly M je určen pravidlem pravé ruky

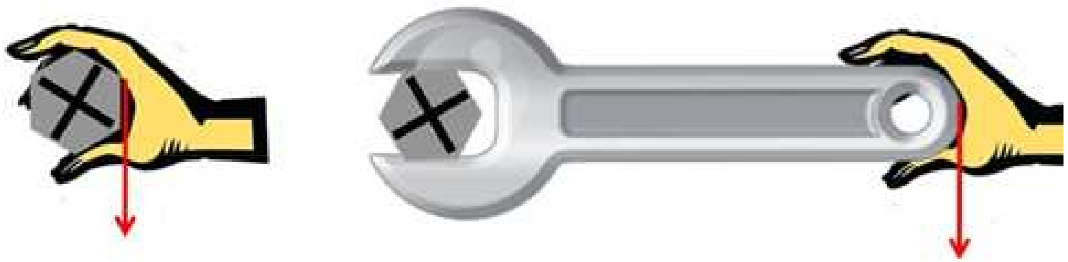


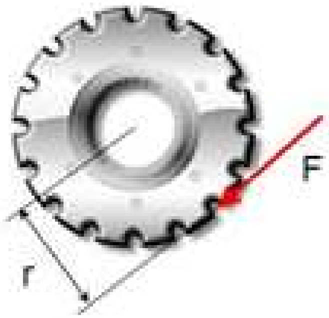


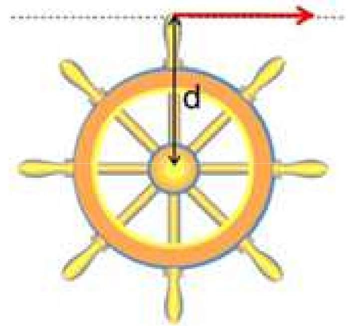
Působí-li síla otáčení tělesa *ve směru hodinových ručiček*, má příslušný moment síly znaménko <u>záporné</u>. Působí-li síla otáčení tělesa *proti směru hodinových ručiček*, moment síly má znaménko *kladné*.

Velikost momentu síly *M* je

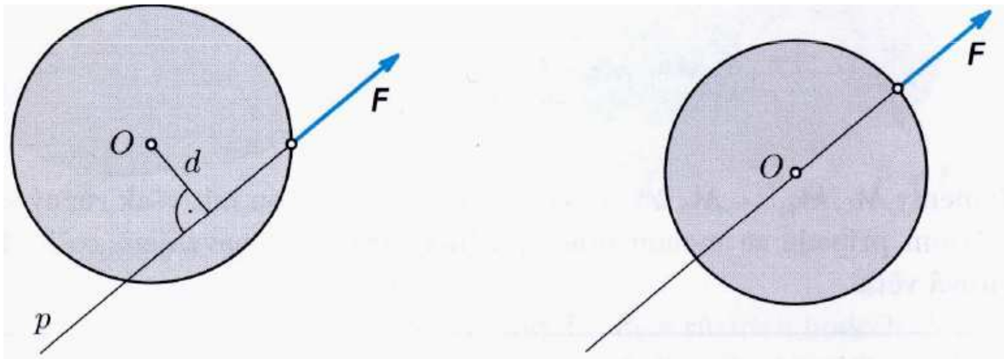
$$M = F \,.\, d = F \,.r \,.\sin\alpha$$







Při konstantní síle je velikost momentu **M** tím větší, čím větší je **rameno síly** *d*. <u>Prochází-li vektorová přímka osou otáčení</u>, je d = 0 a **M** = 0 a <u>síla</u> **F** <u>nemá na těleso otáčivý účinek</u>.



Momentová věta

V praxi na těleso působí často současně **více sil.** Potom je jejich celkový otáčivý účinek určen **výsledným momentem**

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots + \mathbf{M}_n$$

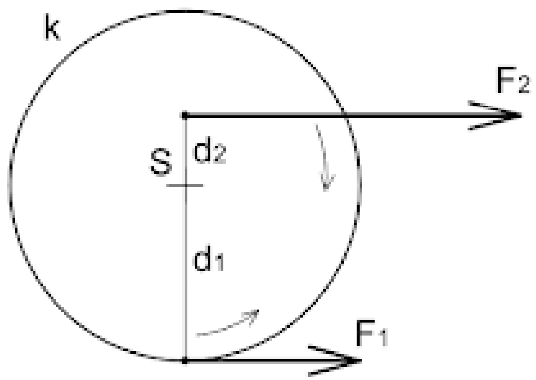
Momentová věta

Momentová věta vyjadřuje rovnováhu sil působících na těleso.

Otáčivý účinek sil působících na tuhé těleso otáčivé kolem nehybné osy se ruší, jestliže vektorový součet momentů všech sil vzhledem k ose otáčení je nulový vektor.

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots + \mathbf{M}_n = \mathbf{0}$$

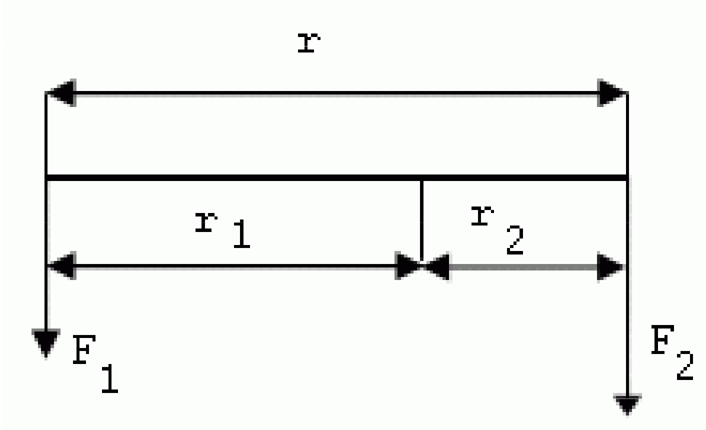
V tomto případě těleso zůstává v klidu nebo rovnoměrném otáčivém pohybu.



$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0$$
$$F_1 d_1 = -F_2 d_2$$

Příklad

Tyč má délku 1,2 m. Na její koncích jsou zavěšeny závaží s hmotnostmi 5 kg a 7 kg. Kde je třeba tyč podepřít, aby zůstala v rovnováze?



r = 1,2 m

m1 = 5 kg

m2 = 7 kg

F1= 50N

F2= 70N

$50.r_1 = 70.r_2$

$50.r_1 = 70.(1,2-r_1)$

$50.r_1 = 84-70.r_1$

$120.r_1 = 84$

$r_1+r_2=r$

$F_1.r_1 = F_2.r_2$

$r_1 + r_2 = 1,2 \Rightarrow r_2 = 1,2-r_1$

$r_1 = \underline{0,7m}$, $r_2 = \underline{0,5m}$

Příklad

Na uvolnění matice je potřebný moment síly 5 N.m. Jak velkou silou musíme působit, pokud máme klíč dlouhý 10 cm?

M = 5 N.m

R = 10 cm = 0,1m

F = ?

$M = F \bullet r$

$F = M/r = 5/0,1 = \underline{50\ N}$

Dvojice sil

Dvojici sil tvoří dvě stejně velké rovnoběžné síly navzájem opačného směru, které působí ve dvou různých bodech tělesa otáčivého kolem nehybné osy. Obě síly nelze nahradit silou jedinou, jejich výslednice je nulová.

Přesto má dvojice sil na těleso otáčivý účinek, který vyjadřuje fyzikální veličina **moment dvojice sil** (**D**), vektor ležící v ose otáčení.

Směr momentu dvojice sil

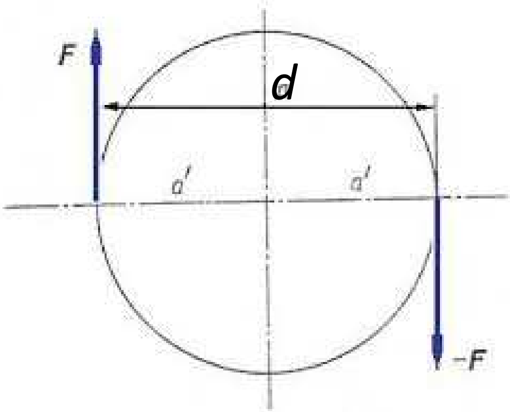
určuje se pravidlem pravé ruky.

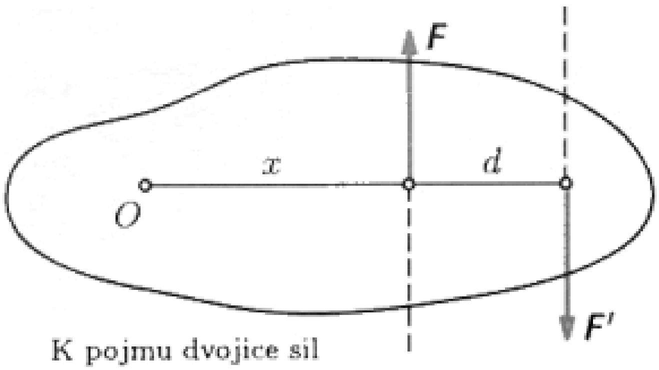
Velikost momentu dvojice sil

je rovna součinu velikosti jedné síly a kolmé vzdálenosti vektorových přímek obou sil (= **rameno dvojice sil**, *d*)

$$D = F \cdot d$$

Moment dvojice sil nezávisí na vzdálenosti sil od osy otáčení.





K pojmu dvojice sil

Osa otáčení leží mezi působišti obou sil

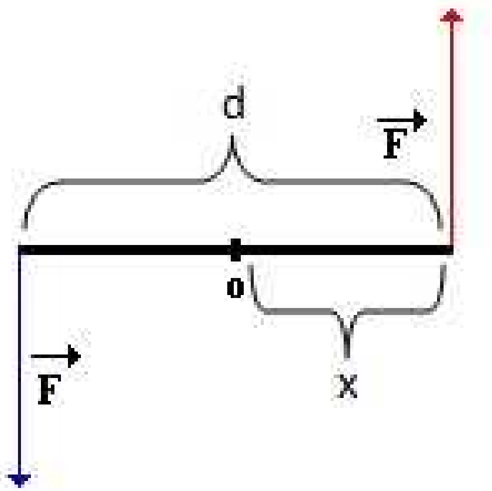
$M = M_1 + M_2$

$M = \mathbf{F} \cdot (d - x) + \mathbf{F} \cdot x$

$M = F.d - F.x + F.x$

$M = F.d$

$\mathbf{|M| = F \times d}$



Osa otáčení leží mimo působiště obou sil

$M = \mathbf{M_1} + \mathbf{M_2}$

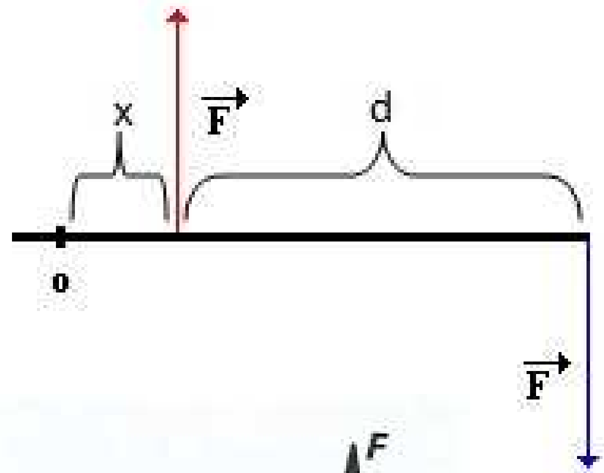
$M = - M_1 + M_2$

$M = - F \cdot (d+x) + F \cdot x$

$M = - F.d - F.x + F.x$

$M = - F.d$

$\mathbf{|M| = F \times d}$



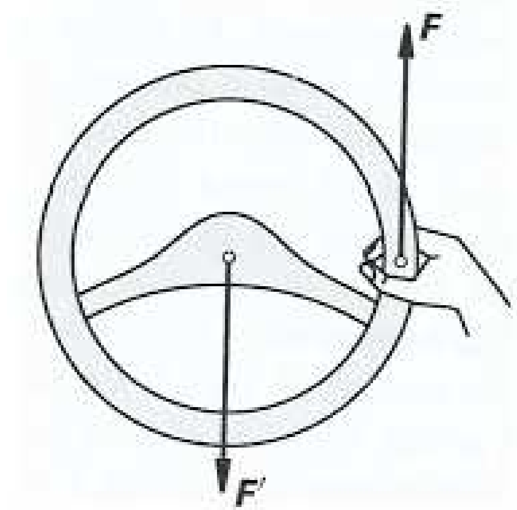
Osa otáčení leží v působišti jedné síly

$M = \mathbf{M_1} + \mathbf{M_2}$

$M = - F.d + F \cdot 0$

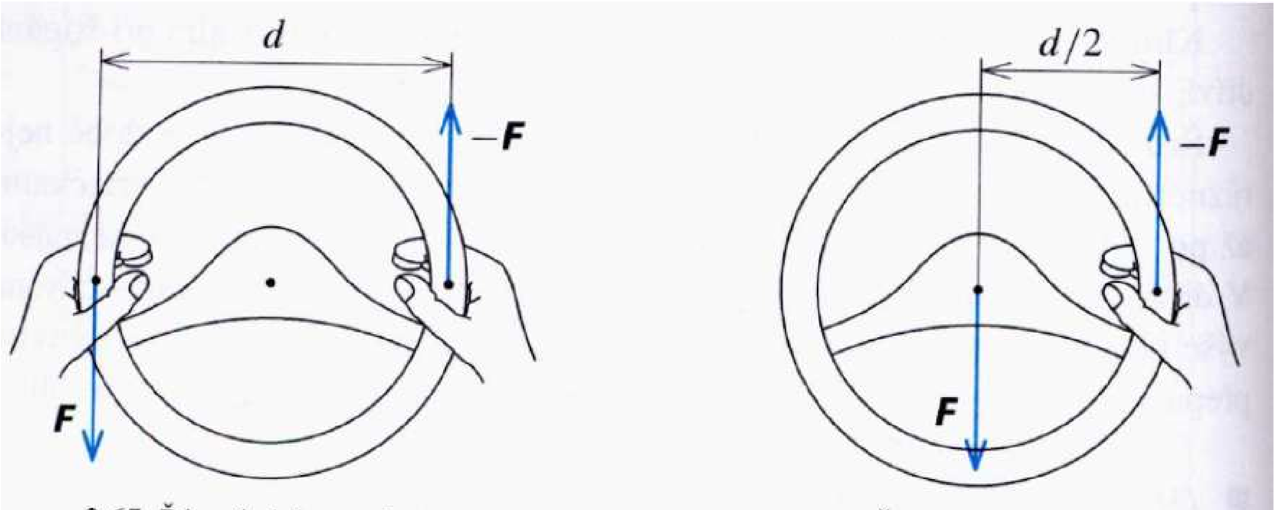
$M = - F.d$

$\mathbf{|M| = F \times d}$



Moment dvojice sil

při použití jedné síly je moment poloviční (jedna ruka na volantu)

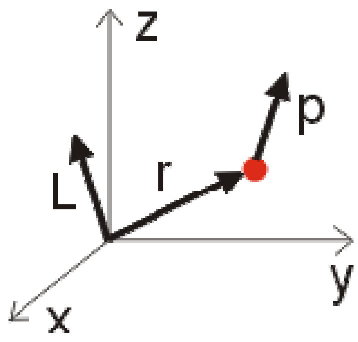


2.65 Řízení oběma rukama

2.66 Řízení jednou rukou

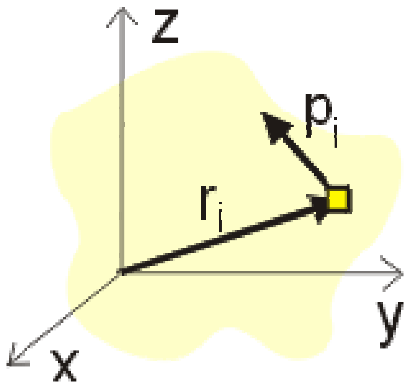
Moment hybnosti (impulsmoment, točivost)

Moment hybnosti L je vektorová fyzikální veličina, charakterizující schopnost tělesa udržovat otáčivý pohyb, určuje se vzhledem k bodu nebo ose.



Moment hybnosti hmotného bodu vzhledem k počátku soustavy souřadnic je vektor určený vektorovým součinem jeho průvodiče **r** a hybnosti **p**

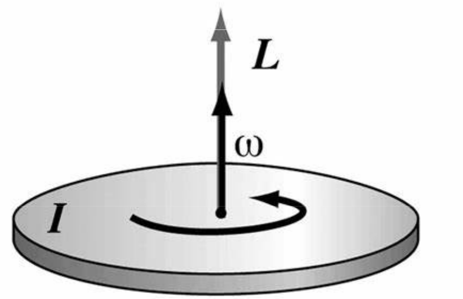
L = **r** x **p**



Moment hybnosti tělesa bychom mohli určit tak, že bychom těleso rozdělili na velké množství malých částí a sečetli jejich momenty hybnosti vzhledem k vybrané soustavě souřadnic.

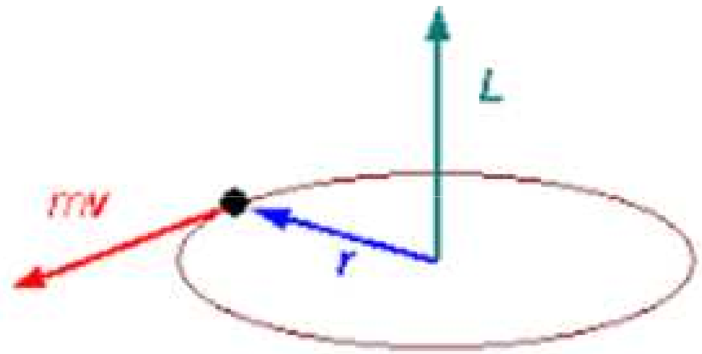
$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

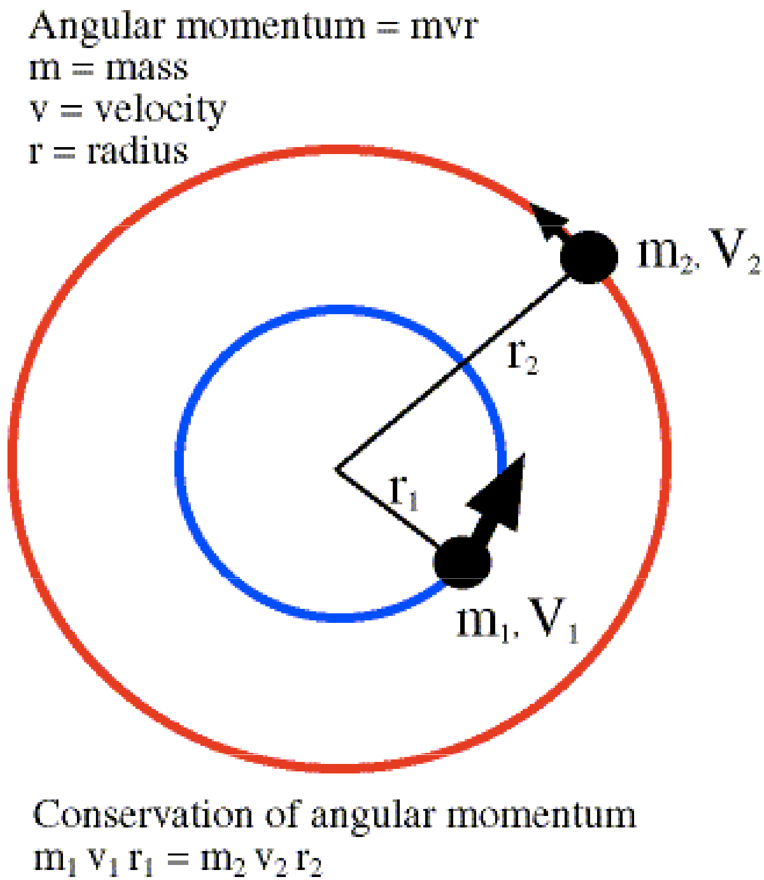
Moment hybnosti tělesa vzhledem k ose



$$L = I\omega = mr^2 \frac{v}{r} = p \cdot r$$

$$L = rp\sin\varphi = rp_t = r_\perp p$$





Druhá věta impulsová vyjadřuje skutečnost, že časová změna momentu hybnosti je rovna celkovému momentu síly působícímu na těleso.

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}_i = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d\left(rp\right)}{dt} = M = rF$$

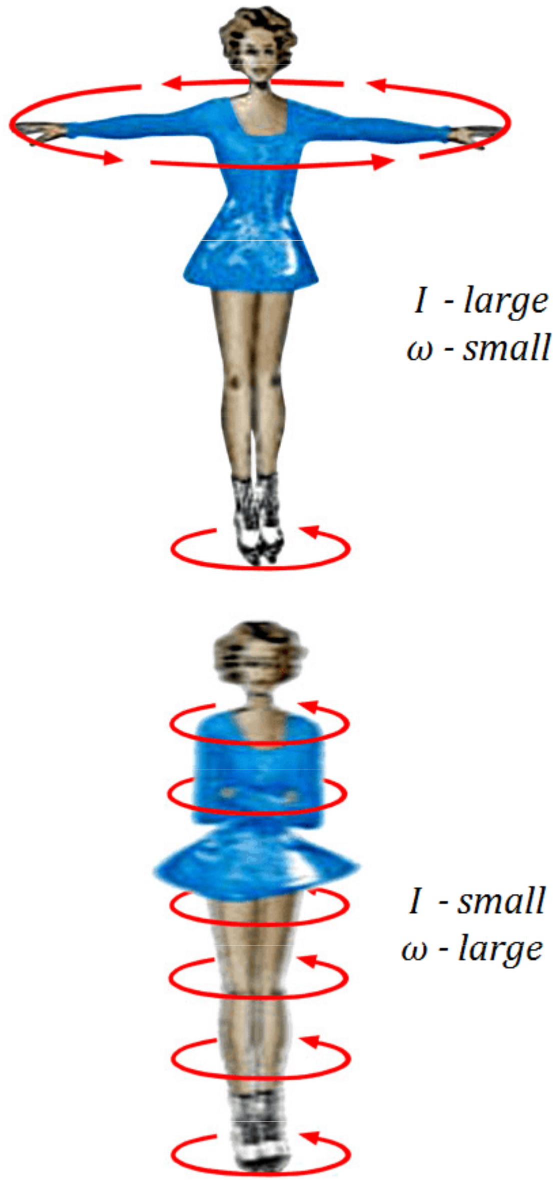
Důsledkem druhé impulsové věty je **zákon zachování momentu hybnosti** v izolované soustavě.

Zákon zachování momentu hybnosti

<u>Jestliže na tuhé těleso nepůsobí vnější síly nebo je-li výslednice otáčivých momentů vnějších sil rovna nule, pak moment hybnosti tuhého tělesa zůstává stejný tj. zachovává si velikost i směr.</u>.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \implies \mathbf{L} = \mathrm{konst.}$$

$$0 = J_1\,\omega_1 + J_2\,\omega_2$$



Pohyb krasobruslaře při piruetě. Při připažení se zmenší moment setrvačnosti, rychlost otáčení naroste tak, aby celkový moment hybnosti zůstal zachován. Upažením se naopak zvětší moment setrvačnosti a úhlová rychlost úměrně tomu poklesne.

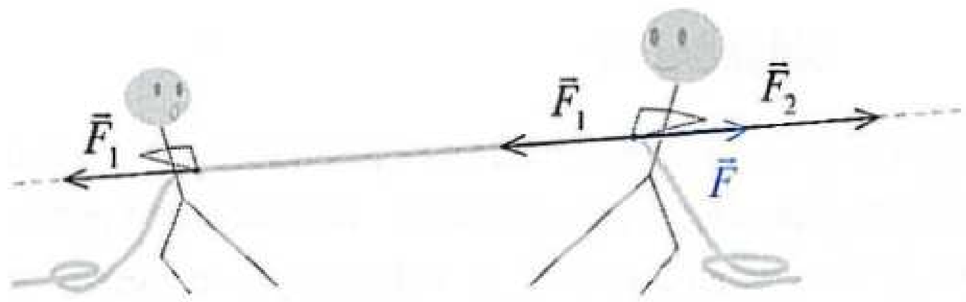
Také u **převodovky** platí, že čím vyšší rychlostní stupeň je zařazený, tím menší točivý moment se dostává na kola. Ale zase stoupají otáčky kola a tím roste i rychlost auta či motocyklu.

Angular Momentum = Moment of Inertia x Angular Velocity

L = I x ω

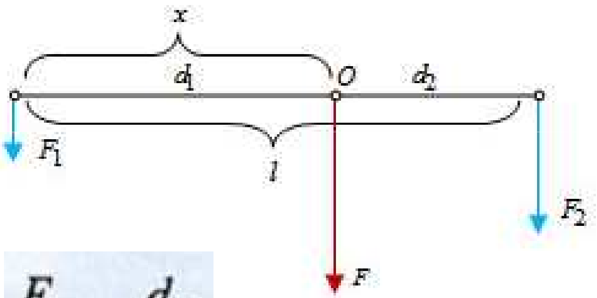
Skládání dvou rovnoběžných sil působících v různých bodech a ležících ve stejné přímce.

Mají-li dvě síly **F**1 a **F**2 různá působiště, ale obě leží v téže přímce, můžeme kteroukoliv z nich posunout do působiště druhé síly a najít výslednici podle vztahu **F** = **F**1 + **F**2. Výslednou sílu **F** můžeme také posunout do libovolného působiště, které leží na vektorové přímce, tj. přímce proložené vektorem **F**.

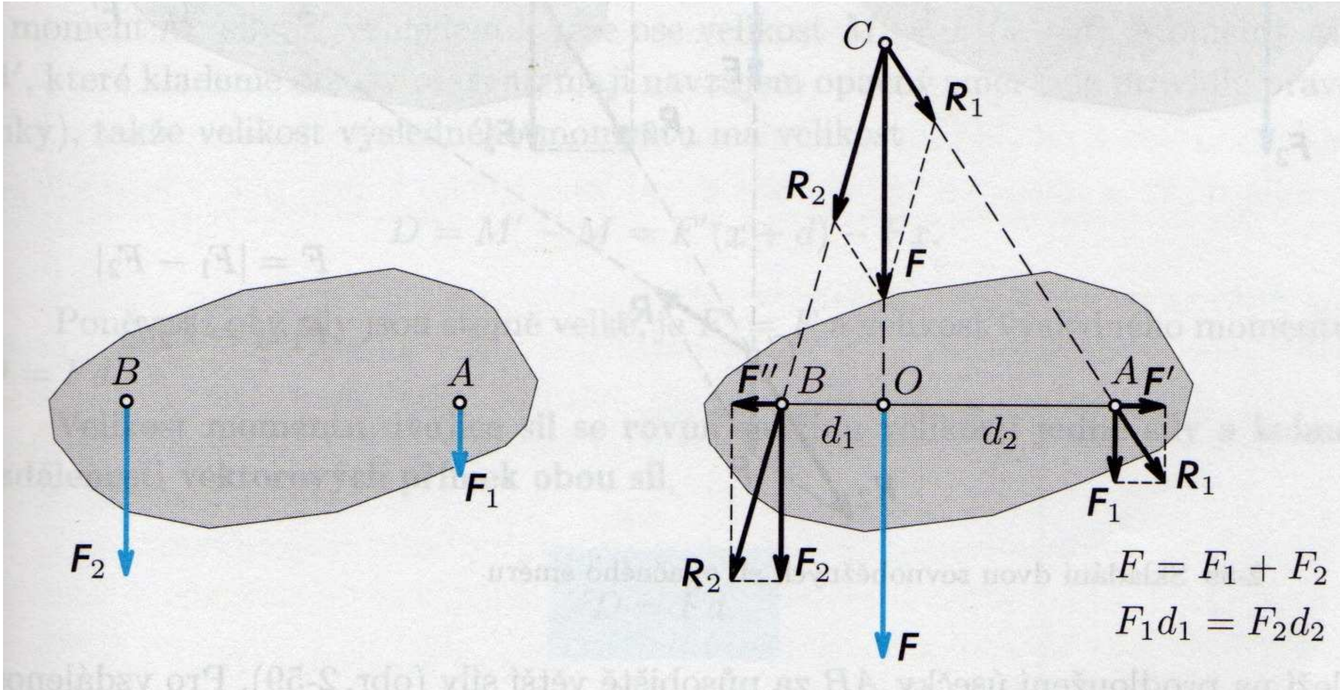


Skládání dvou rovnoběžných sil stejného směru působících v různých bodech

Obě síly nejdříve přeneseme do společného bodu, kterým je průsečík jejich vektorových přímek, pak síly složíme doplněním na vektorový rovnoběžník a výslednou sílu **F** můžeme umístit do libovolného bodu její vektorové přímky síly, např. do bodu O.

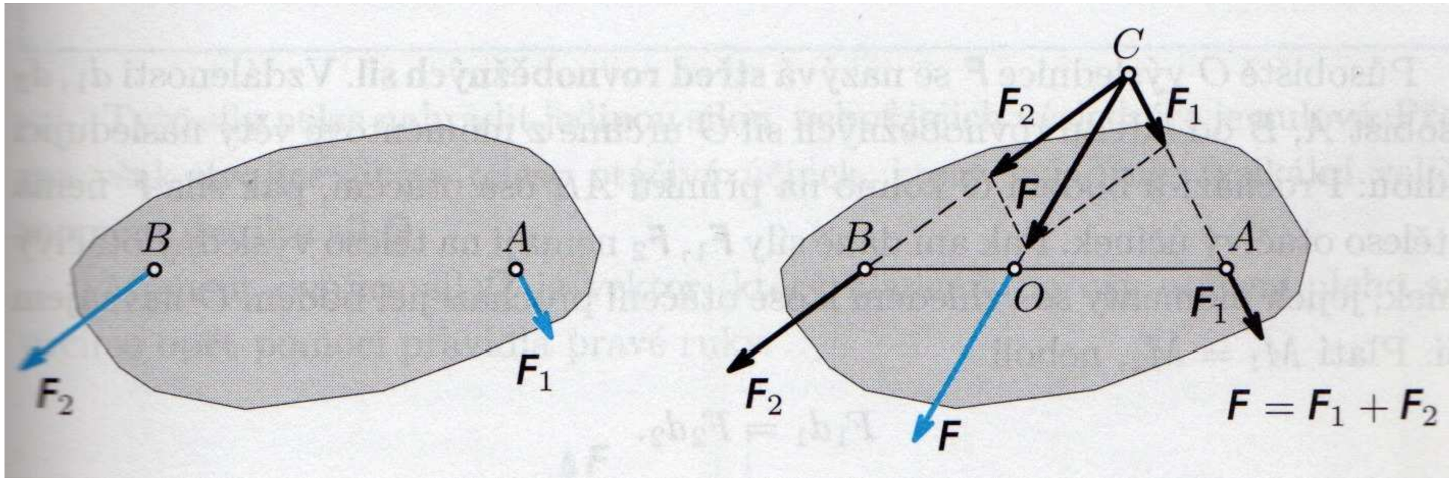


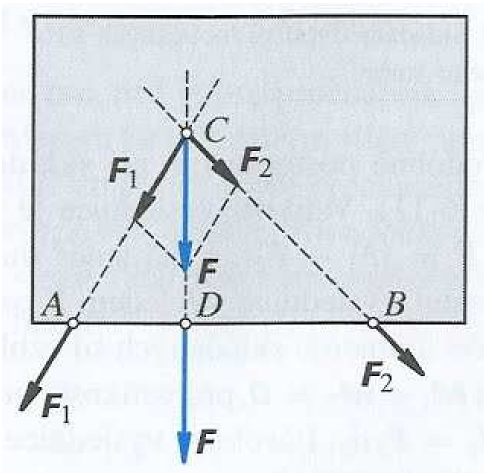
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

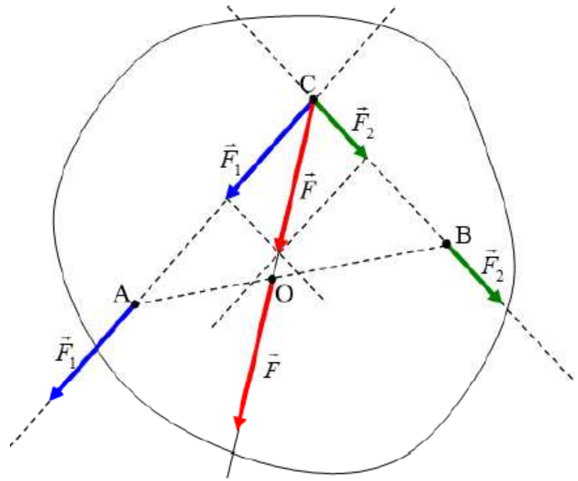


Skládání dvou různoběžných sil působících v různých bodech

Síly **F**1, **F**2 přeneseme po jejich vektorových přímkách do společného působiště, kde je složíme pomocí vektorového rovnoběžníku. Výslednou sílu pak přeneseme po vektorové přímce tak, aby měla působiště na spojnici působišť sil **F**1, **F**2. Působiště O výslednice **F** se jmenuje **střed sil**.



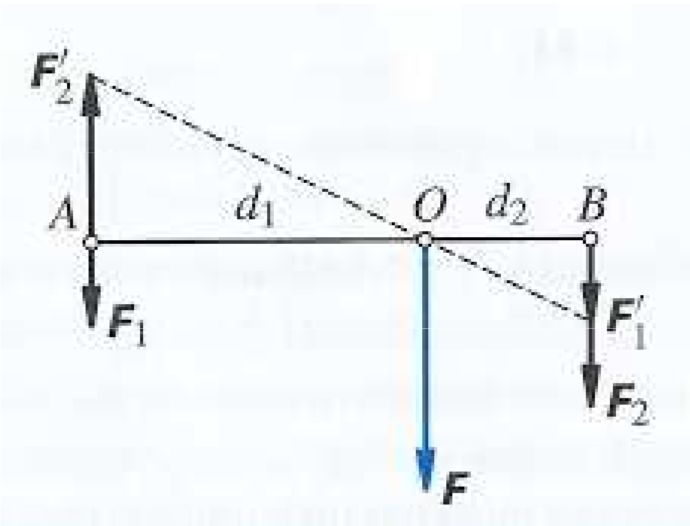


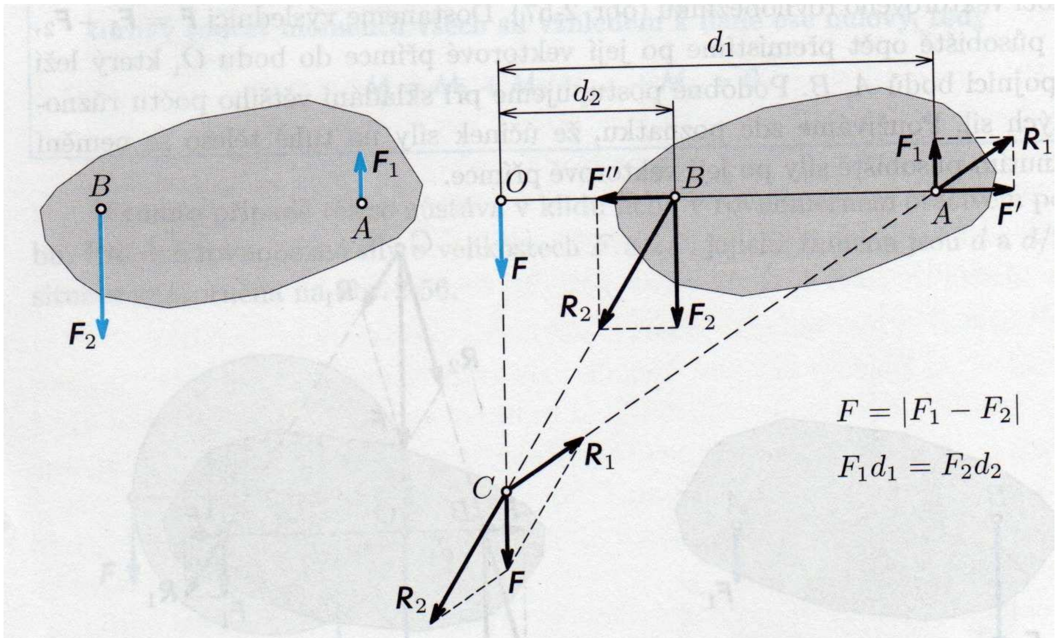


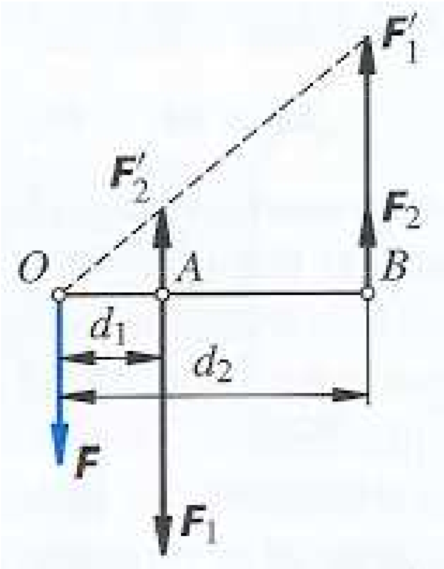
Skládání dvou rovnoběžných sil opačného směru působících v různých bodech

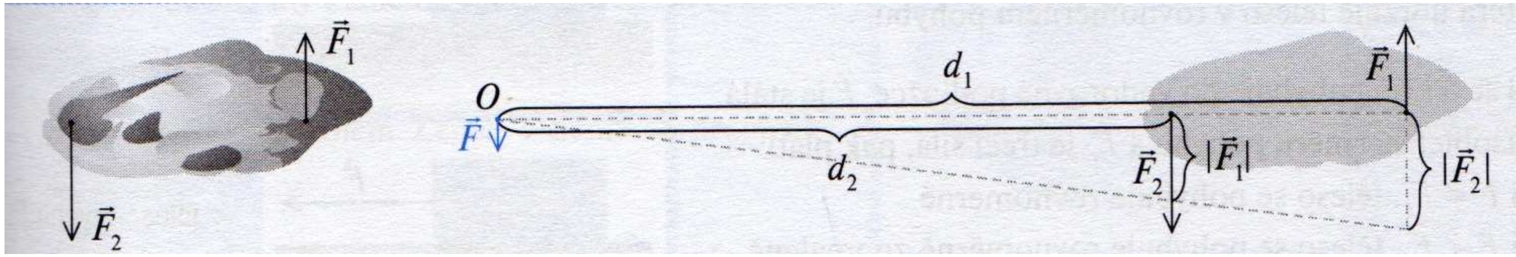
Skládání dvou rovnoběžných sil opačného směru působících v různých bodech na pevné těleso. Výslednice má velikost **F** = **F**2 - **F**1, leží vně obou sil na straně větší síly, s níž je souhlasně rovnoběžná. Vzdálenost působiště výslednice od působišť obou sil je v obraceném poměru sil:

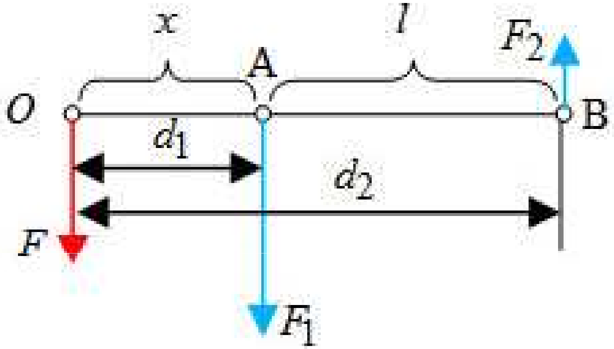
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$









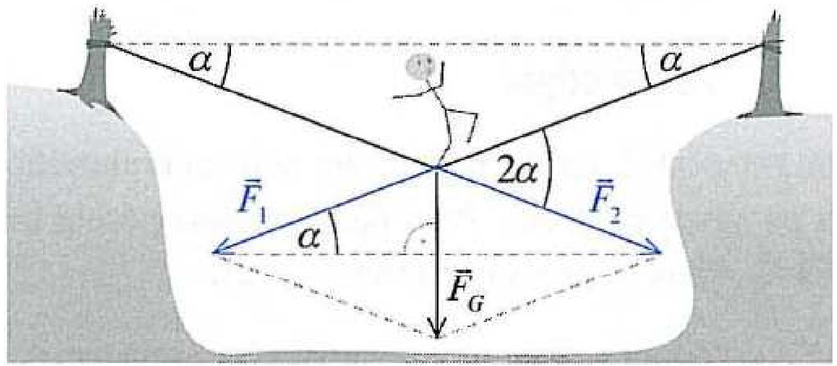


$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

$$x = \frac{F_2 \cdot l}{F_1 - F_2}$$

Rozklad síly do dvou různoběžných sil působících v různých bodech

Rozklad síly **F**g provedeme tak, že počátečním bodem vektoru **F**g vedeme přímky danými směry. Složky **F**1, **F**2 tvoří strany vektorového rovnoběžníku a vycházejí z působiště síly **F**g, která je úhlopříčkou rovnoběžníku.



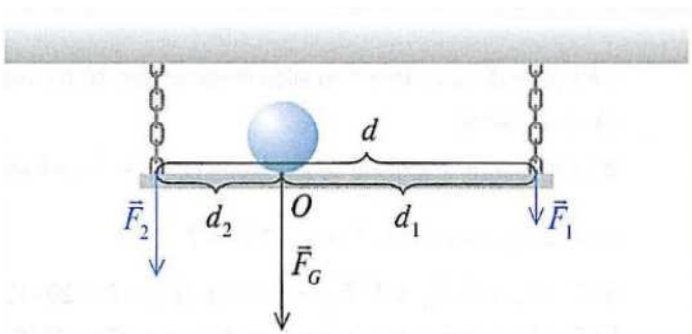
$\mathbf{F_G = F_1 + F_2}$

$\mathbf{F_G}$ / 2 = F_1.sinα

$\mathbf{F_1 = F_2}$

Rozklad síly do dvou rovnoběžných složek působících v různých bodech

Známe-li vzdálenosti působišť obou složek d_1, d_2 od síly **F**g, kterou rozkládáme, pak velikosti složek určíme z rovnic:



$$F_G = F_1 + F_2$$

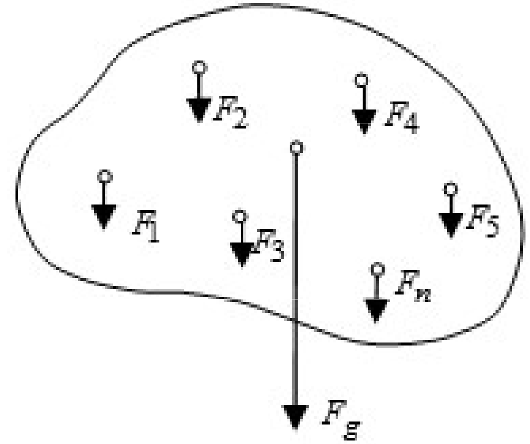
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

$F_1 = d_2/d \cdot F_G$

$F_2 = d_1/d \cdot F_G$

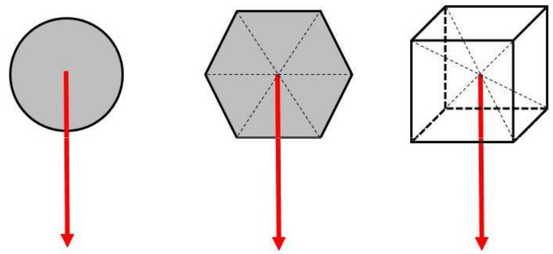
$F_1 d_1 = F_2 d_2$

Těžiště (hmotný střed) tuhého tělesa

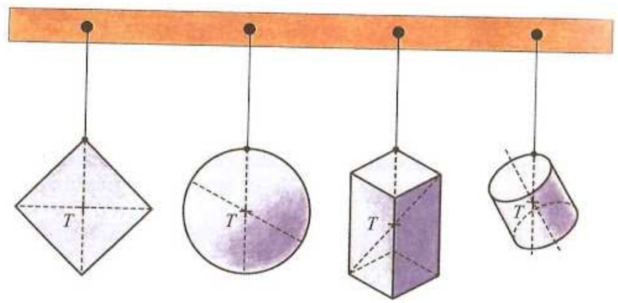


Těžiště tuhého tělesa je působiště tíhové síly působící na těleso v homogenním tíhovém poli.

Poloha těžiště závisí na rozložení hmoty v tělese. Pravidelná stejnorodá tělesa (krychle, koule, apod.) mají těžiště ve **středu souměrnosti**.

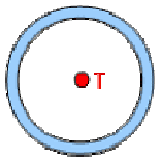


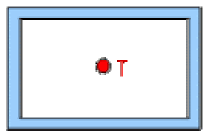
Osově souměrná stejnorodá tělesa (válec, kužel) mají těžiště na **ose souměrnosti**.

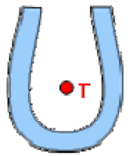


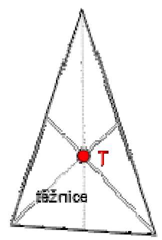
U dutých těles, prstenců, obručí a prázdných nádob může těžiště ležet mimo hmotu tělesa.

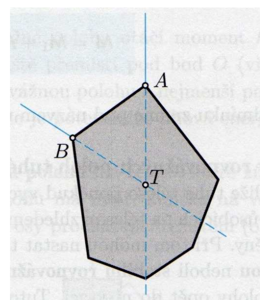
Jestliže spojíme dvě tělesa v jedno těleso, bude těžiště ležet vždy na úsečce spojující těžiště obou dílčích částí.

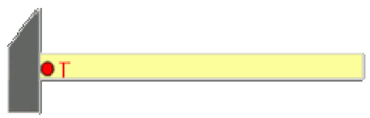












Určení polohy těžiště

1. *odhadem*: u stejnorodého geometrického pravidelného tělesa leží těžiště v jeho geometrickém středu (geometrickém těžišti)

2. *experimentálně*: u stejnorodého geometricky nepravidelného tělesa leží těžiště v průsečíku těžnic při postupném zavěšení tělesa v nejméně dvou různých bodech

3. *výpočtem* (jednotlivé souřadnice x_T, y_T, z_T těžiště T se počítají nezávisle na sobě):

$$x_T = \frac{\int x \cdot dm}{m}$$

a to jako podíl integrace *x*-ové souřadnice bodu tělesa podle hmotnosti pro celou hmotnost tělesa *m* (statický moment) a hmotnosti tělesa.

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

Analogické vztahy platí i pro osu y (svislý směr).

Příklad

Určete souřadnice těžiště tří hmotných bodů:

$$x_T(m_1 + m_2) = x_1 m_1 + x_2 m_2$$

$M_1[1, 4]$ $m_1 = 6$ kg

$M_2[13, 1]$ $m_2 = 4$ kg

$M_3[10, 19]$ $m_3 = 5$ kg

$x_T = (6.1 + 4.13 + 5.10)/(6 + 4 + 5) = 36/5 = 7{,}2$

$y_T = (6.4 + 4.1 + 5.19)/(6 + 4 + 5) = 41/5 = 8{,}2$

$\underline{T[7{,}2; 8{,}2]}$

U některých strojů je velmi důležité, aby jeho **strojní součásti byly zavěšeny nebo upevněny v těžišti**. Tak např. řemenice, ozubená kola, oběžná kola turbín, odstředivá čerpadla apod. musí být upevněna v ose otáčení, jinak vznikají nevyvážené odstředivé síly, které součástky rychle opotřebovávají.

Rovnováha tuhého tělesa

Tuhé těleso je v rovnovážné poloze, jestliže se pohybový účinek všech sil působících na těleso navzájem ruší a těleso je v klidu. Např.
Těleso zavěšené nad těžištěm tak, že těžnice prochází bodem závěsu, tíhová síla působící na těleso se ruší pevností závěsu.
U tělesa podepřeného pod těžištěm, tíhová síla se ruší pevností opory.

Podmínky rovnováhy tuhého tělesa
Aby bylo těleso v rovnovážné poloze musí být splněny 2 základní podmínky:

Podmínka rovnováhy sil: Těleso je v rovnovážné poloze, je-li výslednice sil působících na těleso nulová.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = 0$$

Podmínka rovnováhy momentů sil: Těleso otáčivé kolem nehybné osy je v rovnovážné poloze, je-li výsledný moment všech sil působících na těleso nulový (momentová věta).

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots + \mathbf{M}_n = 0$$

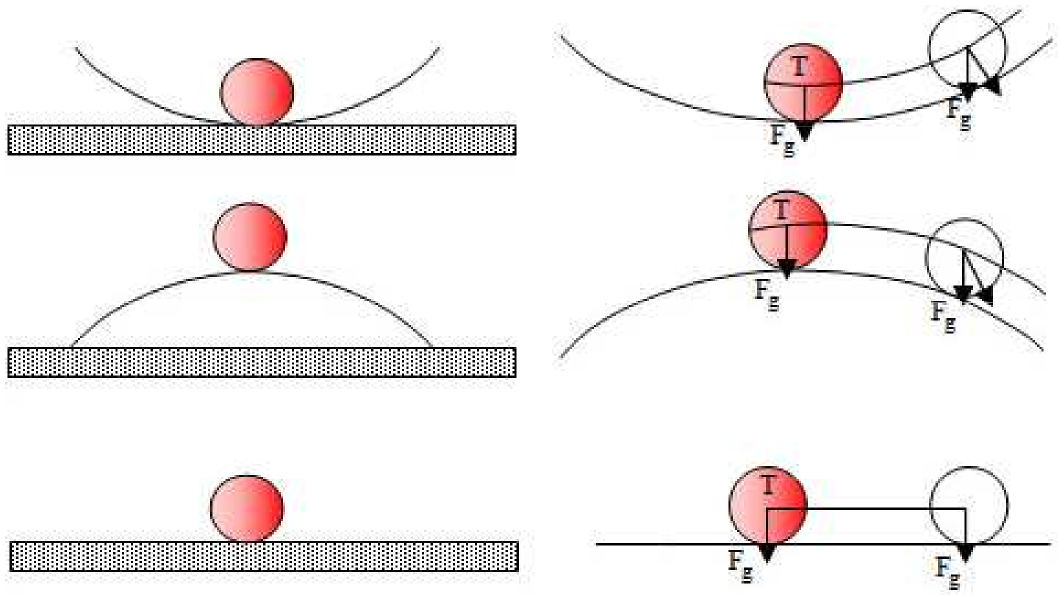
Rovnovážné polohy tuhého tělesa

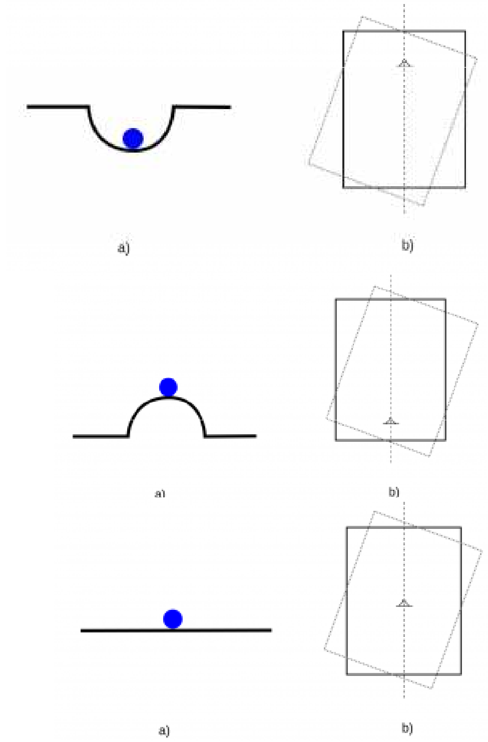
Tuhé těleso je v **rovnovážné poloze**, jestliže Tělesa upevněná v těžišti nekonají ani posuvný, ani otáčivý pohyb, jsou v rovnováze.

1. **Stabilní (stálá)**: těleso se po vychýlení vrací zpět do rovnovážné polohy.

2. **Labilní (vratká)**: u tělesa se po vychýlení zvětšuje výchylka, těleso se samo do rovnovážné polohy nevrátí, tíhová síla působí na zvětšování výchylky.

3. **Indiferentní (volná)**: těleso po vychýlení zůstává v nové poloze, výška těžiště nad zemským povrchem se nemění.



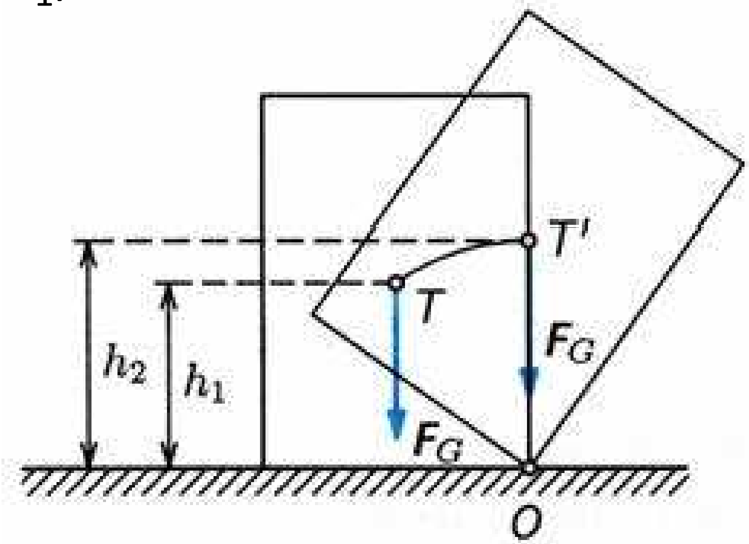


Stabilita mechanické soustavy

Stabilita je schopnost tělesa odolávat převrácení. **Těleso podepřené na ploše** je ve stálé rovnovážné poloze, jestliže svislá těžnice prochází podstavou tělesa. Stabilita je tím větší, čím se těžiště nachází níže. Veličinou udávající míru stability (stálosti rovnovážné polohy) mechanické soustavy (někdy zkráceně nazývanou stabilita) je rozdíl potenciální energie tělesa mezi vratkou a stálou rovnovážnou polohou, neboli minimální množství práce, které je třeba vykonat, aby se soustava ze stálé rovnovážné polohy dostala do vratké rovnovážné polohy. V tomto smyslu např. stabilita tuhého tělesa v tíhovém poli závisí přímo úměrně na hmotnosti tělesa, nepřímo úměrně na výšce těžiště ve stálé poloze a přímo úměrně na výšce těžiště ve vratké poloze.

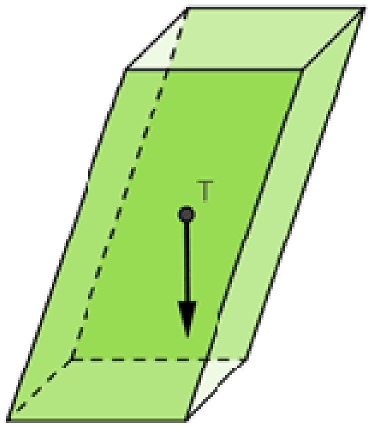
$$W = F_g.(h_2 - h_1) = m.g.(h_2 - h_1)$$

Stabilita podepřeného tělesa je tím větší, čím větší je hmotnost tělesa, čím níže je jeho těžiště a čím větší vzdálenost svislé těžnice od překlápěcí hrany. Proto mají velkou stabilitu zejména těžká tělesa s nízko položeným těžištěm a s velkou plochou podstavy.

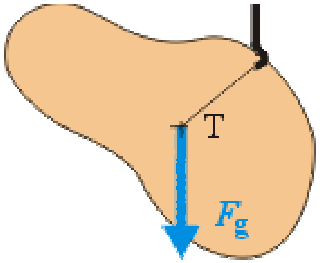


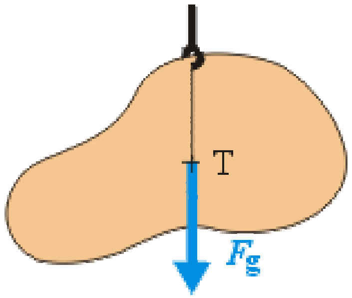
Z tohoto důvodu se např. ke strojům zhotovují litinové podstavce se základnou o velkém plošném obsahu. Stavby mívají betonové základy zapuštěné do země.

Stojící těleso je ve stabilní poloze jen tehdy, probíhá–li svislá přímka spuštěná z těžiště základnou tělesa. Jestliže by svislá přímka jdoucí těžištěm nesměřovala nad základnu, těleso by se převrhlo. Stejným způsobem můžeme vysvětlit stabilitu šikmé věže v Pise nebo v Bologni.



Jako míra stability jednoho tělesa <u>se v některých případech namísto potenciální energie používá minimální moment síly, který je potřeba k tomu, aby těleso překlopil do polohy, ze které se již nevrátí do polohy původní</u>. U **těles zavěšených** v libovolném bodě dokud není těžiště kolmo pod bodem zavěšení (osou otáčení), působí na těleso moment tíhové síly (ta má působiště v těžišti), který těleso stáčí dolů. Jakmile <u>je těžiště kolmo pod bodem zavěšení je moment tíhové síly nulový a těleso se již neotáčí</u>.





Příklad

Žulový čtyřboký pravidelný hranol (ρ = 2500 kg.m^{-3}) má podstavovou hranu 60 cm a výšku 80 cm. Jakou práci musíme vykonat, abychom hranol překlopili z rovnovážné stabilní polohy do vratké polohy. Hranol je postaven na čtvercové podstavě.

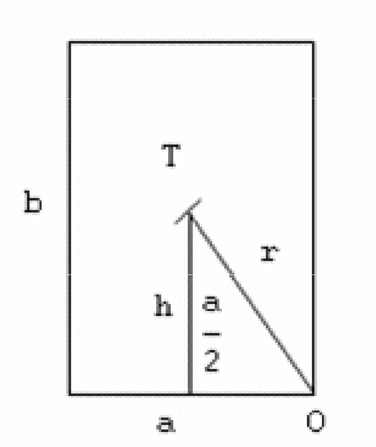
$$h = \frac{b}{2} = \frac{0{,}8m}{2} = 0{,}4m, \quad r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{(0{,}3m)^2 + (0{,}4m)^2} = 0{,}5m$$

ρ = 2500 kg.m^{-3}

a = 60 cm = 0,6 m

b = 80 cm = 0,8 m

W = ?



$$W = m.g.(r-h)$$
$$W = V.\rho.g.(r-h)$$
$$W = a^2.b.\rho.g.(r-h)$$
$$W = (0{,}6m)^2.0{,}8m.2500kg.m^{-3}10m.s^{-2}(0{,}5m-0{,}4m) = 720\,J$$
$$W = \underline{720\,J}$$

Kinetická energie tuhého tělesa

Celkovou kinetickou energii určíme jako součet kinetických energií všech *n* hmotných bodů soustavy.

$$E_K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_n v_n^2$$

$$E_K = \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_n v^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)v^2$$

Při **otáčivém pohybu** soustavy hmotných bodů kolem nehybné osy opisují jednotlivé hmotné body kružnice, jejichž středy leží na ose otáčení. Celkovou kinetickou energii opět určíme jako součet kinetických energií všech *n* hmotných bodů soustavy.

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \qquad E_k = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J\omega^2$$

Kombinace pohybů **posuvného** a **otáčivého**

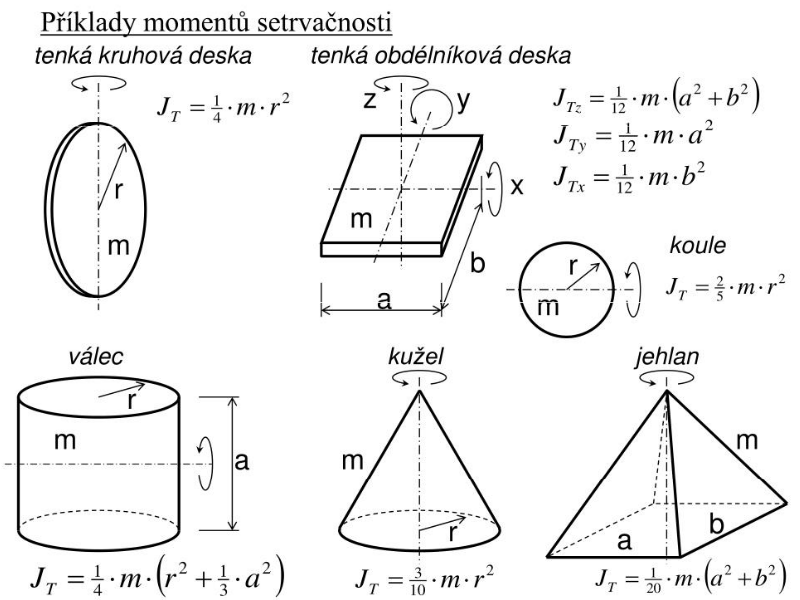
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

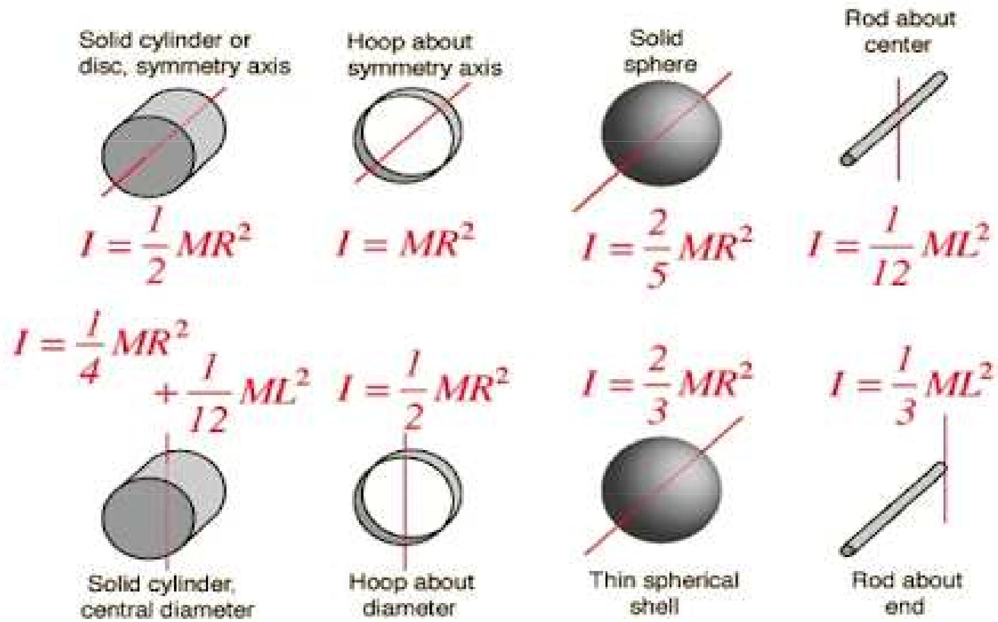
Moment setrvačnosti

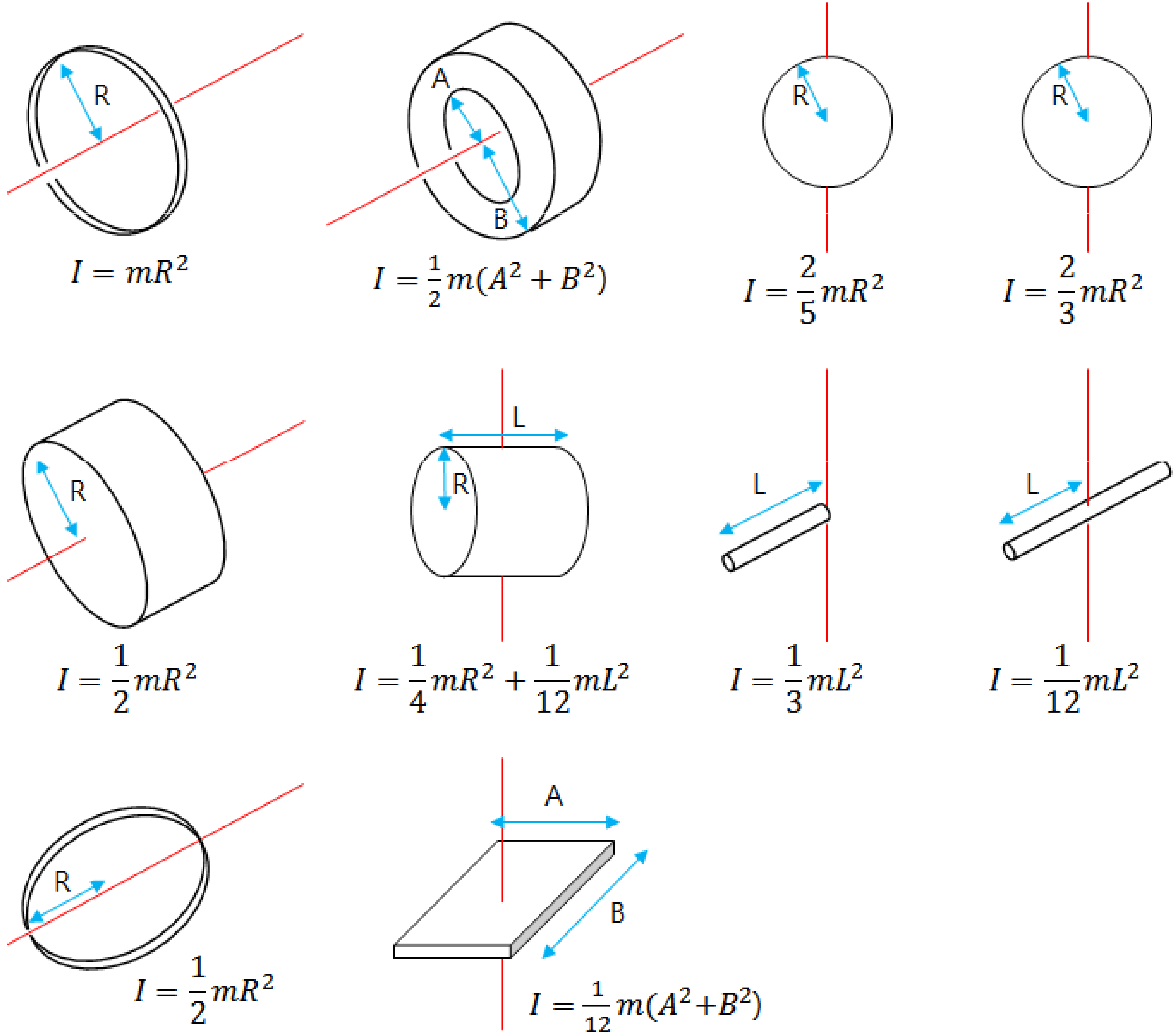
Moment setrvačnosti (J, kg.m^2) je fyzikální veličina, která vyjadřuje míru setrvačnosti tělesa při otáčivém pohybu. Její velikost závisí na rozložení hmoty v tělese vzhledem k ose otáčení. Body (části) tělesa s větší hmotností a umístěné dál od osy mají větší moment setrvačnosti.

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$I = \int_M r^2 \mathrm{d}m$$ (integrace se provádí přes celé těleso o celkové hmotnosti M).



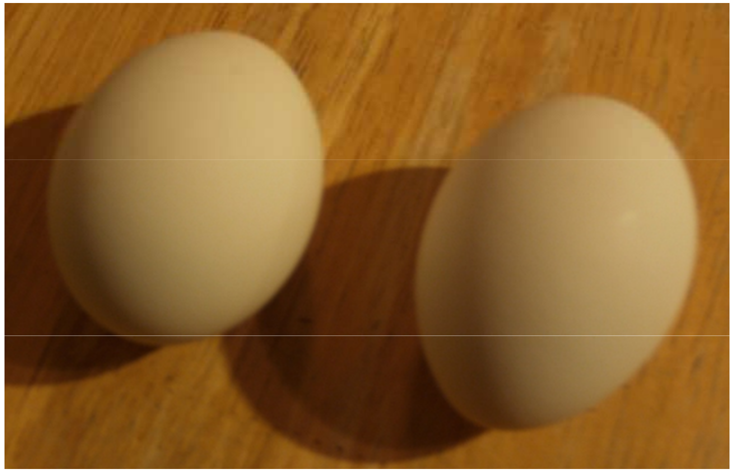


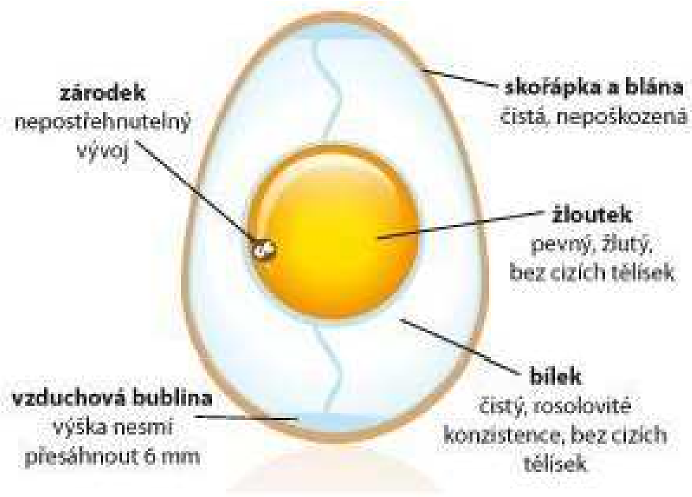


R
$I = mR^2$
A
B
$I = \frac{1}{2}m(A^2 + B^2)$
R
$I = \frac{2}{5}mR^2$
R
$I = \frac{2}{3}mR^2$
R
$I = \frac{1}{2}mR^2$
L
R
$I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$
L
$I = \frac{1}{3}mL^2$
L
$I = \frac{1}{12}mL^2$
R
$I = \frac{1}{2}mR^2$
A
B
$I = \frac{1}{12}m(A^2+B^2)$

Příklad

Máme syrové a uvařené vajíčko. Lze je navzájem odlišit, aniž bychom některé z nich museli rozbít ?





Obě vajíčka roztočíme. Vlivem setrvačnosti (odstředívé síly) bude mít kapalný obsah syrového vajíčka tendenci být co nejdále od osy rotace (žloutek se pohybuje pomaleji), což zvýší velikost **momentu setrvačnosti**. Aby se zachoval moment hybnosti při absenci vnějšího točivého momentu, bude mít syrové vajíčko menší úhlovou rychlost.

Setrvačník, gyroskopický jev

Gyroskop (**setrvačník**) je těžké kolo otáčející se v ložiscích s nepatrným třením. Otáčející se setrvačník má moment hybnosti, takže jeho osa bez působení vnějších sil udržuje stále stejný směr (klade odpor na změnu osy jeho rotace vlivem momentu setrvačnosti) v inerciálním prostoru. Přesnost gyroskopu závisí na stabilitě udržení jeho otáček. Tomuto jevu se říká **gyroskopický efekt** a dochází k němu hlavně v případech, kdy je hmotnost setrvačníku soustředěná po obvodu. Čím větší průměr rotoru, tím je gyroskopický efekt větší. Gyroskopický efekt se také zvyšuje s otáčkami rotoru - tedy čím větší rychlost, tím je gyroskopický efekt silnější.

Kinetická energie E_k vázaná v rotujícím setrvačníku se vypočte:

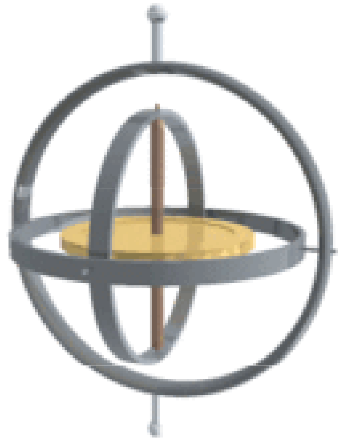
$$E_k = \frac{1}{2} J\omega^2$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení, ω je úhlová rychlost, s kterou se těleso otáčí. Protože je úhlová rychlost přímo úměrná frekvenci ($\omega = 2.\pi.f$):

$$E_k = 2\pi^2 J f^2$$

Jedno z nejstarších využití setrvačníku byl hrnčířský kruh. Známé je využití v dětských hračkách (setrvačníková autíčka, na principu setrvačníku pracuje i káča a jojo).

Používá se často pro **stabilizaci otáček strojů s nepravidelným chodem**, jako jsou parní stroje nebo spalovací motory. Stabilizaci otáček u převážné většiny současných strojních zařízení poháněných (velmi často asynchronními) elektromotory do jisté míry zajišťují tyto motory samotné, coby setrvačník zde působí zejména rotor elektromotoru.



Ke **stabilizaci směru a polohy** je hojně využíván např. v letectví (tzv. umělý horizont), jako gyrokompas v navigaci lodí, v navigaci torpéd, balistických raket, vesmírných stanic, satelitů atd.

Setrvačníky se ve světě používají pro průmyslovou **akumulaci** elektrické **energie**. Principu akumulace energie v setrvačníku využívají v průmyslu i některé velké kovoobráběcí a tvářecí stroje určené pro obrábění a tváření kovů za tepla i za studena.

Steinerova věta

Steinerova věta umožňuje vypočítat moment setrvačnosti tělesa rotujícího kolem osy, která neprochází jeho těžištěm.

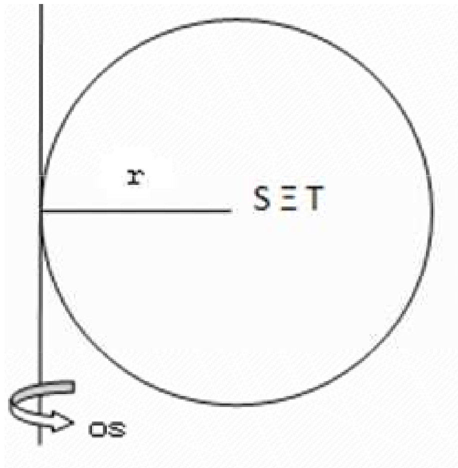
$$J = J_T + m r_T^2$$

Lze tak například vypočítat moment setrvačnosti tělesa složeného z několika základních těles se známými momenty setrvačnosti a vzdálenost jejich těžišť od těžiště složeného tělesa.

Příklad

Vypočtěte moment setrvačnosti plné homogenní koule o poloměru r = 10 cm, hmotnosti 25 kg vzhledem k ose, která se dotýká povrchu koule.

r = 10 cm = 0,1m
m = 25kg
d = r = 0,1m



$$I = I_0 + m.d^2$$

$$I = \frac{2}{5} m.r^2 + m.d^2$$

$$I = \frac{7}{5} m.r^2$$

$$I = \frac{7}{5} 25kg.(0,1m)^2 = 0,35kg.m^2$$

$$I = 0,35kg.m^2$$