Číselné soustavy

převody mezi zápisy čísel v různých pozičních soustavách (zejména ze soustavy poziční desítkové do poziční nedesítkové a naopak), operace v pozičních soustavách s nedesítkovým základem (zejména se základy 2 až 8, 12 a 16), slovní úlohy a algebrogramy.

Petra Bušková
Helena Durnová
Brno 2020

Jednoznačnost vyjádření čísla v číselné soustavě

- budeme pracovat s číselnými soustavami, ve kterých jsou využívány číslice 0, 1, 2, … 9,
- v případně potřeby více symbolů využijeme písmena v abecedním pořádku
- následující věta říká, že v každé z těchto číselných soustav lze jakékoli přirozené číslo vyjádřit jednoznačně (to mj. znamená, že příklady řešené zde i v písemkách mají jediný správný výsledek).

Věta 1: Každé přirozené číslo a lze vyjádřit právě jedním zápisem ve tvaru

$$a = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_{n-2} \cdot z^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z^1 + a_0 \cdot z^0, \qquad \textbf{(1)}$$

kde $a_0, a_1, \dots a_{n-1}, a_n \in \boldsymbol{N}, 0 \leq a_i < z$ pro $i = 0, 1, \dots n-1$; $a_n \neq 0, a_n < z$; $z > 1, z \in \boldsymbol{N}$.

z - základ číselné soustavy

a_i - číslice i-tého řádu

z^i - jednotka i-tého řádu

Zápis **(1)** se nazývá **rozvinutý zápis čísla a v číselné soustavě o základu z.**

Zkráceně zapisujeme $a = (a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_z$.

<u>V příkladech budeme využívat zkráceného zápisu bez závorek.</u>

Příklad 1

Zapište čísla rozvinutým zápisem v dané soustavě.

a) $a = 3765_{10}$

b) $b = 201_6$

Řešení:

a) $a = 3765_{10} = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

b) $b = 201_6 = 2 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0$

Jednoznačnost zápisu čísla

- Jedním z důsledků věty 1 je ten, že pro zapsání jakéhokoli přirozeného čísla v číselné soustavě o základu z potřebujeme právě z symbolů. Těmito symboly jsou pro $z \leq 10$ jednotlivé číslice, například pro $z = 3$ využíváme číslice $0, 1, 2$.

Problém nastává pro soustavy o základu vyšším než 10. Pak volíme za další symboly postupně písmena A, B, C, D, E, F, případně i další. Tedy pro $z = 16$ využíváme k zapsání čísla symboly $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$, kde například $C = 12$.

Stojí za povšimnutí, v číselné soustavě o základu z má nejvyšší použitelná číslice (symbol) hodnotu $z - 1$, například v čísle vyjádřeném v číselné soustavě o základu $z = 8$ se nikdy neobjeví číslice 8.

Příklad 2

Zapište čísla rozvinutým zápisem v dané soustavě.

a) $a = 5D7_{16}$

b) $b = BA5_{12}$

Řešení:

a) $a = 5D7_{16} = 5 \cdot 16^2 + D \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0$

b) $b = BA5_{12} = B \cdot 12^2 + A \cdot 12^1 + 5 \cdot 12^0$

Příklad 3

Trojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě je zakončeno číslicí 4. Přesuneme-li ji na první místo a ostatní dvě číslice ponecháme beze změny, dostaneme číslo, které je o 81 menší než původní číslo. Určete původní číslo.

Řešení:

Původní číslo: $xy4 = x \cdot 10^2 + y \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$
Nové číslo: $4xy = 4 \cdot 10^2 + x \cdot 10^1 + y \cdot 10^0$

Platí: $xy4 - 81 = 4xy$

$$x \cdot 10^2 + y \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 - 81 = 4 \cdot 10^2 + x \cdot 10^1 + y \cdot 10^0$$
$$100x + 10y - 77 = 400 + 10x + y$$
$$10x + y = 53$$

Víme, že x, y jsou jednociferná přirozená čísla, zkoušíme tedy možnosti:
je-li $x = 1 \rightarrow y = 43$, $x = 2 \rightarrow y = 33$, $x = 3 \rightarrow y = 23$, $x = 4 \rightarrow y = 13$, $x = 5 \rightarrow y = 3$.

Vyšší hodnoty x nepřicházejí v úvahu, pak by muselo být y záporné. Hledané číslo je tedy 534.

Příklad 4 (k samostatnému řešení)

Které dvojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě se po vzájemné záměně cifer zmenší o 36?

Jiný způsob: zápis zadání pomocí algebrogramu a řešení úvahou:

$$\begin{array}{r} AB \\ \underline{-\ BA} \\ 36 \end{array}$$

Výsledek: Takových čísel existuje více, jsou to čísla 40, 51, 62, 73, 84 a 95.

Převody zápisů přirozených čísel z jedné číselné soustavy do druhé: typy příkladů

1. Převod ze soustavy o základu $z \neq 10$ do desítkové soustavy
2. Převod z desítkové soustavy do soustavy o základu $z \neq 10$
3. Převod ze soustavy o základu $z \neq 10$ do soustavy o základu $z' \neq 10$

Převod ze soustavy o základu $z \neq 10$ do desítkové soustavy

Převod budeme provádět s využitím věty 1, číslo v původní číselné soustavě zapíšeme pomocí rozvinutého zápisu a následně spočítáme hodnotu v desítkové soustavě.

<u>Příklad 5:</u> Převeďte do zápisu v desítkové soustavě.

a) 10201_3

b) 175_8

c) $A5C_{16}$

Řešení:

a) $10201_3 = 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 81 + 0 + 18 + 0 + 1 = 100_{10}$

b) $175_8 = 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 64 + 56 + 5 = 125_{10}$

c) $A5C_{16} = A \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + C \cdot 16^0 = 10 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 2560 + 80 + 12 = 2652_{10}$

Příklad 6 (k samostatnému řešení)

Převeďte do zápisu v desítkové soustavě.

a) 3012_4

b) 4001_5

c) 11001_2

d) $AB0_{12}$

e) $70D_{15}$

Výsledky: a) 198, b) 501, c) 25, d) 1572, e) 1588

Převod z desítkové soustavy do soustavy o základu $z \neq 10$

U těchto převodů používáme tři metody:

I. Dělení mocninami základu

II. Postupné dělení základem

III. Graficky (seskupování)

I. Metoda dělení mocninami základu

Příklad 7: Zapište číslo $a = 17_{10}$ v soustavě o základu $z = 3$.

Řešení:

Dělíme postupně mocninami nového základu (snižujeme exponent), až dostaneme zbytek 0.

Mocniny základu: $3^0 = 1,\ 3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 27\ \ldots$
Nejvyšší vhodná mocnina základu je druhá (hodnota 27 se do čísla 17 nevejde)

$$17 : 3^2 = 1\ \ (zb. 8)$$
$$8 : 3^1 = 2\ \ (zb. 2)$$
$$2 : 3^0 = 2\ \ (zb. 0)$$

Z výpočtu je vidět, že můžeme zapsat $17 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 122_3$.

Příklad 8 (k samostatnému řešení)

Zapište číslo a v soustavě o základu z, využijte metodu dělení mocninami základu.

a) $a = 9_{10}$ $z = 2$

b) $a = 561_{10}$ $z = 4$

c) $a = 280_{10}$ $z = 12$

Výsledky: a) 1001_2, b) 20301_4, c) $1B4_{12}$

II. Metoda postupného dělení základem

Příklad 9: Zapište číslo $a = 19_{10}$ v soustavě o základu $z = 3$.

Řešení:

Dělíme zadané číslo základem a zapíšeme zbytek. Následně dělíme výsledky předchozího dělení základem a zapisujeme zbytky tak dlouho, až dostaneme podíl 0.

$$19:3 = 6\ (zb.1)$$
$$6:3 = 2\ \ (zb.0)$$
$$2:3 = 0\ \ (zb.2)$$

Výsledek získáme jako zápis zbytků od konce, tedy $a = 19_{10} = 201_3$

Příklad 10 (k samostatnému řešení)

Zapište číslo a v soustavě o základu z, využijte metodu postupného dělení základem

a) $a = 102_{10}$ $\quad z = 8$

b) $a = 12477_{10}$ $\quad z = 16$

c) $a = 197_{10}$ $\quad z = 12$

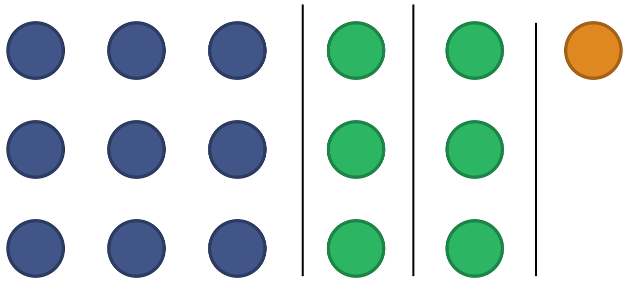
Výsledky: a) 146_8, b) $30BD_{16}$, c) 145_{12}

III. Metoda grafická

<u>Příklad 11</u>: Zapište číslo $a = 16_{10}$ v soustavě o základu $z = 3$.

Řešení:

Zakreslíme 16 obrazců (bodů) do sloupečků o $z = 3$ řádcích.



$$1 \cdot 3^2 \quad + \quad 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 121_3$$

Příklad 12 (k samostatnému řešení)

Zapište číslo a v soustavě o základu z, využijte grafickou metodu.

a) $a = 14_{10}$ $z = 2$

b) $a = 31_{10}$ $z = 4$

c) $a = 17_{10}$ $z = 12$

Výsledky: $a)$ 1110_2, $b)$ 133_4, $c)$ 15_{12}

Převod ze soustavy o základu $z \neq 10$ do soustavy o základu $z' \neq 10$

- Můžeme využít nepřímý převod, to je převod ze soustavy $z \neq 10$ do desítkové soustavy a následný převod z desítkové soustavy do soustavy $z' \neq 10$.
- Jestliže platí $z' = z^n$, nebo $z = (z')^n$, tedy základ jedné soustavy je mocninou základu druhé soustavy, provádíme přímý převod mezi soustavami.

Příklad 13

Převeďte číslo a zapsané v soustavě o základu z do soustavy o základu z'.

a) $a = 11000110_2,\ z' = 4$

Platí $z = 2,\ z' = 4 = 2^2$. Protože nový základ je druhá mocnina původního základu, rozdělíme původní zápis čísla od konce na skupiny po dvou cifrách. Počet skupin určuje počet cifer v zápisu čísla ve čtyřkové soustavě.

$a = 11000110_2$

$$10_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2$$
$$01_2 = 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1$$
$$00_2 = 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 0$$
$$11_2 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3$$

Dohromady vypadá zápis takto: $11000110_2 = 3012_4$.

Provedeme zkoušku:

$$11000110_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$$
$$= 2^6 \cdot (1 \cdot 2 + 1) + 2^4 \cdot (0 \cdot 2 + 0) + 2^2(0 \cdot 2 + 1) + 2^0(1 \cdot 2 + 0) =$$
$$= 3 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 3012_4$$

Příklad 13

b) $a = 1635_8,\ z' = 2$

Postupujeme opačným postupem: každá z cifer v osmičkové soustavě odpovídá třem (osmička je **třetí** mocnina dvojky) cifrám ve dvojkové soustavě.

$$5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$3 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$
$$1 = 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Nuly na začátku čísla nemá smysl psát, získáváme výsledek:

$$1635_8 = 1110011101_2$$

<u>Další příklady</u> k samostatnému řešení

<u>Příklad 14</u>: Převeďte číslo a zapsané v soustavě o základu z do soustavy o základu z'.

a) $a = 11010110_2, \ z' = 8$

b) $a = 2311_4, \ z' = 2$

<u>Příklad 15</u>: Vytvořte si tabulku prvních dvaceti čísel v číselných soustavách o základech 2, 3, 4 a 12.

Výsledky Př. 14: *a)* 326_8, *b)* 10110101_2

Příklad 16 (k samostatnému řešení)

Dvojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě má ciferný součet rovný číslu 9. Jestliže spolu číslice zaměníme, dostaneme nové číslo, které je o 45 větší než původní. Určete původní číslo.

Zapsáno jako algebrogram:

$$\begin{array}{r} AB \\ \underline{+\ 45} \\ BA \end{array} \qquad \text{a platí: } A+B=9$$

Výsledek: 27

Příklad 17 (k samostatnému řešení)

Které dvojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě se po vzájemné výměně cifer zvětší o 37?

Výsledek: Takové číslo neexistuje.

Příklad 18

- Vypočítejte základ z číselné soustavy, platí-li $243_z = 99_{10}$.

Řešení:

Nejprve si rozepíšeme číslo 243_z, následně vyřešíme vzniklou kvadratickou rovnici v desítkové soustavě:

$$243_z = 2 \cdot z^2 + 4 \cdot z^1 + 3 \cdot z^0$$
$$2 \cdot z^2 + 4 \cdot z^1 + 3 \cdot z^0 = 99$$
$$2 \cdot z^2 + 4 \cdot z - 96 = 0$$
$$z^2 + 2 \cdot z - 48 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-48)}}{2} = \frac{-2 \pm 14}{2} = -1 \pm 7$$

Jak je vidět, kořeny vychází $z_1 = 6, z_2 = -8$. Protože základ číselné soustavy musí být kladný, existuje jediné řešení, a to $z = 6$.

Zkusme ověřit: $243_6 = 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 = 99$.

Příklad 19 (k samostatnému řešení)

Vypočítejte základ z číselné soustavy.

a) $21_z = 9_{10}$

b) $120_z = 35_{10}$

c) $222_z = 42_{10}$

Výsledky: a) 4, b) 5, c) 4.

Počítání po jedné v pozičních soustavách s různými základy

Než začneme s početními výkony, podívejme se, jak jdou za sebou čísla v různých číselných soustavách:

z=2: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, ...

z=3: 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, ...

...

z=8: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, ...

(zápis 20 v osmičkové soustavě odpovídá zápisu 16 v desítkové soustavě)

Čísla ve dvanáctkové a šestnáctkové soustavě

- Ze soustav se základem větším než 10 si pro naše počítání vybereme jen soustavy se základem 12 a 16.
- počítání po jedné v těchto soustavách:

z=12: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1A, 1B, 20,

(zápis 20 ve dvanáctkové soustavě odpovídá zápisu 24 v desítkové)

z=16: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, 10, ...

(zápis 10 ve dvanáctkové soustavě odpovídá zápisu 16 v desítkové)

Příklad 20

Určete předchůdce a následovníka čísla v dané číselné soustavě.

a) 99_{10} předchůdce: 98_{10} následovník: 100_{10}

b) $166_7 = 1 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0$
předchůdce: 165_7 následovník: 200_7

c) 33203_4

d) 1100101_2

e) 777_8

f) $AB00_{16}$

Výsledky: c) p: 33202_4, n: 33210_4 d) p: 1100100_2, n: 1100110_2 e) p: 776_8, n: 1000_8 f) p: $AAFF_{16}$, n: $AB01_{16}$

Sčítání

Příklad 21

Stejným způsobem sčítáme i v číselných soustavách s jiným základem.

Sečtěte:

a)
$$\begin{array}{r} 336_7 \\ +\ 355_7 \\ \hline 1024_7 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} AC2_{16} \\ +\ 2BA_{16} \\ \hline D7C_{16} \end{array}$$

$5+6=11_{10}=1\cdot 7^1+4\cdot 7^0=14_7$

$1+5+3=9_{10}=1\cdot 7^1+2\cdot 7^0=12_7$

$1+3+3=7_{10}=1\cdot 7^1+0\cdot 7^0=10_7$

$\mathrm{A}+2=10+2=12_{10}=12\cdot 16^0=C\cdot 16^0=C_{16}$

$\mathrm{B}+\mathrm{C}=11+12=23_{10}=1\cdot 16^1+7\cdot 16^0=17_{16}$

$1+2+A=1+2+10=13_{10}=13\cdot 16^0=D\cdot 16^0=D_{16}$

Příklad 22 (k samostatnému řešení)

Sečtěte pod sebou.

a) $5274_8 + 756_8$

b) $425_7 + 562_7$

c) $BDF_{16} + BCA_{16}$

d) $A1B2_{16} + F3E4_{16}$

Výsledky: a)6252_8, b) 1320_7, c) $17A9_{16}$, d) 19596_{16}

Odčítání

Příklad 23

Stejným způsobem počítáme i v číselných soustavách s jiným základem.

Odečtěte:

a)

$$\begin{array}{r} 614_7 \\ -\ 325_7 \\ \hline 256_7 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} AE3_{16} \\ -\ 1A4_{16} \\ \hline 93F_{16} \end{array}$$

$5 + ? = 14_7 = 11_{10} = 5 + 6_{10} = 5 + 6_7 \rightarrow 6_7$

$2 + 1 = 3$ $\quad 3 + ? = 11_7 = 8_{10} = 3 + 5_{10} = 3 + 5_7 \rightarrow 5_7$

$1 + 3 = 4$ $\quad 4 + ? = 6_7 = 6_{10} = 4 + 2_{10} = 4 + 2_7 \rightarrow 2_7$

$4 + ? = 13_{16} = 19_{10} = 4 + 15_{10} = 4 + F_{16} \rightarrow F_{16}$

$\mathrm{A} + 1 = \mathrm{B}$ $\quad \mathrm{B} + ? = E_{16} = 14_{10} = 11 + 3_{10} = B + 3_{16} \rightarrow 3_{16}$

$1 + ? = A_{16} = 10_{10} = 1 + 9_{10} = 1 + 9_{16} \rightarrow 9_{16}$

Příklad 24 (k samostatnému řešení)

Odečtěte pod sebou.

a) $354_7 - 135_7$

b) $3412_6 - 543_6$

c) $3412_{16} - 543_{16}$

d) $A1B2_{12} - 3AA_{12}$

Výsledky: a) 216_7, b) 2425_6, c) $2ECF_{16}$, d) $9A04_{12}$.

Násobení

Příklad 25

Stejným způsobem počítáme i v číselných soustavách s jiným základem.

Vynásobte:

$$
\begin{array}{r}
325_7 \\
\cdot\ 124_7 \\
\hline
1636 \\
653 \\
325 \\
\hline
44266_7
\end{array}
$$

$4 \cdot 5 = 20_{10} = 26_7$

$2 \cdot 5 = 10_{10} = 13_7$

$1 \cdot 5 = 5_{10} = 5_7$

$2 + 4 \cdot 2 = 10_{10} = 13_7$

$1 + 2 \cdot 2 = 5_{10} = 5_7$

$1 \cdot 2 = 2_{10} = 2_7$

$1 + 4 \cdot 3 = 13_{10} = 16_7$

$2 \cdot 3 = 6_{10} = 6_7$

$1 \cdot 3 = 3_{10} = 3_7$

Příklad 26 (k samostatnému řešení)

Vynásobte:

a) $100101_2 \cdot 1011_2$

b) $3204_6 \cdot 513_6$

c) $92_{12} \cdot 35_{12}$

d) $106_{12} \cdot 48_{12}$

Výsledky: a) 110010111_2, b) 2533300_6, c) $273A_{12}$, d) $4A88_{12}$.

Dělení

Příklad 27

Stejným způsobem počítáme i v číselných soustavách s jiným základem.

Vydělte:

$30632_7 : 5 = 4246_7 \ (zb. 0)$

16

33

42

$30_7 = 21_{10}$

$16_7 = 13_{10}$

$33_7 = 24_{10}$

$42_7 = 30_{10}$

$21_{10} : 5 = 4_{10} = 4_7 \ (zb. 1)$

$13_{10} : 5 = 2_{10} = 2_7 \ (zb. 3)$

$24_{10} : 5 = 4_{10} = 4_7 \ (zb. 4)$

$30_{10} : 5 = 6_{10} = 6_7 \ (zb. 0)$

Zkouška:

$$\begin{array}{r} 4246_7 \\ \cdot \quad 5 \\ \hline 30632_7 \end{array}$$

Příklad 28

Vydělte:

a) $1002_3 : 2$

b) $3204_6 : 4$

c) $4B06_{12} : 7$

d) $10A_{12} : 9$

Výsledky: a) 112_3 (zb. 1), b) 501_6, c) 852_{12} (zb. 4), d) 15_{12} (zb. 1).

Příklad 29 (k samostatnému řešení)

Vypočítejte:

a) $534042_6 + 343445_6$

b) $1011011_2 - 11001_2$

c) $42110_5 - 2103_5$

d) $2330_4 - 103_4$

e) $534042_6 - 343445_6$

f) $1011011_2 \cdot 11001_2$

g) $2330_4 \cdot 103_4$

h) $42110_5 \cdot 2103_5$

i) $4504_6 \cdot 121_6$

j) $212011_3 : 2_3$

k) $2330_4 : 3_4$

l) $40432_5 : 3_5$

m) $12345013_6 : 5_6$

Na závěr:

Pokud jste vše spočítali, můžete si znovu přehrát písničku

https://www.youtube.com/watch?v=UIKGV2cTgqA

(Tom Lehrer, „New Math“)