Základy elementární matematiky s didaktikou pro učitelství 1. stupně ZŠ

Jitka Panáčová
Jaroslav Beránek

Email: panacova@ped.muni.cz,
beranek@ped.muni.cz
Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity, Brno 2020

Obsah

Úvod

Tato publikace je určena pro studentky a studenty prezenčního i kombinovaného studia učitelství prvního stupně základní školy. Pokrývá značnou část obsahu výuky matematiky prvního a částečně druhého semestru na Pedagogické fakultě Masarykovy univerzity v Brně.

Jednou ze základních úloh vyučování matematiky na prvním stupni základní školy je budování pojmu přirozeného čísla. Učitel, který vyučuje matematiku na prvním stupni základní školy, musí znát způsob budování pojmu přirozeného čísla v matematice jako vědě, ale hlavně ve školské matematice. K tomu je pro učitele prvního stupně ZŠ nezbytné, aby ovládal základní pojmy logiky, intuitivní teorie množin a binárních relací, které jsou prostředkem pro budování poznatků o přirozených číslech. Ukazuje se totiž, že ty nejelementárnější pojmy z aritmetiky, s nimiž budete jednou seznamovat své žáky, patří k nejobtížnějším matematickým pojmům a jejich zavedení vyžaduje u učitele důkladnou znalost výrokové logiky, teorie množin a binárních relací.

Z popsaných důvodů je celá první kapitola této publikace věnována výrokové logice, základním poznatkům o množinách a stavbě matematických vět. Druhá kapitola shrnuje učivo z oblasti binárních relací, jejich vlastností a zobrazení mezi množinami. Obě kapitoly jsou koncipovány tak, že průběžně čtenáře seznamují se základními pojmy uvedených oblastí, na které navazují řešené úlohy. Závěr obou kapitol shrnuje využití výrokové logiky, základních poznatků o množinách a binárních relacích v učivu matematiky prvního stupně ZŠ. Každá podkapitola je na konci doplněna úlohami k procvičení s výsledky, případně návody k jejich řešení.

Při zpracování této publikace autoři vycházeli z obsahu výuky matematiky na prvním stupni základní školy.

Poznamenejme, že v celé publikaci budeme používat následující označení pro číselné množiny:

- $\mathbb{N}$ - množina všech přirozených čísel,
- $\mathbb{N}_0$ - množina všech přirozených čísel (včetně nuly),
- $\mathbb{Z}$ - množina všech celých čísel,
- $\mathbb{Q}$ - množina všech racionálních čísel,
- $\mathbb{R}$ - množina všech reálných čísel.

Při studiu elementární matematiky vám, milí studenti, přejeme mnoho úspěchů.

V Brně v červenci 2020

Autoři

1 Úvod do výrokové logiky a základní poznatky o množinách

1.1 Výroková logika

Při dorozumívání mezi lidmi v běžném životě, v různých oblastech lidské činnosti a v matematice vyslovujeme mnoho výroků. Pojem výrok je základním pojmem výrokové logiky, která se zabývá studiem různých forem myšlení a vyjadřování a studiem pravidel správného usuzování. Poznatky z výrokové logiky nám pak umožní přesně a logicky formulovat myšlenky.

1.1.1 Výroky

Výrokem rozumíme každé srozumitelné sdělení, které je pravdivé nebo nepravdivé, přičemž z obou těchto možností nastane právě jedna.

V případě, že dané sdělení je výrokem a je

- pravdivé, hovoříme o **pravdivém výroku** nebo říkáme, že **výrok platí**.
- nepravdivé, hovoříme o **nepravdivém výroku** nebo říkáme, že **výrok neplatí**.

Někdy nejsme schopni rozpoznat hned, zda dané sdělení je či není výrok. Zde si pak můžeme pomoci otázkou "Je pravda, že…?" týkající se daného sdělení - pokud tato otázka má smysl, pak je dané sdělení výrokem.

Ve výrokové logice nás nezajímá konkrétní obsah jednotlivých výroků, ale pouze jejich pravdivost. Je-li výrok pravdivý, říkáme, že **má pravdivostní hodnotu 1**, je-li výrok nepravdivý, říkáme, že **má pravdivostní hodnotu 0**. Je zřejmé, že rozhodnout o pravdivosti některých výroků je velmi obtížné ba dokonce nemožné, zcela jistě však právě jedna z těchto dvou možností nastane.

Příklady výroků:

- Praha je hlavní město České republiky. (pravdivý výrok)
- Moskva je hlavní město Ukrajiny. (nepravdivý výrok)
- $8 - 3 > 7$ (nepravdivý výrok)
- $12 + 7 = 19$ (pravdivý výrok)
- $2H_2 + O_2 = 2H_2O$. (pravdivý výrok)
- Král Karel IV. dostal v říjnu roku 1347 rýmu. (výrok, o jehož pravdivosti nejsme schopni rozhodnout)

Příklady sdělení, která nejsou výroky:

- Utíkej!
- 3 + 6 - 1
- Přijdeš?
- $x > 7$

Speciálními případy pravdivých výroků jsou matematické věty, o kterých bude pojednáno podrobněji v kapitole 1.5.2. Mezi výroky řadíme rovněž tzv. hypotézy.

Hypotéza (domněnka) je výrok, u kterého nejsme v daném okamžiku schopni rozhodnout, zda je pravdivý, či nepravdivý. Vyslovení hypotézy bývá spojeno s vědeckým bádáním, kdy formulujeme hypotézu, jejíž pravdivost zatím pouze předpokládáme. Tento předpoklad je však třeba ověřit například zkoumáním nebo experimentem, na jejichž základě dospějeme k výsledku, který pravdivost vyslovené hypotézy buď potvrdí, nebo vyvrátí. S hypotézami se rovněž setkáváme v běžném životě, kde jsou obvykle spjaty s budoucností.

Příklady hypotéz:

- Na planetě Mars existuje život.
- Příští týden budeme psát písemku z matematiky.
- V jezeře Loch Ness žije lochnesská příšera.

Příklad 1.1 Určete, která z následujících tvrzení jsou výroky, případně hypotézy. V případě výroků rozhodněte o jejich pravdivosti.

a) Řešte nerovnici $2x - 5 \leq 7$.
b) Pro každé přirozené číslo x platí, že $2x - 5 \leq 7$.
c) Existuje přirozené číslo x, pro které platí $2x - 5 \leq 7$.
d) Dvě strany trojúhelníka jsou shodné.
e) Brno má více než milion obyvatel.
f) V Brně sídlí univerzita.
g) Pro každá dvě celá čísla a, b platí, že $3 + a - b = 1$.
h) $2x - 5 \leq 7$,
i) Číslo 2 je dělitelem čísla 10.
j) Číslo 3 není dělitelem čísla 10.
k) $3 + a - b$,
l) Sněží?

Řešení:
Tvrzení a), d), h), k), l) nejsou výroky.
Tvrzení c), f), i), j) jsou pravdivé výroky.
Tvrzení b), e), g) jsou nepravdivé výroky.

Poznámka 1.1 a) Pravdivý výrok "Číslo 2 je dělitelem čísla 10." z příkladu 1.1 i) můžeme také formulovat: "Číslo 10 je dělitelné číslem 2." nebo "Číslo 10 je násobkem čísla 2." Tyto tři výroky můžeme zapsat symbolicky $2 \mid 10$.

b) Pravdivý výrok "Číslo 3 není dělitelem čísla 10." z příkladu 1.1 j) můžeme také formulovat: "Číslo 10 není dělitelné číslem 3." nebo "Číslo 10 není násobkem čísla 3." Tyto tři výroky můžeme zapsat symbolicky $3 \nmid 10$.

1.1.2 Logické spojky, složené výroky a výrokové formule

V odstavci 1.1.1 jsme se seznámili s jednoduchými výroky, které byly po stránce jazykové jednoduchými větami. Tak jako v běžném životě nemluvíme pouze v jednoduchých větách, ale pomocí různých spojek z nich vytváříme souvětí, v logice postupujeme obdobným způsobem - pomocí tzv. **logických spojek** vytváříme z jednoduchých výroků **výroky složené**.

Pro snazší práci s jednoduchými i složenými výroky používáme ve výrokové logice malá tiskací písmena, např. p, q, $r,\ldots$, která zastupují konkrétní výrok s pravdivostní hodnotou buď 0, nebo 1. Tomuto označení výroku říkáme **výroková proměnná**.

Základními složenými výroky jsou následující výroky:

Negací výroku p rozumíme výrok $\neg p$, který je nepravdivý, je-li výrok p pravdivý a je pravdivý, je-li výrok p nepravdivý.

Konjunkcí výroků p**,** q rozumíme výrok $p \wedge q$, který je pravdivý, jsou-li oba výroky p, q pravdivé.

Disjunkcí výroků p**,** q rozumíme výrok $p \vee q$, který je pravdivý, je-li alespoň jeden z výroků p, q pravdivý.

Ostrou disjunkcí výroků p**,** q rozumíme výrok $p \veebar q$, který je pravdivý, je-li právě jeden z výroků p, q pravdivý.

Implikací výroků p**,** q rozumíme výrok $p \Rightarrow q$, který je nepravdivý, je-li výrok p pravdivý a výrok q nepravdivý.

Ekvivalencí výroků p**,** q rozumíme výrok $p \Leftrightarrow q$, který je pravdivý, mají-li oba výroky p, q stejnou pravdivostní hodnotu.

V tabulce 1.1 jsou pro přehlednost uvedeny základní složené výroky s jejich zápisy a příslušné logické spojky.

Poznámka 1.2 a) Negování výroku p znamená vytvoření jeho negace $\neg p$ a je založeno na skutečnosti, že pravdivost výroku p a jeho negace $\neg p$ se navzájem vylučují. Negovat jednoduchý výrok lze předřazením slova "ne" před sloveso, eventuelně pomocí slovního spojení "není pravda, že…", případně záměnou slovesa "je" za "není". Postup při negování jednoduchých výroků bude vysvětlen níže na konkrétních příkladech.

b) Pro implikaci výroků $p \Rightarrow q$ můžeme použít také formulace: "p implikuje q", "je-li p, pak q", "q, jestliže p", "p implikuje q.

c) Pro ekvivalenci výroků $p \Leftrightarrow q$ můžeme použít také formulaci: "výrok p je ekvivaletní s výrokem q".

Tabulka 1.1: Logické spojky a základní složené výroky

výroky	název výroku	zápis výroku	čtení logické spojky	logická spojka
p	**Negace výroku** p	$\neg p$	*není pravda, že platí...*	$\neg$
p, q	**Konjunkce výroků** p, q	$p \wedge q$	*a, a současně, a zároveň*	$\wedge$
p, q	**Disjunkce výroků** p, q	$p \vee q$	*nebo*	$\vee$
p, q	**Ostrá disjunkce výroků** p, q	$p \veebar q$	*buď ..., anebo*	$\veebar$
p, q	**Implikace výroků** p, q	$p \Rightarrow q$	*jestliže ..., pak*	$\Rightarrow$
p, q	**Ekvivalence výroků** p, q	$p \Leftrightarrow q$	*právě tehdy, když*	$\Leftrightarrow$

Tabulka 1.2: Tabulka pravdivostních hodnot základních složených výroků

výrok	výrok	negace	konjunkce	disjunkce	ostrá disjunkce	implikace	ekvivalence
p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1

Příklad 1.2 Je dána dvojice výroků p, q:
p: Prší. q: Jedu k babičce.
Z výroků p, q utvořte složené výroky $\neg p$, $\neg q$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$.

Řešení:
$\neg p$: Neprší.
$\neg q$: Nejedu k babičce.
$p \wedge q$: Prší a jedu k babičce.
$p \vee q$: Prší nebo jedu k babičce.
$p \veebar q$: Buď prší, nebo jedu k babičce.
$p \Rightarrow q$: Jestliže prší, pak jedu k babičce.
$p \Leftrightarrow q$: Prší právě tehdy, když jedu k babičce.

Stejně jako u jednoduchých výroků se ani u složených výroků nezabýváme jejich obsahem, ale jejich pravdivostní hodnotou. Pravdivostní hodnotu složeného výroku určíme z pravdivostních hodnot jednoduchých výroků, z nichž je složený výrok vytvořen. Pravdivostní hodnoty základních složených výroků uvádí tabulka 1.2.

Příklad 1.3 Je dána dvojice výroků p, q, z nichž p je pravdivý a q nepravdivý:

p: Číslo 6 je dělitelné třemi. q: Číslo 12 je násobkem čísla 5.

Z výroků p, q utvořte složené výroky $\neg p$, $\neg q$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ a s využitím tabulky 1.2 rozhodněte, které z nich jsou pravdivé a které nepravdivé.

Řešení:

$\neg p$: Číslo 6 není dělitelné třemi. (nepravdivý výrok)

$\neg q$: Číslo 12 není násobkem čísla 5. (pravdivý výrok)

$p \wedge q$: Číslo 6 je dělitelné třemi a zároveň číslo 12 je násobkem čísla 5. (nepravdivý výrok)

$p \vee q$: Číslo 6 je dělitelné třemi nebo číslo 12 je násobkem čísla 5. (pravdivý výrok)

$p \veebar q$: Buď je číslo 6 dělitelné třemi, nebo číslo 12 je násobkem čísla 5. (pravdivý výrok)

$p \Rightarrow q$: Jestliže číslo 6 je dělitelné třemi, pak číslo 12 je násobkem čísla 5. (nepravdivý výrok)

$p \Leftrightarrow q$: Číslo 6 je dělitelné třemi právě tehdy, když číslo 12 je násobkem čísla 5. (nepravdivý výrok)

Poznámka 1.3 Jednoduché výroky p, q a složené výroky z nich vytvořené vz příkladu 1.3 lze zapsat pomocí matematické symboliky takto:

$$
\begin{array}{rlrlrl}
p: & 3 \mid 6, & q: & 5 \mid 12, & \neg p: & 3 \nmid 6, \\
\neg q: & 5 \nmid 12, & p \wedge q: & 3 \mid 6 \ \wedge \ 5 \mid 12, & p \vee q: & 3 \mid 6 \ \vee \ 5 \mid 12, \\
p \veebar q: & 3 \mid 6 \ \veebar \ 5 \mid 12, & p \Rightarrow q: & 3 \mid 6 \Rightarrow 5 \mid 12, & p \Leftrightarrow q: & 3 \mid 6 \Leftrightarrow 5 \mid 12
\end{array}
$$

Příklad 1.4 Zformulujte negace jednoduchých výroků a určete jejich pravdivostní hodnoty:

p_1: $3 + 5 < 8$,

p_2: Číslo 6 je prvočíslo.

p_3: $\sqrt{32} = 2\sqrt{8}$,

p_4: Číslo 5 není dělitelem čísla 100.

p_5: $5 + 6 > 2$.

Řešení:

$\neg p_1$: $3 + 5 \geq 8$, (pravdivý výrok)

$\neg p_2$: Číslo 6 není prvočíslo. (pravdivý výrok)

$\neg p_3$: $\sqrt{32} \neq 2\sqrt{8}$, (nepravdivý výrok)

$\neg p_4$: Číslo 5 je dělitelem čísla 100. (pravdivý výrok)

$\neg p_5$: $5 + 6 \leq 2$. (nepravdivý výrok)

V následujícím textu vymezíme soubor znaků, s nímž operujeme ve výrokové logice. Tento soubor nazýváme **abecedou výrokové logiky** a tvoří jej

- znaky pro výrokové proměnné: p, q, r, s,…
- znaky pro konstanty P a N, kde P, resp. N značí pravdivý, resp. nepravdivý výrok,
- znaky pro logické spojky: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\veebar$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$,
- pomocné znaky: (), [], { }.

Pomocí výše uvedených znaků abecedy výrokové logiky můžeme vytvářet tzv. **výrokové formule**. Tvoříme je podle následujících pravidel:

1. Každá výroková proměnná p, q, r, s,… je výrokovou formulí.
2. Konstanty P a N jsou výrokové formule.
3. Jestliže výrazy p, q jsou výrokové formule, potom i $\neg p$, $\neg q$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ jsou výrokové formule.
4. Žádné jiné výrazy nejsou výrokové formule.

Výroková formule je tedy takový zápis, který obsahuje výrokové proměnné, logické spojky a závorky, ze kterého po dosazení konkrétních výroků za výrokové proměnné dostaneme výrok. Výrokovými formulemi vyjadřujeme sled logických operací, při jejichž tvorbě budeme vycházet z následujících zásad:[1]

- logické operace v závorkách mají přednost před logickými operacemi vně závorek,
- znak $\neg$ má přednost před ostatními logickými spojkami,
- logické spojky $\wedge$, $\vee$, $\veebar$ mají přednost před logickými spojkami $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Příklady výrokových formulí:

- $p \wedge \neg q$,
- $\neg p \vee r$,
- $(r \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$,
- $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

Poznámka 1.4 Vymezením pojmu pro výrokovou formuli výše je zřejmé, že libovolná posloupnost vytvořená ze znaků abecedy výrokové logiky nemusí být výrokovou formulí. Například posloupnosti znaků $(p \Rightarrow q)\wedge$ nebo $(p \Rightarrow) \vee q$ nejsou výrokové formule.

Příklad 1.5 Zapište prostřednictvím výrokových formulí následující složené výroky:

a) Přijde Adam, ale Filip ne.
b) Ze sourozenců Adam, Filip přijde nejvýše jeden.
c) Ze sourozenců Adam, Filip přijde alespoň jeden.
d) Přijde Adam a Filip.
e) Buď přijde Adam nebo Filip.
f) Když přijde Adam, tak nepřijde Filip.
g) Přijde právě jeden ze dvojice Adam, Filip.
h) Z trojice Adam, Filip, Katka přijdou všichni.
i) Z trojice Adam, Filip, Katka nepřijde nikdo.
j) Jestliže přijde Adam, pak nepřijde ani Filip ani Katka.
k) Jestliže přijde Adam a Filip nepřijde, pak přijde Katka.
l) Katka s Filipem přijdou právě tehdy, když nepřijde Adam.

Řešení:

[1] Řada publikací, které se zabývají výrokovou logikou, vychází při tvorbě výrokových formulí z odlišných zásad. My jsme pravidla pro tvorbu výrokových formulí převzali z publikace (Bartsch, 1987).

Označme výroky:
a: Přijde Adam. f: Přijde Filip. k: Přijde Katka.

Symbolické zápisy složených výroků prostřednictvím výrokových formulí jsou

a) $a \wedge \neg f$, b) $\neg a \vee \neg f$, c) $a \vee f$, d) $a \wedge f$,
e) $a \veebar f$, f) $a \Rightarrow \neg f$, g) $a \veebar f$, h) $a \wedge f \wedge k$,
i) $\neg a \wedge \neg f \wedge \neg k$, j) $a \Rightarrow (\neg f \wedge \neg k)$, k) $(a \wedge \neg f) \Rightarrow k$, l) $(k \wedge f) \Leftrightarrow \neg a$.

Pravdivostním ohodnocením výrokové formule rozumíme určení její pravdivostní hodnoty v závislosti na pravdivostních hodnotách výrokových proměnných, z nichž je složena. Pravdivostní ohodnocení výrokové formule provádíme na základě tabulky pravdivostních hodnot 1.2.

Příklad 1.6 Proveďte pravdivostní ohodnocení výrokové formule

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r].$$

Řešení: Pravdivostní ohodnocení výrokové formule provedeme pomocí tabulky, do jejíhož záhlaví nejdříve zapíšeme zadanou výrokovou formuli. Do tabulky dále zapíšeme pod výrokové proměnné p, q, r (zleva) všechny variace jejich možných pravdivostních hodnot. Následně ohodnotíme výrokové formule v kulatých závorkách $q \Rightarrow r$ a $p \wedge q$ (tj. jejich pravdivostní hodnoty zapíšeme do tabulky pod jejich příslušné logické spojky) a analogicky výrokové formule v hranatých závorkách $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ a $(p \wedge q) \Rightarrow r$. Pravdivostní hodnoty těchto složených výrokových formulí určíme dle tabulky 1.2. Na závěr ohodnotíme výrokovou formuli s hlavní logickou spojkou $\Leftrightarrow$ opět dle tabulky 1.2.

$[p$	$\Rightarrow$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)]$	$\Leftrightarrow$	$[(p$	$\wedge$	$q)$	$\Rightarrow$	$r]$
1	1	1	1	1	1		1		1	
1	0	1	0	0	1		1		0	
1	1	0	1	1	1		0		1	
1	1	0	1	0	1		0		1	
0	1	1	1	1	1		0		1	
0	1	1	0	0	1		0		1	
0	1	0	1	1	1		0		1	
0	1	0	1	0	1		0		1	

S ohledem na pravdivostní ohodnocení výrokových formulí rozlišujeme následující typy:

1. **Tautologie** je výroková formule, která pro libovolné pravdivostní hodnoty svých výrokových proměnných nabývá vždy pravdivostní hodnotu 1.

2. **Kontradikce** je výroková formule, která pro libovolné pravdivostní hodnoty svých výrokových proměnných nabývá vždy pravdivostní hodnotu 0.

3. **Splnitelné formule** je výroková formule, která není kontradikce ani tautologie.

Poznámka 1.5 Výroková formule $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$ z příkladu 1.6 je tautologie (vždy pravdivá), viz 6. sloupec v tabulce pravdivostních hodnot.

Příklad 1.7 Dokažte, že výroková formule $p \vee \neg p$ je tautologie a výroková formule $p \wedge \neg p$ je kontradikce.

Řešení: Důkaz podává tabulka pravdivostních hodnot:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	1	0
0	1	1	0

Příklad 1.8 Dokažte, že výroková formule $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ je tautologie.

Řešení: Důkaz podává tabulka pravdivostních hodnot:

$[(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)]$	$\Rightarrow$	$(p$	$\Rightarrow$	$r)$
1	1	1	1		1	1	1		1	
1	1	1	0		0	0	1		0	
1	0	0	0		1	1	1		1	
1	0	0	0		1	0	1		0	
0	1	1	1		1	1	1		1	
0	1	1	0		0	0	1		1	
0	1	0	1		1	1	1		1	
0	1	0	0		1	0	1		1	

Poznámka 1.6 Mají-li dvě výrokové formule v_1 a v_2 stejných výrokových proměnných stejná pravdivostní ohodnocení, pak se nazývají **logicky ekvivalentní výrokové formule**. Zapisujeme je symbolem $v_1 \sim v_2$. Je zřejmé, že výroková formule $v_1 \Leftrightarrow v_2$ je tautologií. Po dosazení jednoduchých výroků za všechny výrokové proměnné do logicky ekvivalentních výrokových formulí v_1 a v_2 získáme dvojici výroků, které nazýváme **logicky ekvivalentní výroky**.

Příklad 1.9 Dokažte, že výrokové formule $\neg(p \Leftrightarrow q)$ a $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ jsou logicky ekvivalentní.

Řešení: Provedeme pravdivostní ohodnocení výrokové formule

$$[\neg(p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)].$$

Důkaz podává tabulka pravdivostních hodnot:

$[\neg$	$(p$	$\Leftrightarrow$	$q)]$	$\Leftrightarrow$	$[(p$	$\wedge$	$\neg q)$	$\vee$	$(\neg p$	$\wedge$	$q)]$
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0

Z tabulky je patrné, že výroková formule $[\neg(p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)]$ je tautologie. Výrokové formule $\neg(p \Leftrightarrow q)$ a $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ jsou tedy logicky ekvivalentní, neboť mají stejné pravdivostní hodnoty. Skutečnost, že se jedná o logicky ekvivalentní výrokové formule, zapíšeme

$$\neg(p \Leftrightarrow q) \sim (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q).$$

Příklad 1.10 Uvažujme výroky

s: V sobotu bude pršet.
n: V neděli bude pršet.
p: Půjdeme na procházku.

Zapište symbolicky složené výroky

v_1: Jestliže bude v sobotu nebo v neděli pršet, pak nepůjdeme na procházku.
v_2: Jestliže půjdeme na procházku, pak nebude pršet ani v sobotu ani v neděli.

a rozhodněte, zda jsou výroky v_1, v_2 logicky ekvivalentní.

Řešení: Složené výroky v_1, v_2 zapíšeme symbolicky pomocí výrokových proměnných s, n, p následovně:

v_1: $(s \vee n) \Rightarrow \neg p$, v_2: $p \Rightarrow (\neg s \wedge \neg n)$.

Provedeme pravdivostní ohodnocení výrokové formule $[(s \vee n) \Rightarrow \neg p] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (\neg s \wedge \neg n)]$ pomocí tabulky pravdivostních hodnot:

$[(s$	$\vee$	$n)$	$\Rightarrow$	$\neg p]$	$\Leftrightarrow$	$[p$	$\Rightarrow$	$(\neg s$	$\wedge$	$\neg n)]$
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1

Z tabulky pravdivostních hodnot je zřejmé, že výroková formule

$$[(s \vee n) \Rightarrow \neg p] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (\neg s \wedge \neg n)]$$

je tautologie a složené výroky v_1, v_2 jsou logicky ekvivalentní, tj. $v_1 \sim v_2$.

Při hlubším studiu matematiky se využívá řada ekvivalentních výrokových formulí. Základní ekvivalentní výrokové formule vyjadřující **komutativnost** konjunkce a disjunkce výroků jsou uvedeny ve vztazích 1.1 a 1.2. Mezi základní ekvivalentní výrokové formule, které vyjadřují **asociativnost** konjunkce a disjunkce výroků, řadíme vztahy 1.3 a 1.4:

$$(p \wedge q) \sim (q \wedge p), \tag{1.1}$$

$$(p \vee q) \sim (q \vee p), \tag{1.2}$$

$$(p \wedge q) \wedge r \sim p \wedge (q \wedge r), \tag{1.3}$$

$$(p \vee q) \vee r \sim p \vee (q \vee r), \tag{1.4}$$

Ekvivalentní výrokové formule vyjadřující vzájemnou **distributivnost** konjunkce a disjunkce výroků zaznamenávají vztahy 1.5 a 1.6.

$$p \wedge (q \vee r) \sim (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \tag{1.5}$$

$$p \vee (q \wedge r) \sim (p \vee q) \wedge (p \vee r), \tag{1.6}$$

Ekvivalentní výrokové formule 1.7 a 1.8 nazýváme **de Morganovými zákony** a používáme je společně se vztahy 1.9, 1.10, 1.11 při negování složených výroků.

$$\neg(p \vee q) \sim \neg p \wedge \neg q, \tag{1.7}$$

$$\neg(p \wedge q) \sim \neg p \vee \neg q, \tag{1.8}$$

$$\neg(p \veebar q) \sim p \Leftrightarrow q, \tag{1.9}$$

$$\neg(p \Rightarrow q) \sim p \wedge \neg q, \tag{1.10}$$

$$\neg(p \Leftrightarrow q) \sim p \veebar q, \tag{1.11}$$

Ekvivalentní výrokové formule 1.12, resp. 1.13, resp. 1.14 nazýváme **zákon dvojité negace**, resp. **zákon o vyloučení třetí možnosti**, resp. **zákon sporu**.

$$\neg(\neg p) \sim p, \tag{1.12}$$

$$(p \vee \neg p) \sim P, \tag{1.13}$$

$$(p \wedge \neg p) \sim N. \tag{1.14}$$

Běžně používané ekvivalentní výrokové formule uvádí vztahy 1.15 a 1.16.

$$p \Leftrightarrow q \sim (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p), \tag{1.15}$$

$$p \Rightarrow q \sim \neg p \vee q. \tag{1.16}$$

Ponecháváme na samotném čtenáři, aby si výše uvedené tautologie 1.1 - 1.16 ověřil pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

Příklad 1.11 Zapište symbolicky složené výroky a zformulujte jejich negace dle pravidel 1.7 - 1.11:

a) Dám si zmrzlinu nebo čokoládu.
b) Nedám si zmrzlinu ani čokoládu.
c) Jestli si dám zmrzlinu, nedám si čokoládu.
d) Zmrzlinu si dám, když si nedám čokoládu.

Řešení: Označme výroky:
p: Dám si zmrzlinu. q: Dám si čokoládu.

Složené výroky a jejich negace určené pomocí pravidel 1.7 - 1.11 zapíšeme symbolicky prostřednictvím výrokových formulí takto:

	složený výrok	negace složeného výroku
a)	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$
b)	$\neg p \wedge \neg q$	$p \vee q$
c)	$p \Rightarrow \neg q$	$p \wedge q$
d)	$p \Leftrightarrow \neg q$	$p \underline{\vee} \neg q$

Negace složených výroků z tabulky zapíšeme slovy takto:

a) Nedám si zmrzlinu ani čokoládu.
b) Dám si zmrzlinu nebo čokoládu.
c) Dám si zmrzlinu i čokoládu.
d) Buď si dám zmrzlinu, nebo si nedám čokoládu.

Příklad 1.12 Zapište symbolicky složené výroky a zformulujte jejich negace dle pravidel 1.7 - 1.11:

a) $3 > -5 \ \wedge \ 3 \mid 15.$
b) $2 \mid 6 \ \Rightarrow \ 2 \mid 12.$
c) $1 + 1 = 3 \ \vee \ 2 \cdot 5 = 10.$

Řešení: Označme výroky:
a) r: $3 > -5$ s: $3 \mid 15$
b) t: $2 \mid 6$ u: $2 \mid 12$
c) v: $1 + 1 = 3$ w: $2 \cdot 5 = 10$

Složené výroky a jejich negace určené pomocí pravidel 1.7 - 1.11 zapíšeme symbolicky prostřednictvím výrokových formulí takto:

	složený výrok	negace složeného výroku
a)	$r \wedge s$	$\neg r \vee \neg s$
b)	$t \Rightarrow u$	$t \wedge \neg u$
c)	$v \vee w$	$\neg v \wedge \neg w$

Negace složených výroků z tabulky zapíšeme matematicky takto:

a) $3 \leq -5 \ \vee \ 3 \nmid 15$.
b) $2 \mid 6 \ \wedge \ 2 \nmid 12$.
c) $1 + 1 \neq 3 \ \wedge \ 2 \cdot 5 \neq 10$.

V závěru tohoto odstavce uvedeme slovní úlohu, při jejímž řešení využijeme znalostí z výrokové logiky.

Příklad 1.13 Tři stroje v dílně jsou v provozu podle následujících podmínek: Pracuje-li první stroj, pracuje i druhý. Pracuje druhý nebo třetí stroj. Nepracuje-li první stroj, nepracuje ani třetí. Kolik existuje různých situací, při nichž jsou splněny všechny podmínky?

Řešení:
Označme výroky:

p: Pracuje první stroj. d: Pracuje druhý stroj. t: Pracuje třetí stroj.

Zadané podmínky pro výroky p, d, t vyjádříme prostřednictvím složených výroků takto: $p \Rightarrow d$, $d \vee t$, $\neg p \Rightarrow \neg t$. Situaci, kdy uvedené složené výroky jsou současně pravdivé, zapíšeme výrokovou formulí $(p \Rightarrow d) \wedge (d \vee t) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg t)$, jejíž pravdivostní ohodnocení je určeno v tabulce:

p	d	t	$\neg p$	$\neg t$	$p \Rightarrow d$	$d \vee t$	$\neg p \Rightarrow \neg t$	$(p \Rightarrow d) \wedge (d \vee t) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg t)$
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0

Z posledního sloupce tabulky je zřejmé, že výroková formule

$$(p \Rightarrow d) \wedge (d \vee t) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg t)$$

je pravdivá ve třech případech. Úloha má tedy tři řešení:

1. všechny tři stroje pracují současně,
2. pracuje první a druhý stroj, třetí stroj nepracuje,
3. pracuje jen druhý stroj.

1.2 Úvod do teorie množin

V matematice se při hlubším zkoumání výroků neobejdeme bez pojmu množina, který je jedním ze základních pojmů matematiky, jehož intuitivní pojetí je založené na představě souboru. V běžném jazyce používáme v konkrétních situacích místo pojmu množina jiných názvů, jako například hromada (brambor), skupina (lidí), stádo (ovcí), sbírka (známek) apod. **Množinu** charakterizujeme jako soubor (souhrn, skupinu) navzájem různých objektů, kdy u každého objektu nastane právě jedna ze dvou možností - buď do uvažovaného souboru patří, nebo nepatří. Poznamenejme, že uvedená formulace množiny není její definicí, je to pouze intuitivní popis pojmu množiny, který je pro účely školské matematiky dostačující.

Příklady množin:

- množina obyvatel České republiky,
- množina studentů 1. ročníku na Masarykově univerzitě v Brně v roce 2019,
- množina zvířat žijících na Měsíci,
- množina bodů na přímce,
- množina všech přirozených čísel.

Množiny budeme označovat velkými tiskacími písmeny, např. A, B, M, případně velkými psacími písmeny, např. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}\ldots$ Jednotlivé objekty, které do dané množiny patří, nazýváme **prvky množiny**. Značíme je zpravidla malými tiskacími písmeny, např. a, b, x, y.

Skutečnost, že objekt a patří do množiny A, zapisujeme $a \in A$.

Zápis $a \in A$ čteme: "prvek a je prvkem množiny A",
"prvek a náleží množině A",
"prvek a patří do množiny A,
"prvek a náleží do množiny A".

Skutečnost, že objekt b není prvkem množiny A, zapisujeme $b \notin A$.

Zápis $b \notin A$ čteme: "prvek b není prvkem množiny A",
"prvek b nenáleží množině A",
"prvek b nepatří do množiny A",
"prvek b nenáleží do množiny A".

Je patrné, že pro každou množinu A a pro každý objekt a nastane právě jedna z těchto dvou možností: buď $a \in A$, nebo $a \notin A$.

Množinu, která neobsahuje žádný prvek, nazýváme **prázdnou množinou** a značíme ji symbolem $\emptyset$ nebo $\{\}$. Množiny, které obsahují alespoň jeden prvek, nazýváme **neprázdné**.

Množina může být určena **výčtem prvků**, jestliže vyjmenujeme všechny její prvky. Pokud například množina A obsahuje prvky 1, 2, 3, 4, potom množinu A zapíšeme výčtem prvků $A = \{1, 2, 3, 4\}$, tj. do složených závorek vypíšeme všechny prvky, které množině A náleží. V tomto případě pak výrazy $1 \in A$, $3 \in A$ jsou pravdivé výroky, výraz $5 \notin A$

je výrok nepravdivý. Na tomto místě je užitečné přijmout dohodu, že každý prvek, který do množiny patří, budeme zapisovat do složených závorek právě jednou. Je zřejmé, že výčtem prvků můžeme určit jen konečné množiny.

Množina může být dále určena **charakteristickou vlastností**. Pro vymezení množiny pomocí charakteristické vlastnosti je třeba zavést pojem výrokové formy, se kterým budeme pracovat v následujícím odstavci 1.3. Poznamenejme, že problematikou množin se budeme podrobně zabývat v kapitole 1.4 a ke způsobu určení množiny charakteristickou vlastností se vrátíme v odstavci 1.4.1, kde si ho všimneme významněji.

1.3 Výrokové formy

Výroková forma $v(x)$ **jedné proměnné** x je výraz obsahující proměnnou x, ze kterého získáme po dosazení objektu za proměnnou x výrok.

Každé výrokové formě jedné proměnné x přiřazujeme dvě množiny, tzv. definiční obor výrokové formy a tzv. obor pravdivosti výrokové formy, které zavedeme v následujícím textu.

Definičním oborem výrokové formy $v(x)$ jedné proměnné x rozumíme množinu D, pro jejíž libovolný prvek po dosazení za proměnnou x dostaneme výrok.

Obor pravdivosti výrokové formy $v(x)$ jedné proměnné x rozumíme množinu P, pro jejíž libovolný prvek po dosazení za proměnnou x dostaneme pravdivý výrok.

Příklady výrokových forem jedné proměnné (v závorce je uveden jejich definiční obor):

- $v_1(x) : 2x - 7 < 5$ $(x \in \mathbb{Z})$,
- $v_2(x) : x^2 - 6x + 4 = 0$ $(x \in \mathbb{R})$,
- $v_3(y) : |y - 3| < 2$ $(y \in \mathbb{R})$,
- $v_4(x)$: Číslo x je dělitelné sedmi. $(x \in \mathbb{N})$,
- $v_5(z) : z \mid 18$ $(z \in \mathbb{N})$.

Výroková forma $v(x_1, x_2, ..., x_n)$ **více proměnných** $x_1, x_2, ..., x_n$ je výraz obsahující proměnné $x_1, x_2, ..., x_n$, ze kterého získáme po dosazení objektů za proměnné $x_1, x_2, ..., x_n$ výrok $(n \in \mathbb{N})$.

Příklady výrokových forem více proměnných (v závorce je uveden jejich definiční obor):

- $v_1(x, y) : 2x + 3y < 5$ $(x, y \in \mathbb{Z})$,
- $v_2(x, y) : x^2 + y^2 = 4$ $(x, y \in \mathbb{R})$,
- $v_3(x, y, z) : 4x + y - 3z = 4$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$,
- $v_4(x, y)$: Číslo x je dělitelné číslem y. $(x, y \in \mathbb{N})$.

Tabulka 1.3: Tabulka základních složených výrokových forem

Složená výroková forma	Název složené výrokové formy
$\neg p(x)$	negace výrokové formy
$p(x) \wedge q(x)$	konjunkce výrokových forem $p(x)$, $q(x)$
$p(x) \vee q(x)$	disjunkce výrokových forem $p(x)$, $q(x)$
$p(x) \veebar q(x)$	ostrá disjunkce výrokových forem $p(x)$, $q(x)$
$p(x) \Rightarrow q(x)$	implikace výrokových forem $p(x)$, $q(x)$
$p(x) \Leftrightarrow q(x)$	ekvivalence výrokových forem $p(x)$, $q(x)$

Příklad 1.14 Zapište všechny výroky, které získáte dosazením do výrokové formy za proměnnou x a rozhodněte o jejich pravdivosti:

a) $x + 7 < 10$, kde množina $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je definiční obor proměnné x,
b) $2x + 4 = 0$, kde množina $D = \{0, -1, -2\}$ je definiční obor proměnné x,
c) $3 \mid x$, kde množina $D = \{0, 1\}$ je definiční obor proměnné x,

Řešení: Dosazením prvků z definičního oboru za proměnnou x získáme výroky:
a) $1 + 7 < 10$; $2 + 7 < 10$. (pravdivé výroky)
$3 + 7 < 10$; $4 + 7 < 10$; $5 + 7 < 10$. (nepravdivé výroky)
b) $2 \cdot 0 + 4 = 0$; $2 \cdot (-1) + 4 = 0$. (nepravdivé výroky)
$2 \cdot (-2) + 4 = 0$. (pravdivý výrok)
c) $3 \mid 0$ (pravdivý výrok)
$3 \mid 1$ (nepravdivý výrok)

1.3.1 Složené výrokové formy

Z výrokových forem $p(x)$, $q(x)$, které mají stejný definiční obor D, je možno prostřednictvím logických spojek (obdobně jako u výroků) vytvářet **složené výrokové formy**. Základní složené výrokové formy jsou uvedeny v tabulce 1.3.

Příklad 1.15 Zapište

a) konjunkci výrokových forem $x \leq 5$, $x > 2$ s definičním oborem $\mathbb{R}$,
b) disjunkci výrokových forem $x \leq 1$, $x > 2$ s definičním oborem $\mathbb{R}$,
c) implikaci výrokových forem $6 \mid x$, $2 \mid x$ s definičním oborem $\mathbb{N}$.

Řešení:
a) $x \leq 5 \wedge x > 2$, kde $x \in \mathbb{R}$,
b) $x \leq 1 \vee x > 2$, kde $x \in \mathbb{R}$,
c) $6 \mid x \Rightarrow 2 \mid x$, kde $x \in \mathbb{N}$.

Příklad 1.16 Pokud to lze, utvořte tři pravdivé a tři nepravdivé výroky dosazením za proměnné x, y, z do zadané výrokové formy:

a) $3 - x = 10$, kde $x \in \mathbb{Z}$,
b) $2x + 3 < 7$, kde $x \in \mathbb{N}$,
c) $y = x - 5 \vee y = x + 5$, kde $x, y \in \mathbb{Z}$,
d) $x \mid y \Rightarrow y \mid z$, kde $x, y, z \in \mathbb{Z}$,
e) $(x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z$, kde $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Poznámka 1.7 Negováním výrokové formy $v(x)$ rozumíme vytvoření její negace $\neg v(x)$. Pravidla pro negace složených výrokových forem jsou uvedena v tabulce 1.4. Porovnejte tato pravidla s pravidly pro negování složených výroků, viz vztahy 1.7 - 1.11 z odstavce 1.1.2.

Příklad 1.17 Jsou dány výrokové formy

$v_1(x)$: $x > 5$, kde $x \in \mathbb{N}$,
$v_2(x)$: $7 \mid x$, kde $x \in \mathbb{N}$.

Zformulujte složené výrokové formy dle zadání a vyslovte jejich negace.

a) $v_1(x) \wedge v_2(x)$, b) $v_1(x) \vee v_2(x)$,
c) $v_1(x) \Rightarrow v_2(x)$, d) $v_1(x) \Leftrightarrow v_2(x)$.

Řešení:
a) $v_1(x) \wedge v_2(x)$: $x > 5 \wedge 7 \mid x$, b) $v_1(x) \vee v_2(x)$: $x > 5 \vee 7 \mid x$,
c) $v_1(x) \Rightarrow v_2(x)$: $x > 5 \Rightarrow 7 \mid x$, d) $v_1(x) \Leftrightarrow v_2(x)$: $x > 5 \Leftrightarrow 7 \mid x$.

V dalším kroku určíme negace výrokových forem $v_1(x)$, $v_2(x)$:

$\neg v_1(x)$: $x \leq 5$, kde $x \in \mathbb{N}$,
$\neg v_2(x)$: $7 \nmid x$, kde $x \in \mathbb{N}$.

Negace složených výrokových forem určíme dle tabulky 1.4, přičemž

a) $\neg v_1(x) \vee \neg v_2(x)$: $x \leq 5 \vee 7 \nmid x$, b) $\neg v_1(x) \wedge \neg v_2(x)$: $x \leq 5 \wedge 7 \nmid x$,
c) $v_1(x) \wedge \neg v_2(x)$: $x > 5 \wedge 7 \nmid x$, d) $v_1(x) \veebar v_2(x)$: $x > 5 \veebar 7 \mid x$.

1.3.2 Kvantifikátory, kvantifikované výroky

V předchozím textu jsme se zabývali výrokovými formami. Víme, že samotná výroková forma nemá pravdivostní hodnotu. Pokud však dosazujeme do výrokové formy za proměnnou x (případně za proměnné $x_1, x_2, , ..., x_n$) prvky z jejího definičního oboru, dostáváme výrok.
Výroky lze však získat z výrokové formy i jiným způsobem, který si vysvětlíme na příkladu 1.18.

Tabulka 1.4: Negace složených výrokových forem

Negace složené výrokové formy	Logicky ekvivalentní výroková forma
$\neg(p(x) \wedge q(x))$	$\neg p(x) \vee \neg q(x)$
$\neg(p(x) \vee q(x))$	$\neg p(x) \wedge \neg q(x)$
$\neg(p(x) \veebar q(x))$	$p(x) \Leftrightarrow q(x)$
$\neg(p(x) \Rightarrow q(x))$	$p(x) \wedge \neg q(x)$
$\neg(p(x) \Leftrightarrow q(x))$	$p(x) \veebar q(x)$

Příklad 1.18 *a*) Uvažujme výrokovou formu

$$v_1(x) : x^2 \geq 0, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}.$$

Definičním oborem výrokové formy $v_1(x)$ je množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$. Pokud ve výrokové formě $v_1(x)$ dosadíme za x libovolné reálné číslo, dostaneme vždy pravdivý výrok, který můžeme zformulovat několika způsoby:

- Pro každé reálné číslo x platí $v_1(x)$.
- Pro všechna reálná čísla x platí $v_1(x)$.
- Pro libovolné reálné číslo x platí $v_1(x)$.

Symbolický zápis všech těchto výroků je:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0. \tag{1.17}$$

Symbol $\forall$ v zápise 1.17 nazýváme **obecný kvantifikátor**.
Uvažujeme-li výrokovou formu $v_1(x)$ a množinu D její definiční obor, pak výrok

$$\forall x \in D : v_1(x)$$

nazýváme **obecný výrok**. Výrok 1.17 je příkladem obecného výroku.

b) Uvažujme výrokovou formu

$$v_2(x) : x^2 + 1 = (x+1)^2, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}.$$

Definičním oborem výrokové formy $v_2(x)$ je množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$. Rovnost $x^2 + 1 = (x+1)^2$ zřejmě neplatí pro všechna reálná čísla x. Jestliže do výrokové formy $v_2(x)$ dosadíme za proměnnou x například číslo 1, dostaneme nepravdivý výrok. Ale zřejmě existuje reálné číslo, které po dosazení za x vytvoří z výrokové formy $v_2(x)$ výrok pravdivý. Stačí položit $x = 0$. Tuto skutečnost můžeme opět zformulovat několika způsoby:

Tabulka 1.5: Základní kvantifikátory

Základní kvantifikátor	Označení	Jazykový význam
Obecný kvantifikátor	$\forall$	pro každé, pro všechny
Existenční kvantifikátor	$\exists$	existuje (alespoň jeden)
Kvantifikátor jednoznačné existence	$\exists!$	existuje právě jeden, pro právě jedno

- Existuje reálné číslo x, pro které platí $v_2(x)$.
- Existuje alespoň jedno reálné číslo x, pro které platí $v_2(x)$.
- Alespoň pro jedno reálné číslo x platí $v_2(x)$.

Symbolický zápis všech těchto výroků je:

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = (x+1)^2. \tag{1.18}$$

Symbol $\exists$ v zápise 1.18 nazýváme **existenční kvantifikátor**.
Uvažujeme-li výrokovou formu $v_2(x)$ a množinu D její definiční obor, pak výrok

$$\exists x \in D : v_2(x)$$

nazýváme **existenční výrok**. Výrok 1.18 je příkladem existenčního výroku.

Obecný a existenční výrok, který jsme získali v příkladu 1.18, jsou tzv. **kvantifikované výroky** (obsahují ve své formulaci kvantifikátory). Každý kvantifikovaný výrok získáme tzv. **kvantifikací** nějaké výrokové formy tak, že předřadíme kvantifikátor její proměnné x (případně kvantifikátory všem jejím proměnným $x_1, x_2, , ..., x_n$). Jednoduché kvantifikované výroky, s nimiž budeme v dalším textu pracovat, získáme kvantifikací jednoduché výrokové formy jedné proměnné jedním kvantifikátorem.

Nejčastěji užívané kvantifikátory čteme prostřednictvím těchto jazykových výrazů: *každý*, *alespoň jeden*, *žádný*, *právě jeden*, *nejvýše jeden*, *všichni*, apod. Základní kvantifikátory jsou uvedeny v tabulce 1.5.

Základní kvantifikované výroky, které vzniknou kvantifikací jednoduché výrokové formy $v(x)$ proměnné $x \in D$ právě jedním ze základních kvantifikátorů, uvádí tabulka 1.6.

Příklad 1.19 Zapište symbolicky (užitím kvantifikátorů) následující obecné, resp. existenční výroky a rozhodněte, zda jsou pravdivé, či nepravdivé:

a) Pro každé reálné číslo x platí $x^2 - 4x + 7 > 0$.
b) Existuje reálné číslo x, pro které platí $|x| = 0$.
c) Existuje reálné číslo x, pro které platí $x^2 = -2$.

Tabulka 1.6: Základní kvantifikované výroky

Název kvantifikovaného výroku	Symbolický zápis	Slovní vyjádření
Obecný výrok	$\forall x \in D : v(x)$	Pro každé $x \in D$ platí $v(x)$.
Existenční výrok	$\exists x \in D : v(x)$	Existuje alespoň jedno $x \in D$, pro které platí $v(x)$.
Výrok o jednoznačné existenci	$\exists! x \in D : v(x)$	Existuje právě jedno $x \in D$, pro které platí $v(x)$.

Řešení:
a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 7 > 0.$ (pravdivý výrok)
b) $\exists x \in \mathbb{R} : |x| = 0.$ (pravdivý výrok)
c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -2.$ (nepravdivý výrok)

Příklad 1.20 Přečtěte a zapište slovy symbolický zápis obecných a existenčních výroků a rozhodněte o jejich pravdivosti:

a) $\forall x \in \mathbb{N} : x > 7.$
b) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| > 0.$
c) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 < 1.$
d) $\exists x \in A : x < -1$, kde $A = \{7, 8, -3\}$.

Řešení:
a) Pro každé přirozené číslo x platí, že x je větší než 7. (nepravdivý výrok)
b) Pro každé reálné číslo x platí, že absolutní hodnota z x je větší než 0. (nepravdivý výrok)
c) Existuje celé číslo x, jehož druhá mocnina je menší než 1. (pravdivý výrok)
d) Existuje číslo x z množiny A takové, že x je menší než -1. (pravdivý výrok)

Příklad 1.21 Rozhodněte o pravdivosti, resp. nepravdivosti kvantifikovaného výroku:

a) $\forall x \in \mathbb{N} : |x| = x$, b) $\exists x \in \mathbb{N} : x \notin \mathbb{R}$, c) $\exists x \in \mathbb{Q} : x \notin \mathbb{N}$,
d) $\exists y \in \mathbb{N} : y \notin \mathbb{Z}$, e) $\exists x \in \mathbb{Z} : x \leq 0$, f) $\forall y \in \mathbb{N} : 2 \not| \, y$.

Řešení: Výroky a), c), e) jsou pravdivé. Výroky b), d), f) jsou nepravdivé.

V dalším textu se budeme zabývat pravidly pro negace jednoduchých kvantifikovaných výroků s jedním kvantifikátorem, která jsou shrnuta v tabulce 1.7. Tato pravidla lze slovy popsat následujícím způsobem:

1) V negovaném kvantifikovaném výroku zaměníme každý kvantifikátor $\forall$ obecného výroku existenčním kvantifikátorem $\exists$ a naopak každý kvantifikátor $\exists$ existenčního výroku obecným kvantifikátorem $\forall$.

2) Výrokovou formu v negovaném kvantifikovaném výroku nahradíme její negací.

Tabulka 1.7: Obecný a existenční kvantifikovaný výrok a jeho negace

Kvantifikovaný výrok	Jeho negace
Obecný výrok $\forall x \in D : v(x)$	Existenční výrok $\exists x \in D : \neg v(x)$
Existenční výrok $\exists x \in D : v(x)$	Obecný výrok $\forall x \in D : v(x)$

Příklad 1.22 Zformulujte negace jednoduchých kvantifikovaných výroků dle tabulky 1.7:

a) Každé přirozené číslo je sudé.
b) Přišel alespoň jeden člověk.
c) Všichni moji spolužáci odmaturovali.
d) Žádná dívka z naší třídy nezpívá.
e) Nikdo nepřijel vlakem.
f) Někdo je za dveřmi.

Řešení:
a) Alespoň jedno přirozené číslo není sudé.
b) Žádný člověk nepřišel.
c) Alespoň jeden z mých spolužáků neodmaturoval.
d) Alespoň jedna dívka z naší třídy zpívá.
e) Někdo přijel vlakem.
f) Nikdo za dveřmi není.

Příklad 1.23 Zformulujte negace jednoduchých kvantifikovaných výroků z příkladu 1.19, zapište je symbolicky a rozhodněte o jejich pravdivosti.
Řešení:
a) Existuje alespoň jedno reálné číslo x, pro které neplatí $x^2 - 4x + 7 > 0$.
symbolický zápis: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 7 \leq 0$ (nepravdivý výrok)
b) Pro všechna reálná čísla x neplatí $|x| = 0$.
symbolický zápis: $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \neq 0$ (nepravdivý výrok)
c) Pro všechna reálná čísla x neplatí $x^2 = -2$.
symbolický zápis: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -2$ (pravdivý výrok)

Příklad 1.24 Zformulujte negace jednoduchých kvantifikovaných výroků z příkladu 1.21. Porovnejte pravdivostní hodnoty těchto negací s pravdivostními hodnotami původních výroků.

Řešení:
a) $\exists x \in \mathbb{N} : |x| \neq x$, b) $\forall x \in \mathbb{N} : x \in \mathbb{R}$, c) $\forall x \in \mathbb{Q} : x \in \mathbb{N}$,
d) $\forall y \in \mathbb{N} : y \in \mathbb{Z}$, e) $\forall x \in \mathbb{Z} : x > 0$, f) $\exists y \in \mathbb{N} : 2 \mid y$.

Výroky b), d), f) jsou pravdivé. Výroky a), c), e) jsou nepravdivé.

Tabulka 1.8: Negace složených kvantifikovaných výroků

Složený obecný výrok	Jeho negace	Složený existenční výrok	Jeho negace
$\forall x \in D : p(x) \wedge q(x)$	$\exists x \in D : \neg p(x) \vee \neg q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \wedge q(x)$	$\forall x \in D : \neg p(x) \vee \neg q(x)$
$\forall x \in D : p(x) \vee q(x)$	$\exists x \in D : \neg p(x) \wedge \neg q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \vee q(x)$	$\forall x \in D : \neg p(x) \wedge \neg q(x)$
$\forall x \in D : p(x) \veebar q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \Leftrightarrow q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \veebar q(x)$	$\forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow q(x)$
$\forall x \in D : p(x) \Rightarrow q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \wedge \neg q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \Rightarrow q(x)$	$\forall x \in D : p(x) \wedge \neg q(x)$
$\forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \veebar q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \Leftrightarrow q(x)$	$\forall x \in D : p(x) \veebar q(x)$

Kvantifikované výroky se složenou výrokovou formou se negují kombinací pravidel pro negování jednoduchých kvantifikovaných výroků s pravidly pro negování složených výrokových forem viz tabulka 1.8.

Příklad 1.25 S využitím tabulky 1.8 negujte složené kvantifikované výroky, zapište je symbolicky a zjistěte, zda jsou pravdivé či nepravdivé.

a) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > 9 \ \wedge \ x < -5.$
b) $\exists x \in \mathbb{N} : x \neq 4 \ \vee \ x \mid 8.$
c) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = -2 \ \vee \ |x| > 0.$
d) $\forall x \in \mathbb{N} : x \mid 2 \ \wedge \ x \mid 3.$

Řešení:
a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 9 \ \vee \ x \geq -5.$ (nepravdivý výrok)
b) $\forall x \in \mathbb{N} : x = 4 \ \wedge \ x \nmid 8.$ (nepravdivý výrok)
c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -2 \ \wedge \ |x| \leq 0.$ (pravdivý výrok)
d) $\exists x \in \mathbb{N} : x \nmid 2 \ \vee \ x \nmid 3.$ (pravdivý výrok)

1.3.3 Úlohy k procvičení

1. Určete, které ze zadaných sdělení jsou, resp. nejsou výroky případně hypotézy. V případě výroků stanovte jejich pravdivostní hodnotu.

a) Vstupte!
b) $4 + 7 < 2$
c) Číslo 7 je prvočíslo.
d) Číslo 29 není prvočíslo.
e) Dnes je 23. srpna.
f) $3 + x = 7$
g) Venku svítí sluníčko.
h) V zimě pojedeme na hory.
i) Bůh existuje.
j) Matematická olympiáda.
k) Pro každé reálné číslo x platí $x^2 > 0$.
l) Existuje alespoň jedno reálné číslo x, pro které neplatí $x^2 > 0$.
m) $a + b - 3$

2. Vezměte libovolný psaný text z časopisu nebo novin a vyberte z něj věty, které

a) jsou výroky, b) nejsou výroky.

3. Žáci prvního stupně základní školy pronáší při vyučování v matematice různé výroky. Nahlédněte do příslušných učebních textů a tvořte a zapište výroky, k jejichž vyslovení je žák veden. Uveďte pravdivé výroky, které žák vyslovuje, když odpovídá správně. Uveďte i nepravdivé výroky, které žák vyslovuje, když odpovídá chybně.

4. Je dána dvojice výroků p, q, z nichž jeden je pravdivý a druhý nepravdivý:

p: $2^2 \neq 4$ (nepravdivý výrok), q: $8 < 9$ (pravdivý výrok).

Utvořte složené výroky $\neg p$, $\neg q$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ a rozhodněte s využitím tabulky pravdivostních hodnot 1.2, které z nich jsou pravdivé a které nepravdivé.

5. Zapište symbolicky zadané výroky. Stručně zformulujte jejich negace a zapište je symbolicky.

a) Mrzne, ale nefouká.
b) Nemrzne ani nefouká.
c) Jetliže fouká, nemrzne.
d) Nemrzne nebo fouká.
e) Fouká jen tehdy, když nemrzne.
f) Buď nefouká, nebo mrzne.

6. Zapište symbolicky následující výroky:

a) Koupím limonádu, zmrzlinu a jahody.
b) Když koupím limonádu, nekoupím zmrzlinu ani jahody.
c) Koupím limonádu nebo jahody jen tehdy, když nekoupím zmrzlinu.

7. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

a) Jestliže $8 - 2 = 5$, potom $8 > 10$.
b) Jestliže $8 - 2 = 5$, potom $5 + 6 = 11$.
c) Jestliže $8 - 2 = 6$, potom $5 \cdot 6 = 15$.
d) Jestliže číslo 756 je dělitelné číslem 12, pak číslo 2331 je dělitelné číslem 33.
e) Číslo 1764 je dělitelné číslem 18 právě tehdy, když číslo 105 je dělitelné číslem 7.
f) $8 > 10 \;\Leftrightarrow\; -5 < -10$
g) $8 + 5 = 13 \;\Leftrightarrow\; 5 \cdot 6 = 11$

8. Nechť p, q, r, s jsou čtyři výroky, z nichž výroky p, q jsou pravdivé a výroky r, s jsou nepravdivé. Rozhodněte o pravdivostní hodnotě následujících složených výroků:

a) $p \vee r$, b) $p \Rightarrow r$, c) $r \Rightarrow p$, d) $s \Leftrightarrow q$,
e) $s \Rightarrow q$, f) $\neg q$, g) $\neg p$, h) $(p \vee r) \Rightarrow q$,
i) $\neg p \vee \neg q$, j) $(p \vee q) \wedge r$, k) $s \Rightarrow (p \wedge q)$, l) $(r \vee s) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

9. Proveďte pravdivostní vyhodnocení následujících výrokových formulí a rozhodněte o typu výrokové formule, kde p, q, r, s, t, u jsou výrokové proměnné:

a) $\neg(p \vee \neg p)$,
b) $\neg(p \wedge \neg p)$,
c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$,
d) $[s \Rightarrow (t \wedge u)] \Leftrightarrow [(s \Rightarrow t) \wedge (s \Rightarrow u)]$,
e) $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$

10. Ověřte, že jsou logicky ekvivalentní tyto dvojice výrokových formulí:

a) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ a $p \veebar q$,
b) $\neg p \vee q$ a $p \Rightarrow q$,
c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ a $p \Leftrightarrow q$.

11. Určete, kolik řádků má tabulka pravdivostních hodnot pro výrokovou formuli, v níž se vyskytuje n výrokových proměnných, kde:

a) $n = 1$, b) $n = 2$, c) $n = 3$, d) $n = 4$.

12. Odpovědi pěti osob A, B, C, D, E pozvaných na slavnostní hostinu lze vyjádřit v jazyce logiky takto:

a) Přijde A a přijde B.
b) Přijde B nebo přijde C.
c) Jestliže přijde C, přijde D.
d) E přijde právě tehdy, když přijde C.

Rozhodněte, který z výroků je pravdivý, když se z pěti pozvaných osob žádná nedostavila na hostinu.

13. Zapište symbolicky výrok: ”Pojedu do Londýna autobusem nebo letadlem a jestliže v Londýně zůstanu celý víkend, ubytuji se v hotelu.”

14. V okamžiku, kdy na chodbě dohlížející učitel uslyšel řinčení skla, byli ve třídě žáci A, B, C. Při vyšetřování se zjistilo, že u okna byl nejvýše jeden z žáků A, B. Žák C byl u okna právě, když tam nebyl žák A. Když B nebyl u okna, nebyl tam ani A. Lze určit pachatele v případě, že byl jen jeden?

15. Jsou dány následující výroky:

p: Nejsem lyžař nebo nejsem triatlonista.
q: Jestliže nejsem lyžař, jsem triatlonista.

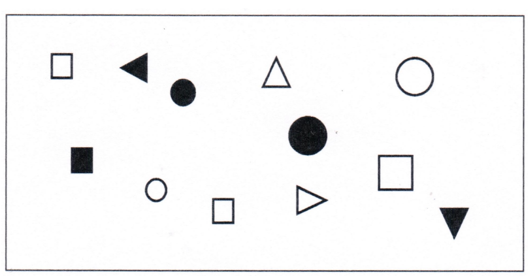
Z následujících možností vyberte výrok, který je ekvivaletní s výrokem p a výrok, který je ekvivalentní s výrokem q:

v_1: Jestliže jsem lyžař, pak nejsem triatlonista.
v_2: Jestliže nejsem triatlonista, pak nejsem lyžař.
v_3: Jsem triatlonista nebo jsem lyžař.

16. Je dán výrok
r: Jestliže mám auto, jedu k babičce.
Ze zadaných výroků vyberte takový, jenž má stejnou pravdivostní hodnotu jako výrok r:

a) Jedu k babičce nebo nemám auto.
b) Jestliže nemám auto, nejedu k babičce.
c) Jestliže jedu k babičce, pak mám auto.
d) Jestliže nejedu k babičce, pak nemám auto.
e) Nemám auto nebo jedu k babičce.

17. Vyberte každý obrazec na obrázku 1.1, který vyhovuje následujícím podmínkám:



Obr. 1.1:

a) Obrazec je kruh nebo je černý.
b) Obrazec je kruh a je černý.
c) Není pravdivé tvrzení, že obrazec je kruh a je černý.
d) Obrazec není kruh a není černý.
e) Není pravdivé tvrzení, že obrazec je kruh nebo je černý.
f) Obrazec je kruh a není černý.
g) Obrazec je kruh právě tehdy, když je černý.

18. Zapište symbolicky tyto výroky, rozhodněte o jejich pravdivosti a vytvořte jejich negace:

a) p: Pro každé reálné číslo a platí $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$.
b) q: Existuje reálné číslo b takové, že platí $(b+1)^3 = b^3 + 1$.
c) r: Pro každé reálné číslo x platí $\sqrt{x^2} = |x|$.
d) s: Existuje takové reálné číslo y, pro které platí $y^2 - 6y + 15 = 0$.
e) t: Existuje takové reálné číslo z, pro které platí $z^2 + 4 = 0$.

19. Zapište symbolicky tyto výroky a rozhodněte o jejich pravdivosti:

p: Některá přirozená čísla jsou větší než 10^{30}.
q: Je možné určit racionální číslo větší než $\frac{1}{102}$ a menší než $\frac{1}{101}$.
r: Je možné určit racionální číslo větší než $\frac{1}{101}$ a menší než $\frac{1}{102}$.
s: Pro libovolné reálné číslo z je $z^2 - 10z + 100 > 0$.
t: Nerovnici $x^2 - 20x + 120 < 0$ nevyhovuje žádné reálné číslo.

20. Rozhodněte o pravdivosti obecného a existenčního výroku a utvořte jeho negaci. Potom výrok a jeho negaci zapište pomocí kvantifikátorů:

a) p: Existuje alespoň jedno reálné číslo a, pro které platí $a^2 = 3$.
b) q: Pro každé celé číslo b platí $3b + 1 > b$.
c) r: Pro každý trojúhelník ABC platí, že součet kterýchkoli dvou vnitřních úhlů je větší než úhel pravý.

21. Rozhodněte o pravdivosti, resp. nepravdivosti kvantifikovaného výroku:

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -1$, b) $\forall z \in \mathbb{Z} : |z| = z$,
c) $\exists x \in \mathbb{Q} : x \in \mathbb{N}$, d) $\forall x \in \mathbb{N} : x \in \mathbb{Z}$,
e) $\forall y \in \mathbb{Z} : y > 0$, f) $\exists x \in \mathbb{N} : 2 \mid x$.

22. Zformulujte negace jednoduchých kvantifikovaných výroků z předchozího příkladu. Porovnejte pravdivostní hodnoty těchto negací s pravdivostními hodnotami původních výroků.

a) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$, b) $\exists z \in \mathbb{Z} : |z| \neq z$,
c) $\forall x \in \mathbb{Q} : x \notin \mathbb{N}$, d) $\exists x \in \mathbb{N} : x \notin \mathbb{Z}$,
e) $\exists y \in \mathbb{Z} : y \leq 0$, f) $\forall x \in \mathbb{N} : 2 \nmid x$.

23. Ve věštírně seděli tři bohové, kteří odpovídali na otázky: **Pravda** (mluví vždy pravdu), **Lež** (vždy lže) a **Moudrost** (někdy mluví pravdu a někdy lže). Do věštírny přišel filozof, aby zjistil, jak sedí bohové vedle sebe (podle vzhledu to nepoznal). Filozof se zeptal toho vlevo: "Který vedle tebe sedí?" a dostal odpověď "Pravda". Pak se zeptal toho prostředního: "Kdo jsi?" a dostal odpověď "Moudrost". Nakonec se obrátil k pravému: "Který sedí vedle tebe?" a odpověď zněla: "Lež". Jak z těchto odpovědí filozof uhodl pořadí bohů?

Výsledky:

1. pravdivé výroky: c), l),
nepravdivé výroky: b), d), k),
výroky, jejichž pravdivostní hodnota je časově nebo místně podmíněna: e), g),
hypotézy: h), i),
jazykové výrazy, které nejsou výroky: a), f) (výroková forma), j), m).

4. $\neg p$: $2^2 = 4$ (pravdivý výrok),
$\neg q$: $8 \geq 9$ (nepravdivý výrok),
$p \wedge q$: $(2^2 \neq 4) \wedge (8 < 9)$ (nepravdivý výrok),
$p \vee q$: $(2^2 \neq 4) \vee (8 < 9)$ (pravdivý výrok),
$p \veebar q$: $(2^2 \neq 4) \veebar (8 < 9)$ (pravdivý výrok),
$p \Rightarrow q$: $(2^2 \neq 4) \Rightarrow (8 < 9)$ (pravdivý výrok),
$p \Leftrightarrow q$: $(2^2 \neq 4) \Leftrightarrow (8 < 9)$ (nepravdivý výrok).

5. Označme výroky

m: Mrzne. f: Fouká.

Zadané výroky zapsané symbolicky:

a) $m \wedge \neg f$ b) $\neg m \wedge \neg f$ c) $f \Rightarrow \neg m$
d) $\neg m \vee f$ e) $f \Leftrightarrow \neg m$ f) $\neg f \veebar m$

Negace složených výroků zapsané symbolicky a jejich slovní formulace:

a) $\neg m \vee f$: Nemrzne nebo fouká.
b) $m \vee f$: Mrzne nebo fouká.
c) $f \wedge m$: Fouká a mrzne.
d) $m \wedge \neg f$: Mrzne a nefouká.
e) $f \veebar \neg m$: Buď fouká, nebo nemrzne.
f) $\neg f \Leftrightarrow m$: Nefouká jen tehdy, když mrzne.

6. Označme výroky:
l: Koupím limonádu. z: Koupím zmrzlinu. j: Koupím jahody.

Zadané výroky zapsané symbolicky:

a) $m \wedge z \wedge j$ b) $l \Rightarrow (\neg z \wedge \neg j)$ c) $(l \vee j) \Leftrightarrow \neg z$

7. Výroky a), b), e), f) jsou pravdivé; výroky c), d), g) jsou nepravdivé.

8. Složené výroky a), c), e), h), k), l) jsou pravdivé; složené výroky b), d), f), g), i), j) jsou nepravdivé.

9. Tautologie jsou výrokové formule b), c), d) . Kontradikce jsou výrokové formule a), e).

10. a) Z tabulky pravdivostních hodnot je patrné, že výrokové formule $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ a $p \veebar q$ jsou logicky ekvivalentní.

$(p$	$\wedge$	$\neg q)$	$\vee$	$(\neg p$	$\wedge$	$q)$	p	$\veebar$	q
1	0	0	0	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0

b) Z tabulky pravdivostních hodnot je patrné, že výrokové formule $\neg p \vee q$ a $p \Rightarrow q$ jsou logicky ekvivalentní.

$\neg p$	$\vee$	q	p	$\Rightarrow$	q
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0

c) Z tabulky pravdivostních hodnot je patrné, že výrokové formule $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ a $p \Leftrightarrow q$ jsou logicky ekvivalentní.

$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\Rightarrow$	$p)$	p	$\Leftrightarrow$	q
1	1	1	1		1		1	1	1
1	0	0	0		1		1	0	0
0	1	1	0		0		0	0	1
0	1	0	1		1		1	1	0

11. a) 2 řádky, b) 4 řádky, c) 8 řádků, d) 16 řádků.

12. Pravdivé jsou výroky c), d).

13. Označme výroky:

a: Pojedu autobusem. l: Pojedu letadlem.
z: V Londýně zůstanu celý týden. h: Ubytuji se v hotelu.

Zadaný složený výrok zapíšeme symbolicky: $(a \vee l) \wedge (z \Rightarrow h)$.

14. Ověříme výrokovou formuli $D : (\neg A \vee \neg B) \wedge (C \Leftrightarrow \neg A) \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)$, viz tabulka:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$C \Leftrightarrow \neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	D
1	1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0

Z tabulky pravdivostních hodnot je zřejmé, že složený výrok D je pravdivý pouze v případě, kdy okno rozbil žák C.

15. Označme výroky:

l: Jsem lyžař. t: Jsem triatlonista.

S tímto označením pak získáváme složené výroky

p: $\neg l \vee \neg t$, q: $\neg l \Rightarrow t$,
v_1: $l \Rightarrow \neg t$, v_2: $\neg t \Rightarrow \neg l$, v_3: $t \vee l$.

jejichž pravdivostní hodnoty zapíšeme do tabulky:

l	t	$\neg l$	$\neg t$	p	q	v_1	v_2	v_3
1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	0

Z tabulky pravdivostních hodnot je zřejmé, že výroky p, v_1 a q, v_3 jsou ekvivalentní.

16. Označme výroky:

p: Mám auto.
q: Jedu k babičce.
r: Jestliže mám auto, jedu k babičce.

Pro toto označení jsou zadané složené výroky zapsané symbolicky následující:

a) $q \vee \neg p$: Jedu k babičce nebo nemám auto.
b) $\neg p \Rightarrow \neg q$: Jestliže nemám auto, nejedu k babičce.
c) $q \Rightarrow p$: Jestliže jedu k babičce, pak mám auto.
d) $\neg q \Rightarrow \neg p$: Jestliže nejedu k babičce, pak nemám auto.
e) $\neg p \vee q$: Nemám auto nebo jedu k babičce.

Výrok r je zapsán symbolicky $p \Rightarrow q$. Provedeme pravdivostní ohodnocení zadaných složených výroků pomocí tabulky pravdivostních hodnot:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$q \vee \neg p$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$q \Rightarrow p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$\neg p \vee q$
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Z tabulky pravdivostních hodnot je zřejmé, že výroky a), d), e) jsou logicky ekvivalentní se zadaným výrokem r.

17. a) 7 obrazců (všechny černé obrazce a dva kruhy, které nejsou černé).

b) 2 obrazce (dva černé kruhy).

c) 10 obrazců (všechny obrazce mimo dvou černých kruhů).

d) 5 obrazců.

e) 5 obrazců.

f) 2 obrazce (všechny kruhy, které nejsou černé).

g) 7 obrazců (dva černé kruhy a pět obrazců, co nejsou černé a nejsou kruhy).

18. a) p : $\forall a \in \mathbb{R} : (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$. (pravdivý výrok)
$\neg p$: $\exists a \in \mathbb{R} : (a+1)^2 \neq a^2 + 2a + 1$. (nepravdivý výrok)
$\neg p$: Existuje reálné číslo a, pro které neplatí $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$.

b) q : $\exists b \in \mathbb{R} : (b+1)^3 = b^3 + 1$. (pravdivý výrok; $b = 0$)
$\neg q$: $\forall b \in \mathbb{R} : (b+1)^3 \neq b^3 + 1$. (nepravdivý výrok)
$\neg q$: Pro všechna reálná čísla b platí $(b+1)^3 \neq b^3 + 1$.

c) r : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$. (pravdivý výrok)
$\neg r$: $\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} \neq |x|$. (nepravdivý výrok)
$\neg r$: Existuje reálné číslo x, pro které neplatí $\sqrt{x^2} = |x|$.

d) s : $\exists y \in \mathbb{R} : y^2 - 6y + 15 = 0$. (pravdivý výrok: $y_1 = 5$, $y_2 = 3$)
$\neg s$: $\forall y \in \mathbb{R} : y^2 - 6y + 15 \neq 0$. (nepravdivý výrok)
$\neg s$: Pro všechna reálná čísla y platí $y^2 - 6y + 15 \neq 0$.

e) t : $\exists z \in \mathbb{R} : z^2 + 4 = 0$. (nepravdivý výrok)
$\neg t$: $\forall z \in \mathbb{R} : z^2 + 4 \neq 0$. (pravdivý výrok)
$\neg t$: Pro všechna reálná čísla z platí $z^2 - 6z + 15 \neq 0$.

19. p: $\exists n \in \mathbb{N} : n > 30$. (pravdivý výrok)
q: $\exists x \in \mathbb{Q} : x > \frac{1}{102} \wedge x < \frac{1}{101}$. (pravdivý výrok)
r: $\exists x \in \mathbb{Q} : x < \frac{1}{102} \wedge x > \frac{1}{101}$. (nepravdivý výrok)
s: $\forall z \in \mathbb{R} : z^2 - 10z + 100 > 0$. (pravdivý výrok)
t: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 20x + 120 \geq 0$. (pravdivý výrok)

20. a) p : $\exists a \in \mathbb{R} : a^2 = 3$. (pravdivý výrok)

$\neg p$: Pro všechna reálná čísla a platí, že $a^2 \neq 3$.

$\neg p$: $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 \neq 3$. (nepravdivý výrok)

b) q : $\forall b \in \mathbb{Z} : 3b + 1 > b$. (nepravdivý výrok)

$\neg q$: Existuje celé číslo b, pro které platí $3b + 1 \leq b$.

$\neg q$: $\exists b \in \mathbb{Z} : 3b + 1 \leq b$. (pravdivý výrok)

c) Označme T množinu všech trojúhelníků a R pravý úhel.

r : $\forall \triangle ABC \in T : (\angle ABC + \angle BCA > R) \wedge (\angle ABC + \angle CAB > R) \wedge (\angle BCA + \angle CAB > R)$ (nepravdivý výrok)

$\neg r$: Existuje trojúhelník ABC, pro který platí, že součet některých jeho dvou vnitřích úhlů je menší nebo roven úhlu pravému.

$\neg r$: $\exists \triangle ABC \in T : (\angle ABC + \angle BCA \leq R) \vee (\angle ABC + \angle CAB \leq R) \vee (\angle BCA + \angle CAB \leq R)$. (pravdivý výrok)

21. Výroky a), c), d), f) jsou pravdivé. Výroky b), e) jsou nepravdivé.

22. Výroky b), e) jsou pravdivé. Výroky a), c), d), f) jsou nepravdivé.

23. Zleva seděli bohové v tomto pořadí: Moudrost, Lež, Pravda.

1.4 Množiny

S pojmem množiny jste se seznámili v souvislosti se zavedením výrokové formy v kapitole 1.2, ze které připomeneme a shrneme základní poznatky o množinách do několika kroků:

- množinu chararakterizujeme jako soubor navzájem různých objektů, kdy pro každý objekt platí, že buď do uvažovaného souboru patří, nebo nepatří,
- množiny označujeme velkými tiskacími písmeny, např. A, B, M, X, případně velkými psacími písmeny, např. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}$,...
- objekty, které do dané množiny patří, nazýváme **prvky množiny** a značíme je zpravidla malými tiskacími písmeny, např. a, b, x, y,
- skutečnost, že objekt a je prvkem množiny A, zapisujeme $a \in A$,
- skutečnost, že objekt b není prvkem množiny A, zapisujeme $b \notin A$,
- množinu, která neobsahuje žádný prvek, nazýváme **prázdnou množinou** a značíme ji symbolem $\emptyset$ nebo $\{\}$,
- množiny, které obsahují alespoň jeden prvek, nazýváme **neprázdné**.

Následující text se bude podrobněji věnovat samotné problematice množin.

1.4.1 Základní způsoby určení množiny

Pro jednoznačné určení množiny využíváme dva základní způsoby:

1. Výčtem prvků, tj. vyjmenováním všech prvků množiny (takto lze zadat pouze množinu s nepříliš mnoha prvky). Zadání množiny M výčtem jejích n prvků x_1, x_2,..., x_n zapisujeme následujícím způsobem:

$$M = \{x_1, x_2, ..., x_n\}. \tag{1.19}$$

Pokud například množina A obsahuje prvky 1, 2, 3, 4, potom množinu A zapíšeme výčtem prvků $A = \{1, 2, 3, 4\}$, přičemž výrazy $1 \in A$, $3 \in A$ jsou pravdivé výroky, výraz $5 \notin A$ je výrok nepravdivý. Při určení množiny výčtem prvků přijímáme dohodu, že každý prvek, který do množiny patří, zapisujeme do složených závorek právě jednou, tj. nepřipouštíme zápis typu $\{1, 2, 2, 4, 3, 4\}$ nebo $\{1, 1, 4, 4, 2, 3, 4\}$ pro množinu A.

2. Pomocí **charakteristické vlastnosti** prvků množiny, tj. takové vlastnosti, kterou mají jen prvky této množiny. Zadání množiny M charakteristickou vlastností $v(x)$ jejích prvků x zapisujeme symbolicky následujícím způsobem:

$$M = \{x \in U; v(x)\}, \tag{1.20}$$

kde U je tzv. **základní množina**, ze které vybíráme prvky množiny M. Symbolický zápis 1.20 pak čteme:

"M je množina *všech* prvků x ze základní množiny U, pro které platí $v(x)$."

Vzhledem k problematice, které jsme se věnovali v odstavci 1.3, můžeme konstatovat, že výraz $v(x)$ je výroková forma jedné proměnné x, základní množina U je její definiční obor a množina M je pak obor pravdivosti výrokové formy $v(x)$.

Například symbolický zápis množiny

$$A = \{x \in \mathbb{N}; x < 7\}$$

dané charakteristickou vlastností čteme: "A je množina všech přirozených čísel, která jsou menší než 7". Množina A je zde obor pravdivosti výrokové formy $x < 7$ s definičním oborem $\mathbb{N}$. Množina $\mathbb{N}$ současně plní funkci základní množiny. Množinu A lze v tomto případě určit i výčtem prvků $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Poznámka 1.8 Základní množinou, ze které vycházíme při všech množinových úvahách, je vždy jasně určeno, které objekty mohou být prvky uvažovaných množin. Je-li dána základní množina, pak již neuvažujeme o jiných objektech než o prvcích této základní množiny.

Příklad 1.26 Rozhodněte, o pravdivosti výroku:

a) $2 \in \{1, 2, 3, 5\}$, b) $4 \notin \{1, 2, 3, 5\}$, c) $x \in \emptyset$.

Řešení: V případech a), b) se jedná o pravdivé výroky, v případě c) se jedná o výrok nepravdivý.

Příklad 1.27 Rozhodněte, jaké prvky obsahují množiny:

a) $A = \{1; 0,5; -1; 5\}$, b) $B = \{a, b, x\}$, c) $C = \{a, \{a\}, \{a, b\}\}$,
d) $D = \{\{x, y, z, v\}\}$, e) $E = \{\clubsuit, \{\diamondsuit\}, \heartsuit, \spadesuit\}$, f) $F = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Řešení:
a) Množina A obsahuje 4 prvky: 1; 0,5; -1; 5.
b) Množina B obsahuje 3 prvky: a, b, x.
c) Množina C obsahuje 3 prvky: a, $\{a\}$, $\{a, b\}$.
d) Množina D obsahuje 1 prvek: $\{x, y, z, v\}$.
e) Množina E obsahuje 4 prvky: $\clubsuit$, $\{\diamondsuit\}$, $\heartsuit$, $\spadesuit$.
f) Množina F obsahuje 2 prvky: $\{1\}$, $\{1, 2, 3\}$.

Poznámka 1.9 V příkladu 1.27 si můžeme povšimnout, že některé prvky zadaných množin C, D, E, F jsou opět množiny. Na základě této skutečnosti lze konstatovat, že i množiny mohou být prvky jiných množin.

Příklad 1.28 Označme X množinu všech studentů vaší studijní skupiny, Y množinu všech studentů, kteří jsou zapsáni do prvního ročníku vaší fakulty. Sebe označte písmenem a, některého jiného studenta vaší skupiny označte písmenem b, jednoho studenta jiné skupiny prvního ročníku označte písmenem c. Rozhodněte o pravdivosti výroku.

a)	$a \in X$,	b)	$a \in Y$,	c)	$b \in X$,	d)	$b \in Y$,
e)	$c \in X$,	f)	$c \in Y$,	g)	$b \in Y \wedge b \in X$,	h)	$c \in Y \wedge c \notin X$,
i)	$b \in Y \vee b \in X$,	j)	$c \in X \Rightarrow c \in Y$	k)	$c \in X \Leftrightarrow c \in Y$.		

Řešení: Pokud jste studentkou (studentem) prvního ročníku uvažované vysoké školy, pak pouze výroky e), k) jsou nepravdivé, všechny ostatní výroky jsou pravdivé.

Příklad 1.29 Množiny A, B jsou dány charakteristickou vlastností. Zapište množiny A, B výčtem prvků i symbolicky.

a) Množinu A všech celých čísel, která jsou větší než -2 a menší než 6.
b) Množinu B všech přirozených čísel, která jsou dělitelná pěti a zároveň jsou menší než 32.

Řešení:
a) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; symbolicky $A = \{x \in \mathbb{Z}; -2 < x < 6\}$,
b) $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$; symbolicky $B = \{x \in \mathbb{N}; 5 \mid x \wedge x < 32\}$.

Příklad 1.30 Určete množiny A, B pomocí jejich charakteristické vlastnosti a zapište je symbolicky:

a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, b) $B = \{3, 5, 7, 9\}$.

Řešení:
a) Množina A je množina všech přirozených čísel, která jsou sudá a zároveň jsou větší než 1 a menší než 11, tj. $A = \{x \in \mathbb{N}; 1 < x < 11 \ \wedge \ 2 \mid x\}$.
b) Množina B je množina všech přirozených čísel, která jsou lichá a zároveň jsou větší než 2 a menší než 10, tj. $B = \{x \in \mathbb{N}; 2 < x < 10 \ \wedge \ 2 \nmid x\}$.

Příklad 1.31 Určete výčtem prvků množiny A, B, C dané charakteristickou vlastností:

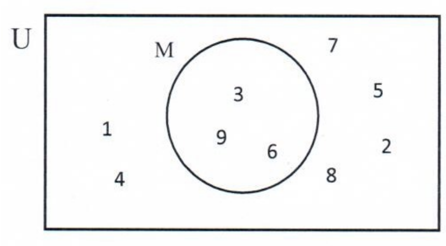
a) $A = \{x \in \mathbb{Z}; -2 \leq x < 4\}$, b) $B = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 1 = 0\}$,
c) $C = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 2 = 0\}$.

Řešení:
a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, b) $B = \{-1, 1\}$, c) $C = \emptyset$.

1.4.2 Grafické znázornění množin, vztahy meni množinami, operace s množinami

K názorné představě o množinách, množinových vztazích a operacích s množinami používáme jejich grafická znázornění v rovině, tzv. **množinové diagramy**. Uvažujeme-li množinu M danou například charakteristickou vlastností $M = \{x \in U; v(x)\}$, pak základní množina U se znázorňuje schematicky zpravidla obdélníkem, a množina M se znázorňuje kruhem, popřípadě jiným oválným obrazcem uvnitř tohoto obdélníku.

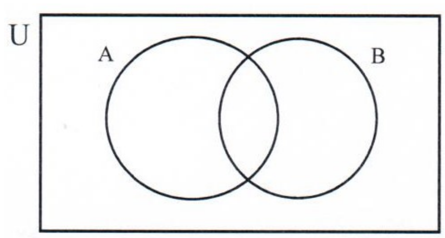
Uvažované množinové diagramy, pomocí kterých lze názorně ilustrovat také vztahy mezi množinami a operace s množinami, se nazývají **Vennovy diagramy**.



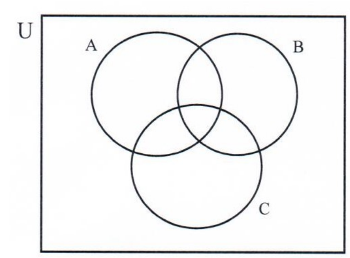
Obr. 1.2:

Obrázek 1.2 ilustruje Vennův diagram množiny $M = \{x \in U; 3 \mid x\}$ všech jednociferných přirozených čísel, která jsou násobky čísla tři. Body v obdélníku znázorňují prvky základní množiny $U = \{1, 2, 3, ..., 9\}$, body v kruhu označeného písmenem M znázorňují prvky množiny $M = \{3, 6, 9\}$.

V této modifikaci Vennova diagramu lze zobrazit až tři množiny, což je pro naše potřeby dostačující. Na obrázku 1.3 vidíme Vennův diagram pro dvě množiny A, B, obrázek 1.4 ilustruje Vennův diagram pro tři množiny A, B, C.

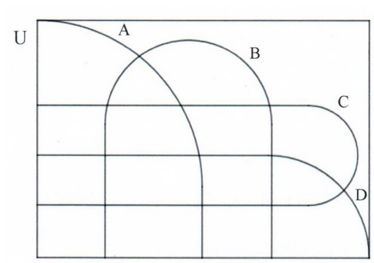


Obr. 1.3:



Obr. 1.4:

Vennův diagram lze znázornit i pro více než tři množiny; v tomto případě však již nemohou být všechny množiny znázorněny kruhy, ale rovinnými útvary, které jsou ohraničeny uzavřenými rovinnými křivkami. Takové Vennovy diagramy jsou velmi nepřehledné a v praxi se nepoužívají. Na obrázku 1.5 ještě uvádíme Vennův diagram pro čtyři množiny A, B, C, D.



Obr. 1.5:

V následujícím textu budou jednoznačně vymezeny pojmy rovnost množin, podmnožina dané množiny, potenční systém množin a další.

• Množiny A, B **jsou si rovny**, jestliže každý prvek množiny A je prvkem množiny B a zároveň každý prvek množiny B je prvkem množiny A. Tento množinový vztah nazýváme **rovnost množin** A, B a zapisujeme $A = B$. V opačném případě říkáme, že množiny A, B **si nejsou rovny** a značíme $A \neq B$.

Příklad rovnosti množin:

$$\{1,3,6\} = \{1,3,6\}; \qquad \{a,b,c\} = \{c,a,b\}.$$

Z uvedených příkladů rovnosti množin je zřejmé, že na pořadí prvků v množině nezáleží. Vzhledem k tomu, že výše uvedené množiny jsou určeny výčtem prvků, je rovnost množin snadno rozpoznatelná. Uvažujeme-li však například množiny A, B dané charakteristickou vlastností

$$A = \{x \in \mathbb{N}; |x-2| < 4\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z}; 1 \leq x \leq 5\},$$

není na první pohled patrno, že tyto množiny jsou si rovny, tj. $A = B = \{1,2,3,4,5\}$.

• Množina A se nazývá **podmnožinou** množiny B, je-li každý prvek množiny A zároveň prvkem množiny B. Tento množinový vztah nazýváme **inkluze množin** A, B a zapisujeme $A \subset B$. Řekneme, že množina A je **vlastní podmnožinou** množiny B právě tehdy, když platí: $A \subset B \wedge A \neq B$.

Příklad inkluze množin:

$$\{1,2,3,4\} \subset \{1,2,a,e,4,3,6\}; \qquad \{4,e,a\} \subset \{1,2,a,e,4,3,6\}$$

Z uvedené formulace pojmů vyplývá, že rovnost množin A, B je splněna právě tehdy, když množina A je podmnožinou množiny B a zároveň množina B je podmnožinou množiny A. Symbolicky zapsáno:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A).$$

Příklad 1.32 Rozhodněte o pravdivosti výroků:

a) $\{5,8\} = \{8,5\}$, b) $1 \subset \{2,8,1\}$, c) $\{3,1\} \subset \{2,1,3,0\}$.

Řešení: Výrok b) je nepravdivý. Výroky a), c) jsou pravdivé.

• **Potenční systém množin** množiny A je množina všech podmnožin množiny A, značíme jej $\mathcal{P}(A)$. Kombinatorickými úvahami lze dokázat, že počet prvků potenčního systému $\mathcal{P}(A)$ množiny A je 2^n, kde n je počet prvků množiny A.

Příklad 1.33 Určete potenční systém množiny $A = \{a,b,c\}$.

Řešení: Podmnožiny množiny A jsou:

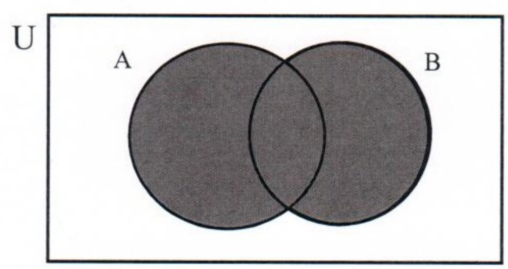
$A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b\}$, $A_3 = \{c\}$, $A_4 = \{a, b\}$,
$A_5 = \{b, c\}$, $A_6 = \{a, c\}$, $A_7 = \{a, b, c\}$, $A_8 = \emptyset$.

Tedy $\mathcal{P}(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$ nebo též
$\mathcal{P}(A) = \{A_1, A_2, ..., A_8\}$.
Počet prvků potenčního systému $\mathcal{P}(A)$ tříprvkové množiny A je $2^3 = 8$. Ze zápisu $\mathcal{P}(A)$ je zřejmé, že prvky potenčního systému jsou množiny.

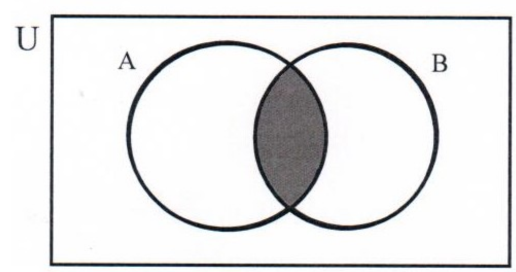
Předcházející poznatky o výrokových formách jedné proměnné x nám umožní v dalším studiu vyslovit přesné formulace operací s množinami: sjednocení, průnik, rozdíl a symetrický rozdíl množin.

• **Sjednocením množin** A, B je množina, která obsahuje všechny prvky, jež patří do množiny A nebo do množiny B. Sjednocení množin A, B označujeme $A \cup B$ a znázorňujeme Vennovým diagramem na obrázku 1.6. Symbolicky jej zapíšeme:

$$\boxed{A \cup B = \{x \in U; x \in A \vee x \in B\}}$$



Obr. 1.6:



Obr. 1.7:

Příklad sjednocení množin:

$\{1, 2, 3\} \cup \{a, b\} = \{1, 2, 3, a, b\}$,

$\{0, 2, 3, a, x\} \cup \{a, x, b, 1\} = \{0, 1, 2, 3, a, b, x\}$.

• **Průnikem množin** A, B je množina, která obsahuje všechny prvky, jež patří do množiny A a zároveň do množiny B. Průnik množin A, B označujeme $A \cap B$ a znázorňujeme Vennovým diagramem na obrázku 1.7. Symbolicky jej zapíšeme:

$$\boxed{A \cap B = \{x \in U; x \in A \wedge x \in B\}}$$

Příklad průniku množin:

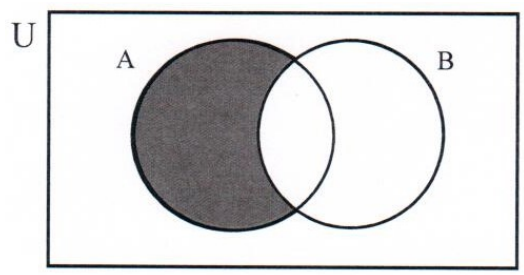
$\{1, 2, 3\} \cap \{3, 1, 5\} = \{1, 3\}$,

$\{1, 2, 3\} \cap \{a, b\} = \emptyset$.

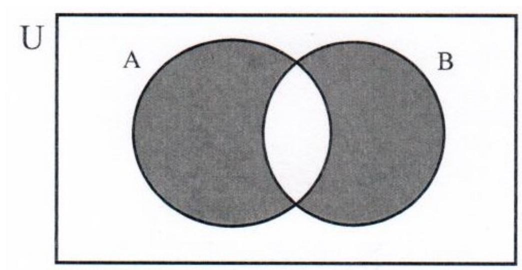
Množiny, jejichž průnikem je prázdná množina, se nazývají **disjunktní množiny**. Například množiny $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{x, y\}$ jsou disjunktní, neboť $\{1, 2, 3\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, neboli $A \cap B = \emptyset$.

- **Rozdílem množin** A, B je množina, která obsahuje všechny prvky množiny A, které nepatří do množiny B. Rozdíl množin A, B označujeme $A - B$ a znázorňujeme Vennovým diagramem na obrázku 1.8. Symbolicky jej zapíšeme:

$$\boxed{A - B = \{x \in U; x \in A \land x \notin B\}}$$



Obr. 1.8:



Obr. 1.9:

Příklad rozdílu množin:

$\{1, 2, 3\} - \{3, 1, 5\} = \{2\}$,

$\{3\} - \{1, 2, 5\} = \{3\}$.

Příklad 1.34 Množiny A, B jsou dány charakteristickou vlastností. Určete $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.

a) $A = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq 1\}$ a $B = \{x \in \mathbb{Z}; x \leq 1\}$,
b) $A = \{x \in \mathbb{Z}; x > 1\}$ a $B = \{x \in \mathbb{Z}; x \leq 1\}$,
c) $A = \{x \in \mathbb{Z}; x > 1\}$ a $B = \{x \in \mathbb{Z}; x < 1\}$.

Řešení:
a) $A \cup B = \mathbb{Z}$, $A \cap B = \{1\}$, $A - B = \{x \in \mathbb{Z}; x > 1\}$,
b) $A \cup B = \mathbb{Z}$, $A \cap B = \emptyset$, $A - B = \{x \in \mathbb{Z}; x > 1\}$,
c) $A \cup B = \mathbb{Z} - \{1\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A - B = \{x \in \mathbb{Z}; x > 1\}$.

- **Symetrickým rozdílem množin** A, B je množina, která obsahuje všechny prvky, které patří do právě jedné z množin A a B. Rozdíl množin A, B označujeme $A \triangle B$ a znázorňujeme Vennovým diagramem na obrázku 1.9. Symbolicky jej zapíšeme:

$$\boxed{A \triangle B = \{x \in U; x \in A \veebar x \in B\}}$$

Příklad symetrického rozdílu množin:

$\{1, 2, 3\} \triangle \{3, 1, 5\} = \{2, 5\}$,

$\{3, 1, 5\} \bigtriangleup \{1, 5, 3, 7\} = \{7\}$.

Příklad 1.35 Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ a $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Určete výčtem prvků množiny:

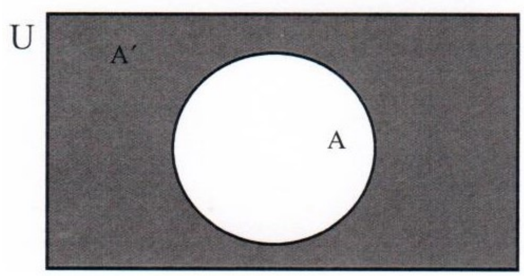
a) $A \bigtriangleup B$, b) $B - A$, c) $A \cap B$, d) $A \cup B$, e) $A - B$.

Řešení:
a) $A \bigtriangleup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, b) $B - A = \{4, 6, 8\}$, c) $A \cap B = \{2\}$,
d) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, e) $A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

- **Doplněk množiny** A **v základní množině** U je množina, která obsahuje právě ty prvky základní množiny U, které nepatří do množiny A. Značíme jej A', znázorňujeme pomocí Vennova diagramu na obrázku 1.10 a symbolicky zapíšeme.

$$\boxed{A' = \{x \in U; x \notin A\}}$$

Je-li $A \subset B$, nazýváme **doplňkem množiny** A **v množině** B rozdíl množin $B - A$. Označujeme jej A'_B. Pro $A \subset B$ je tedy $A'_B = B - A$.



Obr. 1.10:

Příklad doplňku množiny:

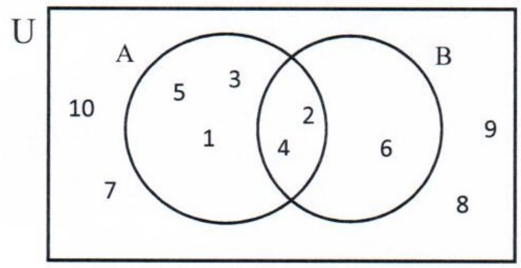
Pro $A = \{3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ je $A'_B = B - A = \{1, 2\}$.

Příklad 1.36 Je dána základní množina $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ a množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Určete následující množiny výčtem prvků a znázorněte je užitím Vennova diagramu:

a) A', b) $A \cup B$, c) $A \cap B$, d) $A - B$, e) $B - A$, f) $A \triangle B$.

Řešení:
a) $A' = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, c) $A \cap B = \{2, 4\}$,
d) $A - B = \{1, 3, 5\}$, e) $B - A = \{6\}$, f) $A \triangle B = \{1, 3, 5, 6\}$.

Znázornění užitím Vennova diagramu je na obrázku 1.11.



Obr. 1.11:

Příklad 1.37 Všechny děti, které jsou na hřišti, mají oblečenou mikinu nebo kraťasy (tzn. alespoň jednu z těchto dvou druhů ošacení). Mikinu mají: Zdena, Adéla, Kamil, Péťa, Simona a Tomáš. Kraťasy mají: Adéla, Ivan, Robert, Tomáš, Simona, Ota, Jirka a Zdena.

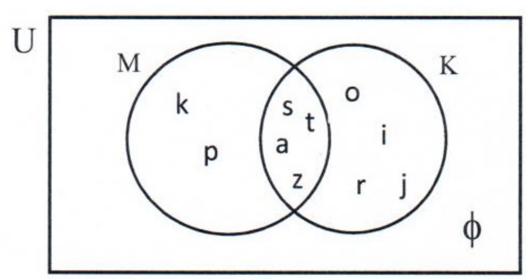
a) Určete všechny děti na hřišti, kteří mají mikinu i kraťasy.
b) Zapište množinu všech dětí, kteří mají mikinu nebo kraťasy.

Řešení: Pro přehlednost si zapišme všechy děti na hřišti počátečními písmeny jejich jmen s použitím písmen malé abecedy, tedy např. Zdena - z, Adéla - a, Kamil - k, atd.

Množinu M všech dětí na hřišti, které mají mikinu, zapíšeme: $M = \{z, a, k, p, s, t\}$.
Množinu K všech dětí na hřišti, které mají kraťasy, zapíšeme: $K = \{a, i, r, s, t, o, j, z\}$.

a) Množinu všech dětí na hřišti, kteří mají mikinu i kraťasy, zapíšeme:
$M \cap K = \{a, z, s, t\}$. Mikinu a současně kraťasy mají děti: Zdena, Adéla, Simona a Tomáš.
b) Množinu všech dětí na hřišti, kteří mají mikinu nebo kraťasy, zapíšeme:
$M \cup K = \{z, a, k, p, s, t, i, r, o, j\}$. Mikinu nebo kraťasy mají děti: Zdena, Adéla, Kamil, Péťa, Simona, Tomáš, Ivan, Robert, Ota a Jirka.

Pro větší názornost lze tuto situaci vyjádřit Vennovým diagramem na obrázku 1.12.



Obr. 1.12:

Poznámka 1.10 Podobné úlohy jako v příkladu 1.37 řeší žáci na 1. stupni ZŠ a prostřednictvím Vennova diagramu si danou situaci mohou takto znázornit.

Poznámka 1.11 V teorii množin máme řadu množinových rovností, mezi které patří:

(M1) $(A \cup B)' = A' \cap B'$,
(M2) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Rovnost (M1) čteme: "Doplněk sjednocení množin A, B je roven průniku doplňků množin A, B."
Rovnost (M2) čteme: "Doplněk průniku množin A, B je roven sjednocení doplňků množin A, B."
Rovnostem (M1) a (M2) říkáme **de Morganovy vzorce**.

Mezi základní množinové rovnosti dále patří:

(M3)	$A \cap B = B \cap A$	komutativnost průniku,
(M4)	$A \cup B = B \cup A$	komutativnost sjednocení,
(M5)	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	asociativnost průniku,
(M6)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	asociativnost sjednocení.

Další množinové rovnosti vyjadřují vzájemnou distributivnost průniku a sjednocení:

(M7)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	distributivnost průniku vzhledem ke sjednocení,
(M8)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributivnost sjednocení vzhledem k průniku.

Existuje ještě celá řada dalších množinových rovností:

(M9)	$(A')' = A$,	
(M10)	$A \cup A' = U$	U je základní množina,
(M11)	$A \cap A' = \emptyset$,	
(M12)	$A \cap A = A$	idempotence průniku,
(M13)	$A \cup A = A$	idempotence sjednocení,
(M14)	$A \cap U = A$	neutrálnost základní množiny U vzhledem k průniku,
(M15)	$A \cap \emptyset = \emptyset$	agresívnost prázdné množiny vzhledem k průniku,
(M16)	$A \cup U = U$	agresívnost základní množiny U vzhledem ke sjednocení,
(M17)	$A \cup \emptyset = A$	neutrálnost prázdné množiny vzhledem ke sjednocení.

Zkoumáme-li Vennův diagram pro dvě množiny A, B, vidíme, že každý prvek základní množiny U bude prvkem právě jedné ze čtyř množin K_1, K_2, K_3 a K_4, viz obrázek 1.13. Množiny K_1, K_2, K_3, K_4 nazýváme **komponentami**. Komponenty jsou určeny charakteristickou vlastností takto:

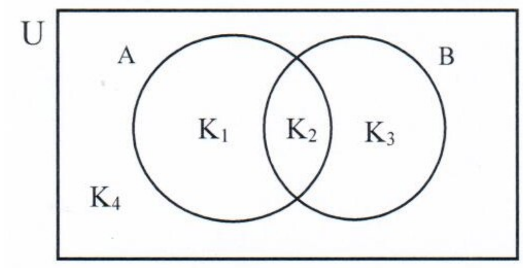
$$K_1 = \{x \in U; x \in A \wedge x \notin B\},$$
$$K_2 = \{x \in U; x \in A \wedge x \in B\},$$
$$K_3 = \{x \in U; x \notin A \wedge x \in B\},$$
$$K_4 = \{x \in U; x \notin A \wedge x \notin B\}.$$

Pro komponenty K_1, K_2, K_3, K_4 platí následující množinové vztahy:

$$K_1 = A - B, \qquad K_2 = A \cap B, \qquad K_3 = B - A, \qquad K_4 = (A \cup B)',$$

$$K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 = U,$$

$$K_1 \cap K_2 = K_1 \cap K_3 = K_1 \cap K_4 = K_2 \cap K_3 = K_2 \cap K_4 = K_3 \cap K_4 = \emptyset$$[2].



Obr. 1.13:

Příklad 1.38 Ze 129 studentů chodí do menzy na oběd nebo na večeři pravidelně 116 studentů. 62 studentů nechodí na oběd nebo nechodí na večeři. Přitom na obědy jich chodí o 47 více než na večeři. Kolik z nich chodí na obědy a večeře, kolik jen na večeře a kolik jen na obědy?

Řešení: Základní množina U bude množina všech 129 studentů. Označme O množinu všech studentů, kteří chodí na obědy a V množinu všech studentů, kteří chodí na večeře. Prvky základní množiny U se rozdělí do čtyř komponent K_1, K_2, K_3 a K_4. Tyto komponenty jsou charakterizovány následovně:

K_1 je množina všech studentů, kteří chodí na obědy a nechodí na večeře (zapsáno symbolicky $K_1 = \{x \in U; x \in O \wedge x \notin V\}$),

K_2 je množina všech studentů, kteří chodí na obědy a současně chodí na večeře (zapsáno symbolicky $K_2 = \{x \in U; x \in O \wedge x \in V\}$),

K_3 je množina všech studentů, kteří nechodí na obědy a chodí na večeře (zapsáno symbolicky $K_3 = \{x \in U; x \notin O \wedge x \in V\}$),

K_4 je množina všech studentů, kteří nechodí na obědy ani nechodí na večeře (zapsáno symbolicky $K_4 = \{x \in U; x \notin O \wedge x \notin V\}$).

Označme po řadě a, resp. b, resp. c, resp. d počet prvků komponenty K_1, resp. K_2, resp. K_3, resp. K_4, viz obrázek 1.14. Počty studentů v jednotlivých komponentách jsou charakterizovány následovně:

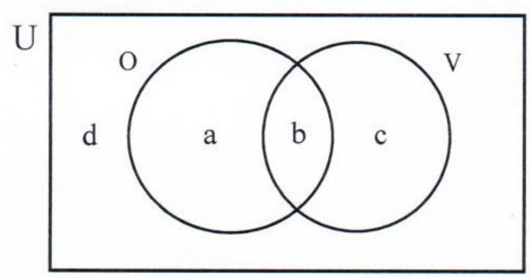
[2] Komponenty K_1, K_2, K_3, K_4 jsou navzájem disjunktní.

a je počet všech studentů, kteří chodí na obědy a nechodí na večeře, tj. počet prvků množiny K_1,

b je množina všech studentů, kteří chodí na obědy a současně chodí na večeře, tj. počet prvků množiny K_2,

c je množina všech studentů, kteří nechodí na obědy a chodí na večeře, tj. počet prvků množiny K_3,

d je množina všech studentů, kteří nechodí na obědy ani nechodí na večeře, tj. počet prvků množiny K_4.



Obr. 1.14:

Pro určení čtyř neznámých a, b, c, d je třeba sestavit čtyři lineární rovnice. Počet všech studentů základní množiny U vyjádříme rovnicí

$$a + b + c + d = 129. \tag{1.21}$$

Počet žáků, kteří chodí na oběd nebo chodí na večeři vyjádříme rovnicí

$$a + b + c = 116. \tag{1.22}$$

Počet žáků, kteří nechodí na oběd nebo nechodí na večeři vyjádříme rovnicí

$$a + c + d = 62. \tag{1.23}$$

Situaci, kdy na obědy chodí o 47 žáků více než na večeři vyjádříme

$$a - c = 47. \tag{1.24}$$

Získáme tak soustavu čtyř rovnic 1.21, 1.22, 1.23 a 1.24 o čtyřech neznámých a, b, c, d, kterou je třeba vyřešit:

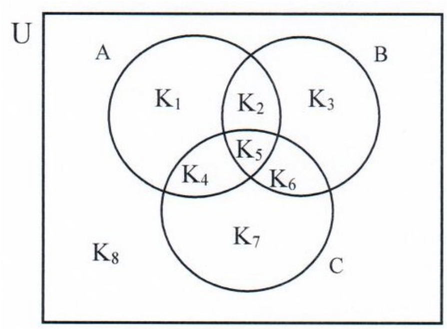
(1) $a + b + c + d = 129$
(2) $a + b + c = 116$
(3) $a + c + d = 62$
(4) $a - c = 47.$

Odečteme-li druhou rovnici (2) od první (1), získáme $d = 13$.
Odečteme-li třetí rovnici (3) od první (1), získáme $b = 67$.
Sečteme-li třetí (3) a čtvrtou (4) rovnici, dostaneme $2a + d = 109$, dosazením za d získáme $a = 48$.
Dosazením do čtvrté rovnice (4) za a získáme $c = 1$.

Odpověď: Na obědy a večeře chodí 67 studentů, pouze na večeře chodí 1 student, pouze na obědy chodí 48 studentů.

Zkoumáme-li Vennův diagram pro tři množiny A, B, C, vidíme, že každý prvek základní množiny U bude prvkem právě jedné z osmi komponent K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7 a K_8, viz obrázek 1.15. Komponenty jsou určeny charakteristickou vlastností takto:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \{x \in U; x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C\},\\
K_2 &= \{x \in U; x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C\},\\
K_3 &= \{x \in U; x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C\},\\
K_4 &= \{x \in U; x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C\}.\\
K_5 &= \{x \in U; x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\},\\
K_6 &= \{x \in U; x \notin A \wedge x \in B \wedge x \in C\},\\
K_7 &= \{x \in U; x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C\},\\
K_8 &= \{x \in U; x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \notin C\}.
\end{aligned}
$$



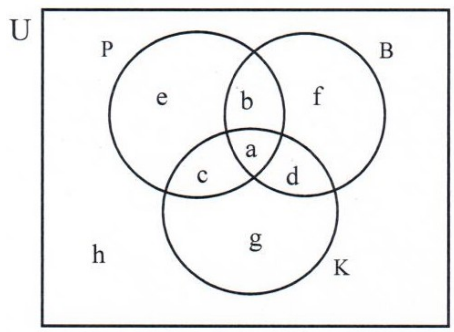
Obr. 1.15:

Pro komponenty $K_1, \ldots, K_8$ platí následující množinové vztahy:

$$
\begin{array}{lll}
K_1 = A \cap B' \cap C', & K_2 = A \cap B \cap C', & K_3 = A' \cap B \cap C',\\
K_4 = A \cap B' \cap C, & K_5 = A \cap B \cap C, & K_6 = A' \cap B \cap C,\\
K_7 = A' \cap B' \cap C, & K_8 = A' \cap B' \cap C'. &
\end{array}
$$

Příklad 1.39 Ve třídě je 38 žáků. Z nich umí 18 plavat, 17 bruslit a 19 jezdit na kole. Bruslit a jezdit na kole umí 10 žáků, plavat a bruslit umí 7 žáků, plavat a jezdit na kole umí 9 žáků a 3 žáci umí všechny tři dovednosti. Kolik žáků neovládá žádnou dovednost? Kolik žáků umí právě jednu, kolik žáků umí právě dvě dovednosti.
Řešení: Základní množina U bude množina všech 38 žáků. Označme P množinu všech

žáků, kteří umí plavat, B množinu všech žáků, kteří umí bruslit a K množinu všech žáků, kteřá umí jezdit na kole. Prvky základní množiny U se rozdělí do osmi komponent K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7 a K_8. Počty žáků v jednotlivých komponentách označíme písmeny, viz Vennův diagram na obrázku 1.16. Pro určení osmi neznámých a, b, c, d, e, f, g, h je třeba sestavit lineární rovnice.



Obr. 1.16:

$$\begin{array}{ll}
(1) & a+b+c+d+e+f+g+h=38, \\
(2) & a+b+c+e=18, \\
(3) & a+b+d+f=17, \\
(4) & a+c+d+g=19, \\
(5) & a+d=10, \\
(6) & a+b=7, \\
(7) & a+c=9, \\
(8) & a=3.
\end{array}$$

Po dosazení $a = 3$ z poslední rovnosti do rovnic (7), (6) a (5) určíme hodnoty pro $c = 6$, $b = 4$ a $d = 7$.
Dosazením těchto hodnot do rovice (2) získáme $e = 5$, do rovnice (3) získáme $f = 3$ a do rovnice (4) získáme $g = 3$.
Všechny předchozí získané hodnoty dosadíme do rovnice (1) a získáme $h = 7$.

Odpověď: Celkem 7 žáků neovládá žádnou z dovedností. Celkem 11 žáků $(e + f + g)$ umí právě jednu dovednost a 17 žáků $(b + c + d)$ umí právě dvě dovednosti.

Příklad 1.40 Pro množiny A, B, C platí následující vztahy:

$$A - B = B \cap C \quad \wedge \quad C \subset A \quad \wedge \quad B - A \neq \emptyset.$$

Znázorněte situaci pomocí symbolů $\emptyset$ a $\bullet$ v množinovém diagramu a rozhodněte, který z následujících výroků je pravdivý[3]:

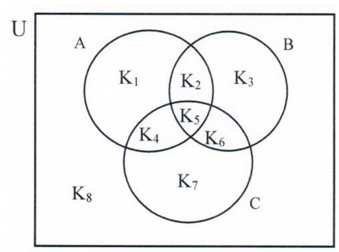
[3]Symboly $\emptyset$, resp. $\bullet$ jsou symboly pro prázdnou, resp. neprázdnou množinu.

a)	$A \cap B = C \triangle B$,	b)	$B \triangle C \neq \emptyset$,	c)	$C \cup B \subset A \cup C$,
d)	$A = (B \cup C) - (A \triangle B)$,	e)	$A \triangle C = \emptyset$,	f)	$A' \subset C'$.

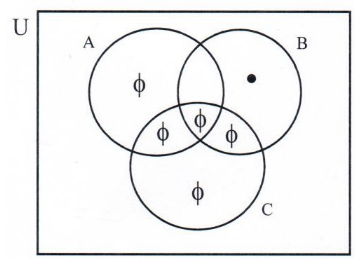
Řešení: Zaznamenáme-li zadané podmínky prostřednictvím disjunktních komponent $K_1, \ldots, K_8$ množinového diagramu pro tři množiny A, B, C, jednoduše zjistíme, že:

$$A - B = K_1 \cup K_4, \qquad B \cap C = K_5 \cup K_6, \qquad B - A = K_3 \cup K_6.$$

Vyjdeme z prostřední podmínky. Je-li $C \subset A$, znamená to, že komponenty K_6 a K_7 musí být prázdné množiny. Protože $B - A \neq \emptyset$, musí být symbol $\bullet$ v komponentě K_3 (jediná možnost pro umístění $\bullet$ je K_3). Aby platilo $A - B = B \cap C$, je nutné, aby $K_1 = K_4 = K_5 = \emptyset$. Situace je znázorněna na obrázcích 1.17 a 1.18.



Obr. 1.17:



Obr. 1.18:

Nepravdivé výroky jsou b), d), f). Pravdivé výroky jsou a), c). O pravdivosti výroku e) nelze rozhodnout, neboť ze zadání úlohy nelze určit komponentu K_2.

Příklad 1.41 Rozhodněte, jaké podmínky musí splňovat množiny A, B, C, aby pro množiny L, P zadané

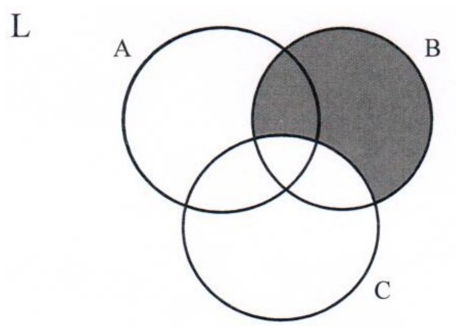
$$L = [(A \cup B) - C] \cap (C \triangle B), \qquad P = (B - C) \cap (A \triangle C)$$

platilo:

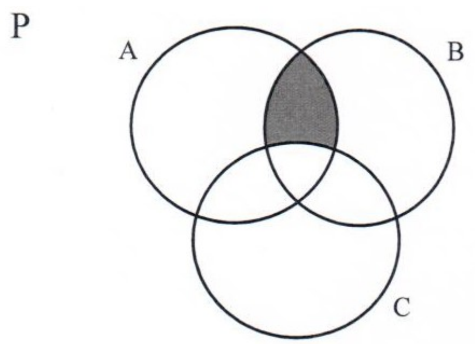
a) $L \subset P$, b) $P \subset L$, c) $P = L$, d) $P \neq L$.

Řešení: Tuto úlohu je výhodné řešit graficky, kdy nejprve znázorníme Vennův diagram pro množiny A, B, C. Množiny L, resp. P, které jsou výsledky operací množin A, B, C, jsou graficky znázorněny na obrázcích 1.19, resp. 1.20. Vzhledem ke komponentám K_1, …, K_8 je z obou obrázků vidět, že $L = K_2 \cup K_3$ a $P = K_3$. Odtud získáme následující závěry:

1) Je-li $A' \cap B \cap C' = \emptyset$, pak je $L \subset P$,
2) $P \subset L$ platí vždy,
3) Je-li $A' \cap B \cap C' = \emptyset$, pak je $L = P$,
4) Je-li $A' \cap B \cap C' \neq \emptyset$, pak je $L \neq P$.



Obr. 1.19:



Obr. 1.20:

Poznámka 1.12 Pro čtyři množiny A, B, C, D obsahuje Vennův diagram celkem 16 komponent. Touto situací se však v dalším textu nebudeme zabývat.

1.4.3 Úlohy k procvičení

1. Zjistěte pravdivostní hodnotu výroků:

a) $b \notin \{a, \{b\}, c\}$, b) $M \in \{M\}$, c) $b \in \{a, b, c\}$,
d) $\{a, b\} \in \{a, \{a, b\}, b\}$, e) $c \notin \{\{a, \{c\}\}, b\}$.

2. Je dána množina $A = \{\{a, \{c\}\}, b\}$. Rozhodněte o pravdivosti výroků:

a) $a \in A$, b) $b \in A$, c) $c \in A$,
d) $\{a\} \in A$, e) $\{c\} \in A$, f) $\{a, \{c\}\} \in A$.

3. Rozhodněte, který z těchto tří objektů 3, $\{3\}$, $\{2, 3\}$ je, resp. není prvkem množiny:

a) $\mathbb{N}$, b) $\{2, 3\}$, c) $\{\{3\}, \{2, 3\}\}$.

4. Zapište symbolicky:

a) A je množina všech celočíselných dělitelů čísla 4.
b) B je množina všech přirozených čísel větších než $\frac{5}{3}$.
c) C je množina všech společných přirozených dělitelů čísel 36 a 42.
d) D je množina všech přirozených čísel, pro které platí $x^2 + 5x - 14 = 0$.
e) E je množina všech prvků množiny $Z = \{1, 2, ..., 10\}$, pro které platí $x - 5 > 3$.

5. Popište slovy množiny zadané symbolicky charakteristickou vlastností:

a) $A = \{x \in \mathbb{N}; 8|x\}$, b) $B = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 + 8x + 15 = 0\}$,
c) $C = \{x \in \mathbb{R}; x > \sqrt{5}\}$, d) $D = \{x \in \mathbb{N}; x^3 > 100\}$,

6. Rozhodněte, mezi kterými dvojicemi daných množin existují vztahy rovnosti nebo inkluze:

$$A = \{1,2,3,4,5\}, \qquad B = \{3,4,5\}, \qquad C = \{3,4\}, \qquad D = \{4,3,5\}.$$

7. Určete potenční systém množiny $M = \{x, y, z, v\}$.

8. Rozhodněte, zda platí:

a) $\{1,2\} \in \{\{1,2,3\},\{1,3\},1,2\}$, b) $\{1,2\} \subset \{\{1,2,3\},\{1,3\},1,2\}$.

9. Některé z následujících výroků nejsou pravdivé. Uveďte, které:

a) $a \in \{a,b\}$,	b) $\{a\} \subset \{a,b\}$,	c) $\{a\} \in \{a,b\}$,	d) $3 \in \{3\}$,
e) $\{3\} \in \{3\}$,	f) $\{3\} \subset \{3\}$,	g) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$,	h) $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

10. Jsou dány množiny $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{a,d,e\}$, $C = \{e,f,g,h\}$. Určete množiny:

a) $A \cup B$,	b) $A \cup C$,	c) $B \cap C$,	d) $A \cap B$,
e) $A - B$,	f) $B - C$,	g) $A - C$,	h) B'_A.

11. Soutěže v anglickém jazyce se zúčastnili: Jana, Stela, Dan a Pavel. Soutěže v německém jazyce se zúčastnili: Katka, Stela, Pavel, Filip a Zbyněk. Zapište množinu všech dětí, které soutěžily:

a) v obou jazycích (tj. v anglickém i německém jazyce),
b) v alespoň jednom jazyce (tj. v anglickém nebo německém jazyce),
c) jen v anglickém jazyce,
d) jen v německém jazyce,
e) právě v jednom jazyce (tj. jen v anglickém nebo jen v německém jazyce).

12. Uvažujte dvě množiny bodů v rovině, z nichž jedna je kružnice k a druhá je přímka p. Které množiny mohou být průnikem $k \cap p$?

13. Uvažujte dvě přímky p a q v rovině. Které množiny mohou být průnikem $p \cap q$?

14. Je dána množina $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ a množina $A = \{2,4,6,8\}$. Určete výčtem prvků množinu X, jestliže platí:

a) $A \cap X = \{2\} \ \wedge \ A \cup X = U - \{1,9\}$,
b) $A - X = \{2,4,8\} \ \wedge \ X - A = \{3,9\}$,
c) $A \cap X = \emptyset \ \wedge \ A \triangle X = U - \{9\}$.

15. Je dána množina $U = \{1,2,3,4\}$. Určete výčtem prvků množiny A, B, $A' \triangle B'$, $A' - (B' \cup A)$, jestliže:

a) $A = \{x \in U; x^2 \leq 1 \Rightarrow x > 1\}$,
$B = \{x \in U; x = x \Leftrightarrow (x = 3 \vee x > 2)\}$,
b) $A = \{x \in U; (x \in U \Rightarrow x \leq 1) \wedge x = 1\}$,
$B = \{x \in U; (x = 1 \vee x^2 = 4) \Leftrightarrow x < 4\}$.

16. Je dána množina $A = \{a, b, c, d\}$. Určete výčtem prvků množiny

a) $A = \{x \in U; x = b \Rightarrow x \neq b\}$, b) $B = \{x \in U; x \neq a \Leftrightarrow x \in U\}$,
c) $(A' \cap B') - (A \cap B)$, d) $(A \triangle B) \cup (A' \triangle B')$.

17. Je dána množina $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Určete výčtem prvků množiny A, B, jestliže platí:

a) $A \cap B = \{3\} \ \wedge \ B - A = \{4, 5\} \ \wedge \ A - B = \{2\}$,
b) $A \cup B = A \triangle B = \{2, 4, 5\} \ \wedge \ 2 \in A \ \wedge \ 4 \notin A$,
c) $B - A = A \triangle B = \{6\} \ \wedge \ (A \cup B)' = \{2, 3\}$,
d) $A' = \{1, 6, 4, 5\} \ \wedge \ (A \cup B)' = \{4, 5\} \ \wedge \ A - B = \{1\}$.

18. Je dána množina $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Určete výčtem prvků množiny A, B, jestliže platí:

$$A = \{x \in U; x = 0 \Leftrightarrow x < 3\}, \qquad B = \{x \in U; (x^2 = 4 \vee x < 2) \Rightarrow x > 3\}.$$

Množiny A, B znázorněte pomocí Vennových diagramů a rozhodněte, který z následujících výroků je pravdivý:

a) $A - B = A \triangle B$, b) $B \subset A$, c) $A \subset B$,
d) $B - A \subset A$, e) $A \cup B = A$, f) $A' = A \cup B'$.

19. Pro množiny A, B, C platí:

$$A = B \cap C \ \wedge \ A - B \subset A - C \ \wedge \ A \cap B = \emptyset.$$

Užitím symbolů $\emptyset$ a $\bullet$ znázorněte situaci pomocí Vennova diagramu a rozhodněte, který z následujících výroků vždy platí:

a) $A \subset B$, b) $B \subset A$, c) $A = B$, d) $A \subset C$,
e) $C \subset A$, f) $A = C$, g) $B \subset C$, h) $C \subset B$,

20. Pro množiny A, B, C platí:

a) $A \triangle B = B \cap C \ \wedge A \ \subset C - A \ \wedge \ B \neq \emptyset$,
b) $A \cup B = B - A \ \wedge B \ \cap C \neq \emptyset \ \wedge B \ \triangle C = A' \cap B \cap C'$,
c) $A \triangle B = A \triangle C \ \wedge \ B \cap C \subset A \ \wedge \ B \neq \emptyset$.

Užitím symbolů $\emptyset$ a $\bullet$ znázorněte situaci pomocí Vennova diagramu a rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

1) $C \neq \emptyset$, 2) $B \triangle C \neq \emptyset$, 3) $A \cup B = A \triangle B$,
4) $A = \emptyset$, 5) $B \cup C = B \cap C$, 6) $A \cap B \subset B \cap C$,
7) $A \subset C$, 8) $(A \cup B \cup C)' = A'$.

21. Pro množiny A, B, C platí:

a) $A \cap B = A \triangle B \ \wedge \ B \subset C \ \wedge \ B \triangle C \neq \emptyset$,
b) $A = B \cap C \ \wedge \ A - B \subset A - C \ \wedge \ A' \cap B \neq \emptyset$.

Užitím symbolů $\emptyset$ a $\bullet$ znázorněte situaci ve Vennově diagramu a rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

1) $C - B = A \cup C$, 2) $A \subset B$, 3) $B \cup C = A \cap C$,
4) $A \cap B \subset A \cup B$, 5) $A \triangle B \subset A \cup B$, 6) $(A \cup B \cup C)' = \emptyset$.

22. Je dána základní množina $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ a její podmnožina $A = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$. Určete výčtem prvků množinu B ($B \subset U$), pro kterou platí $A \cap B = \{3; 5\}$.

23. M je množina všech nenulových přirozených čísel, která jsou násobkem sedmi a jsou menší než 245. K je množina všech nenulových přirozených násobků čísla 5 menších než 245. Určete, kolik mají množiny M, K, $M \cap K$ a $M \cup K$ prvků, aniž byste provedli výčet prvků jednotlivých množin.

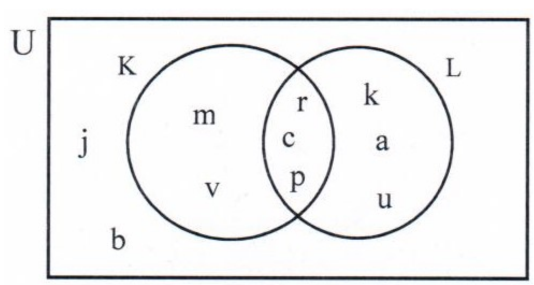
24. Množina A má 18 prvků, množina B má 24 prvků. Je možné, aby

průnik $A \cap B$ měl	a) 6	b) 18	c) 20 prvků?
sjednocení $A \cup B$ mělo	d) 30	e) 42	f) 43 prvků?

25. Jsou dány množiny $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, j\}$, $A = \{c, f, h, j\}$, $B = \{b, c, e, g, h\}$. Zadanou situaci znázorněte užitím Vennových diagramů a výčtem prvků určete následující množiny:

a) A', b) $A \cup B$, c) $A \cap B$,
d) $A - B$, e) $B - A$, f) $A \triangle B$.

26. Zapište výčtem prvků základní množinu U a množiny K, L podle jejich znázornění ve Vennově diagramu na obrázku 1.21.



Obr. 1.21:

27. Znázorněte následující množiny L, P v diagramu množin A, B, C, je-li dáno:

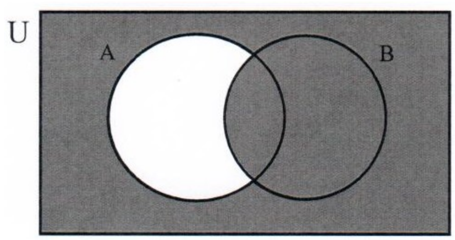
a) $L = [B - (B - A)] \cup [A \cup (B \cap C)]$, $P = [(B \triangle C) - C] \cup (A \cap B)$,
b) $L = (A \cup B) \cap [(A - B) \cup (B - C)]$, $P = [(A - B) \cup (C \triangle B)] - C$.

Rozhodněte, jaké podmínky musí splňovat množiny A, B, C, aby platilo:

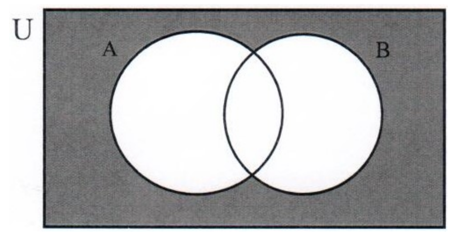
1) $L \subset P$, 2) $P \subset L$, 3) $L = P$, 4) $L \neq P$.

28. Zapište množiny znázorněné Vennovým diagramem na obrázcích:

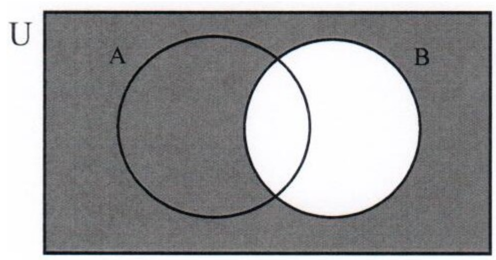
a) 1.22, b) 1.23, c) 1.24.



Obr. 1.22:



Obr. 1.23:



Obr. 1.24:

29. Pomocí Vennova diagramu ověřte, že pro každé dvě množiny A, B platí de Morganovy zákony (viz poznámka 1.11):

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

30. Pomocí Vennova diagramu ověřte, že pro každé tři množiny A, B, C platí:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivnost sjednocení množin vzhledem k průniku množin),
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivnost průniku množin vzhledem ke sjednocení množin).

31. Sledujme všechny zákazníky, kteří v pátek odpoledne nakupovali v jednom obchodě s potravinami. Zajímají nás všichni ti, kteří koupili rýži a všichni ti, kteří koupili těstoviny. Označme U jako množinu všech zákazníků, kteří v daném obchodě nakupovali v pátek odpoledne (tj. základní množina), dále označme R, resp. T

množiny zákazníků, kteří v pátek odpoledne koupili rýži, resp. těstoviny. Přiřaďte možnosti a) - d) k jejich správným symbolickým zápisům 1) - 4).

a) množina všech zákazníků, kteří koupili alespoň jeden druh z uvedeného zboží,
b) množina všech zákazníků, kteří koupili nejvýše jeden druh z uvedeného zboží,
c) množina všech zákazníků, kteří koupili právě jeden druh z uvedeného zboží,
d) množina všech zákazníků, kteří nekoupili rýži, ale koupili těstoviny.

1) $\{x \in U; x \in R \veebar x \in T\}$,
2) $\{x \in U; x \notin R \wedge x \in T\}$,
3) $\{x \in U; x \notin R \vee x \notin T\}$,
4) $\{x \in U; x \in R \vee x \in T\}$.

32. Ve třídě s 33 žáky jsou odběratelé časopisu Sluníčko a Čtyřlístek. 20 žáků odebírá alespoň jeden z těchto časopisů, přitom 20 žáků neodebírá Sluníčko. Pouze 4 žáci odebírají oba časopisy. Kolik žáků odebírá časopis Čtyřlístek?

33. Do zoologické zahrady jelo 35 dětí z 1. ročníku. 22 z nich si koupilo párek v rohlíku, 17 z nich si koupilo kofolu. Kolik dětí si koupilo párek v rohlíku i kofolu, když víme, že 2 děti si nekoupily nic?

34. V atletice nebo v plavání soutěžilo celkem 37 dětí. V atletice jich soutěžilo o polovinu více než v plavání. Pouze v atletice jich bylo 7 krát více než v obou disciplínách současně. Kolik dětí soutěžilo v každé disciplíně?

35. Ve třídě je 40 dětí. Na kytaru nebo na flétnu jich hraje polovina třídy. Jen na kytaru jich hraje o 4 více než na flétnu a 4 krát více než těch, kteří hrají jen na flétnu. Kolik dětí hraje na kytaru, kolik dětí hraje na flétnu a kolik jich hraje na oba nástroje současně?

36. Pro studenty tří tříd maturitního ročníku (celkem 114 studentů) byly zavedeny tři opakovací kurzy. Kurz matematiky navštěvovalo 70 studentů, kurzy fyziky a chemie po 40 studentech. Do kurzů matematiky a chemie chodilo 25 studentů, kurzy matematiky a fyziky navštěvovalo 20 studentů, fyziky a chemie 15 studentů. Celkem 5 studentů navštěvovalo všechny tři kurzy. Kolik studentů nenavštěvovalo žádný z kurzů?

37. Ze 102 zaměstnanců programátorské firmy ovládá angličtinu 38 lidí, ruštinu 36 a němčinu 32 lidí. Ruštinu a němčinu ovládá 12 lidí, ruštinu a angličtinu 18, němčinu a angličtinu 7 lidí. Všechny tři jazyky současně ovládá 5 lidí. Kolik lidí neovládá žádný z uvedených jazyků? Kolik lidí ovládá jediný jazyk?

38. Ze 35 žáků jedné třídy jich bylo o prázdninách v Itálii 7 a právě tolik jich bylo ve Francii. Rakousko navštívilo 5 žáků. V žádné z těchto zemí nebylo 21 žáků, všechny tři země navštívil 1 žák. Ve Francii a Rakousku byli 2, v Rakousku a Itálii byl 1 žák. Kolik žáků navštívilo o prázdninách Itálii nebo Francii, Rakousko nebo Itálii, kolik Rakousko nebo Francii?

39. Ve Vennově diagramu znázorněte množinu:

a) $\{x \in U; x \in A \wedge x \notin B\}$,
b) $\{x \in U; (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$,
c) $\{x \in U; x \notin A \vee x \notin B\}$.

Výsledky:

1. Všechny výroky a), b), c), d), e) jsou pravdivé.

2. Pravdivé jsou výroky b), f). Nepravdivé jsou výroky a), c), d), e).

3. a) $3 \in \mathbb{N}$, $\{3\} \notin \mathbb{N}$, $\{2,3\} \notin \mathbb{N}$.
b) $3 \in \{2,3\}$, $\{3\} \notin \{2,3\}$, $\{2,3\} \notin \{2,3\}$.
c) $3 \notin \{\{3\},\{2,3\}\}$, $\{3\} \in \{\{3\},\{2,3\}\}$, $\{2,3\} \in \{\{3\};\{2,3\}\}$.

4. a) $A = \{x \in \mathbb{Z}; 4 \mid x\}$,
b) $B = \{x \in \mathbb{N}; x > \frac{5}{3}\}$,
c) $C = \{x \in \mathbb{N}; x \mid 36 \wedge x \mid 42\}$,
d) $D = \{x \in \mathbb{N}; 6 \mid x\}$,
e) $E = \{x \in \mathbb{N}; x^2 + 5x - 14 = 0\}$,
f) $F = \{x \in Z; x - 5 > 3\}$, kde $Z = \{1, 2, ..., 10\}$.

5. a) A je množina všech přirozených čísel dělitelných osmi nebo A je množina všech přirozených násobků čísla osm.
b) B je množina všech celých čísel, která jsou řešením rovnice $x^2 + 8x + 15 = 0$.
c) C je množina všech reálných čísel větších než $\sqrt{5}$.
d) D je množina všech lichých celých čísel, která jsou násobky pěti.

6. $B \subset A$, $C \subset A$, $D \subset A$, $C \subset B$, $C \subset D$, $B = D$.

7. $\mathcal{P}(M) = \{\{x\},\{y\},\{z\},\{v\},\{x,y\},\{x,z\},\{x,v\},\{y,z\},\{y,v\},\{z,v\},\{x,y,z\},\{x,y,v\},$ $\{x,z,v\},\{y,z,v\},\{x,y,z,v\},\emptyset\}$. Množina $\mathcal{P}(M)$ má 16 prvků.

8. Výrok a) je nepravdivý. Výrok b) je pravdivý.

9. Výroky c), e) jsou nepravdivé. Výroky a), b), d), f), g), h) jsou pravdivé.

10. a) $A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$, b) $A \cup C = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, c) $B \cap C = \{e\}$,
d) $A \cap B = \{a,d,e\}$, e) $A - B = \{b,c\}$, f) $B - C = \{a,d\}$,
g) $A - C = \{a,b,c,d\}$, h) $B'_A = \{b,c\}$.

11. Označme pro stručnost účastníky soutěží počátečními písmeny jejich jmen.

Množinu A všech soutěžících v anglickém jazyce, zapíšeme: $A = \{j,s,d,p\}$.

Množinu N všech soutěžících v německém jazyce, zapíšeme: $N = \{k, s, p, f, z\}$.

a) Množinu soutěžících v obou jazycích, zapíšeme:

$A \cap N = \{s, p\}$. V anglickém i německém jazyce soutěžili Stela a Pavel.

b) Množinu soutěžících v anglickém nebo německém jazyce, zapíšeme:

$A \cup N = \{k, s, p, f, z, j, d\}$. V anglickém nebo německém jazyce soutěžili Stela, Pavel, Katka, Filip, Zbyněk, Jana a Dan.

c) Množinu soutěžících jen v anglickém jazyce, zapíšeme:

$A - N = \{j, d\}$. Pouze v anglickém jazyce soutěžili Jana a Dan.

d) Množinu soutěžících jen v německém jazyce, zapíšeme:

$N - A = \{k, f, z\}$. Pouze v anglickém jazyce soutěžili Katka, Filip, Zbyněk.

e) Množinu soutěžících právě v jednom jazyce, zapíšeme:

$A \triangle N = \{j, d, k, f, z\}$. Pouze v jednom jazyce soutěžili Katka, Filip, Zbyněk, Jana a Dan.

12. V závislosti na vzájemné poloze kružnice k a přímky p v rovině může nastat právě jedna z těchto tří možností:

a) kružnice k a přímka p se neprotínají, tj. $k \cap p = \emptyset$,
b) kružnice k a přímka p se dotýkají v bodě dotyku T, tj. $k \cap p = \{T\}$,
c) kružnice k a přímka p se protínají ve dvou bodech X, Y, tj. $k \cap p = \{X, Y\}$.

13. V závislosti na vzájemné poloze přímek p a q v rovině může nastat právě jedna z těchto tří možností:

a) přímky p a q se neprotínají, tj. $p \cap q = \emptyset$,
b) přímky p a q se protínají v bodě P (tzv. průsečík přímek), tj. $p \cap q = \{P\}$,
c) přímky p a q jsou totožné ($p = q$), tj. $p \cap q = p$.

14. a) $X = \{2, 3, 5, 7\}$, b) $X = \{3, 6, 9\}$, c) $X = \{1, 3, 5, 7\}$

15. a) $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4\}$, $A' = \{1\}$, $B' = \{1, 2\}$, $A' \triangle B' = \{2\}$, $A' - (B' \cup A) = \emptyset$.

b) $A = \{1\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, $A' = \{2, 3, 4\}$, $B' = \{3\}$, $A' \triangle B' = \{2, 4\}$, $A' - (B' \cup A) = \{2, 4\}$.

16. a) $A = \{a, c, d\}$, b) $B = \{b, c, d\}$,

c) $A' = \{b\}$, $B' = \{a\}$, $A' \cap B' = \emptyset$, $A \cap B = \{c, d\}$, $(A' \cap B') - (A \cap B) = \emptyset$,

d) $A \triangle B = \{a, b\}$, $A' \triangle B' = \{a, b\}$, $(A \triangle B) \cup (A' \triangle B') = \{a, b\}$.

17. a) $A = \{2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$,

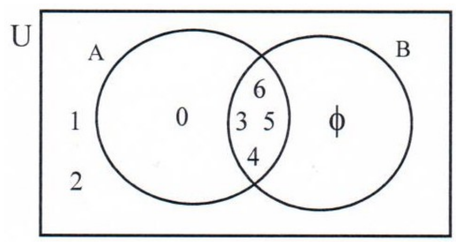
b) úloha má dvě řešení: $A_1 = \{2, 5\}$, $B_1 = \{4\}$; $A_2 = \{2\}$, $B_2 = \{4, 5\}$,

c) $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 5, 6\}$,

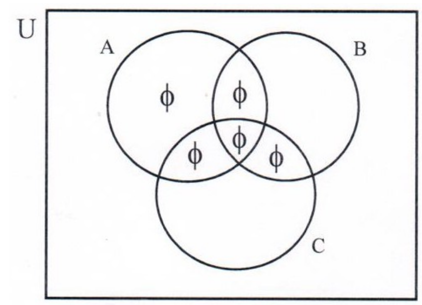
d) úloha nemá řešení (nelze, aby $1 \in A$ a současně $1 \in A'$).

18. $A = \{0, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Výroky a), b), d), e) jsou pravdivé. Výroky c), f) jsou nepravdivé. Znázornění zadané situace je na obrázku 1.25.

19. Znázornění zadané situace je na obrázku 1.26. Výroky a), d) jsou pravdivé. O pravdivosti výroků b), c), e), f), g), h) nelze rozhodnout.

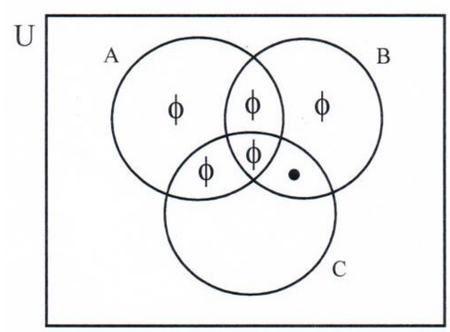


Obr. 1.25:

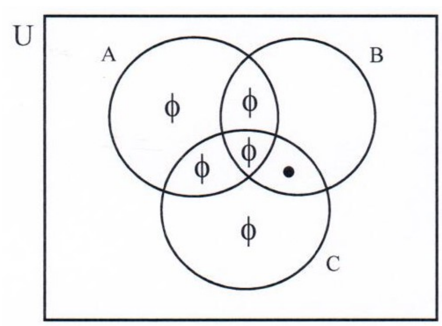


Obr. 1.26:

20. a) Znázornění zadané situace je na obrázku 1.27. Výroky 1), 3), 4), 6), 7) jsou pravdivé. O pravdivosti výroků 2), 5) nelze rozhodnout. Výrok 8) je nepravdivý.



Obr. 1.27:



Obr. 1.28:

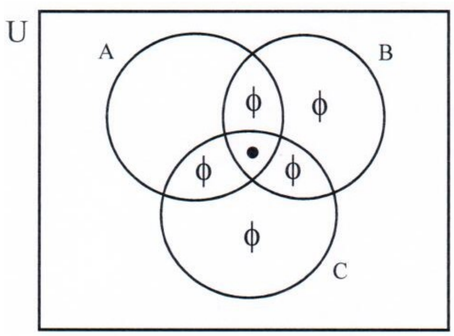
b) Znázornění zadané situace je na obrázku 1.28. Výroky 1), 3), 4), 6), 7) jsou pravdivé. O pravdivosti výroků 2), 5) nelze rozhodnout. Výrok 8) je nepravdivý.

c) Znázornění zadané situace je na obrázku 1.29. Výroky 1), 5), 6), 8) jsou pravdivé. O pravdivosti výroku 7) nelze rozhodnout. Výroky 2), 3), 4) jsou nepravdivé.

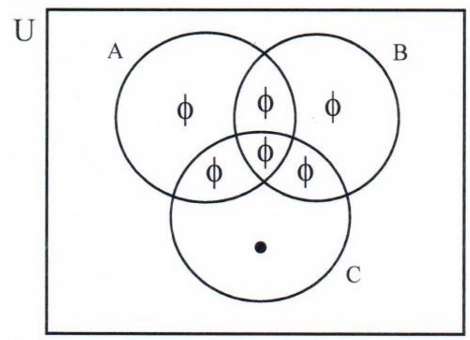
21. a) Znázornění zadané situace je na obrázku 1.30. Výroky 1), 2), 4), 5) jsou pravdivé. O pravdivosti výroku 6) nelze rozhodnout. Výrok 3) je nepravdivý.

b) Znázornění zadané situace je na obrázku 1.31. Výroky 2), 4), 5) jsou pravdivé. O pravdivosti výroků 1), 3), 6) nelze rozhodnout.

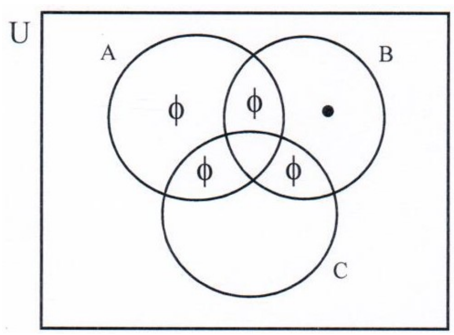
22. Úloha má 4 řešení: $B_1 = \{3, 5\}$, $B_2 = \{3, 5, 6\}$, $B_3 = \{2, 3, 5\}$, $B_4 = \{2, 3, 5, 6\}$.



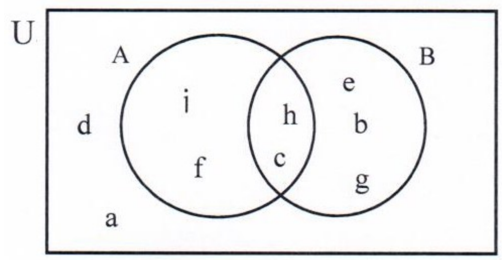
Obr. 1.29:



Obr. 1.30:



Obr. 1.31:



Obr. 1.32:

23. Množina M má 34 prvků, K má 48 prvků, průnik $M \cap K$ má 6 prvků a sjednocení $M \cup K$ má 76 prvků.

24. a) ano, b) ano, c) ne, d) ano, e) ano, f) ne.

25. a) $A' = \{b, e, a, d, g\}$, b) $A \cup B = \{b, c, g, e, h, f, j\}$, c) $A \cap B = \{c, h\}$, d) $A - B = \{f, j\}$, e) $B - A = \{b, e, g\}$, f) $A \triangle B = \{f, j, b, e, g\}$.

Situace je znázorněna na obrázku 1.32:

26. $K = \{c, m, p, v, r\}$, $L = \{p, a, c, k, r, u\}$, $U = \{p, a, c, k, r, u, m, v, j, b\}$.

27. a) Postupným znázorňováním množin zapsaných v jednotlivých závorkách určíme, že množina L je složena z komponent K_1, K_2, K_4, K_5, K_6 a množina P je složena z komponent K_2, K_3, K_5, viz obrázky 1.33 a 1.34. Odtud získáme následující závěry:

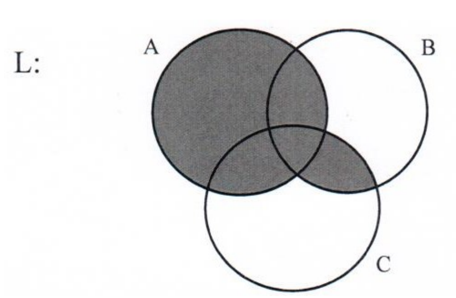
a) Je-li $A \cap B' = \emptyset \ \wedge \ A' \cap B \cap C = \emptyset$, pak je $L \subset P$,

b) Je-li $A' \cap B \cap C' = \emptyset$, pak je $P \subset L$,

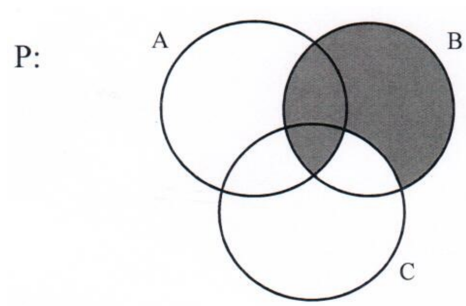
c) Je-li $L \subset P \ \wedge \ P \subset L$, pak je $L = P$: je-li $A \triangle B = \emptyset$, pak je $L = P$,

d) Je-li $A \triangle B \neq \emptyset$, pak je $L \neq P$.

b) Postupným znázorňováním množin zapsaných v jednotlivých závorkách vybarvíme pole v množinových diagramech zobrazujících množiny L a P, viz obrázky 1.35 a 1.36. Tímto získáme následující závěry:

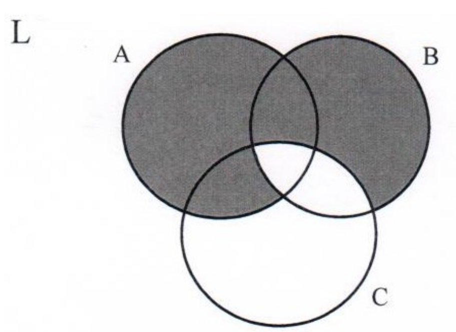


Obr. 1.33:

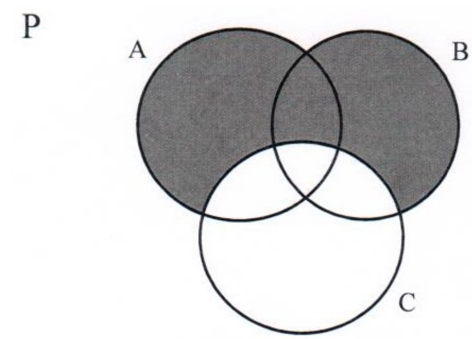


Obr. 1.34:

1) Je-li $A \cap B' \cap C = \emptyset$, pak je $L \subset P$,
2) $P \subset L$ platí vždy,
3) Je-li $A \cap B' \cap C = \emptyset$, pak je $L = P$,
4) Je-li $A \cap B' \cap C \neq \emptyset$, pak je $L \neq P$.



Obr. 1.35:



Obr. 1.36:

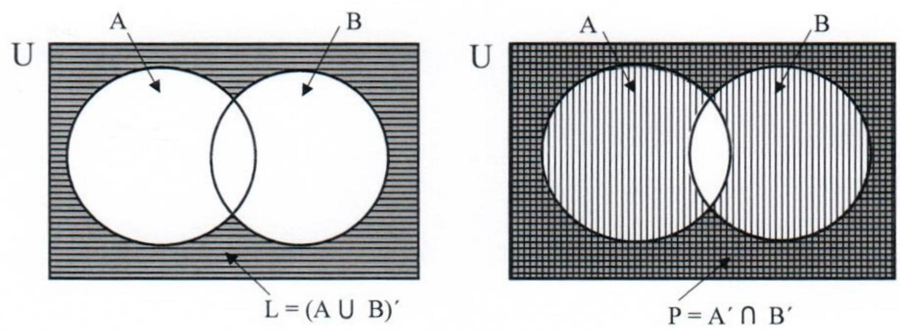
28. Množiny znázorněné ve Vennových diagramech na obrázcích lze zapsat symbolicky více způsoby. Možná řešení jsou:

a) $\{x \in U; x \notin A \vee x \in B\}$,
b) $\{x \in U; x \notin A \wedge x \notin B\}$,
c) $\{x \in U; x \notin B\}$.

29. a) V rovnosti $(A \cup B)' = A' \cap B'$ označme množinu na levé straně $L = (A \cup B)'$ a množinu na pravé straně $P = A' \cap B'$. Ve Vennově diagramu obě množiny L, P znázorníme, viz obrázek 1.37, a výsledky porovnáme. Z obrázku je zřejmé, že $L = P$.

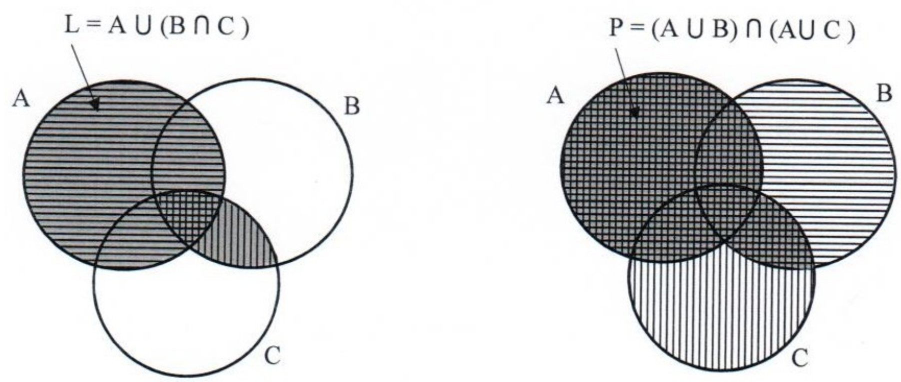
b) V rovnosti $(A \cap B)' = A' \cup B'$ označme množinu na levé straně $L = (A \cap B)'$ a množinu na pravé straně $P = A' \cup B'$. Ve Vennově diagramu obě množiny L, P znázorníme a výsledky porovnáme. Porovnáním výsledků dospějeme k závěru, že $L = P$. Tvorbu obrázku ponecháváme na čtenáři.

30. a) V rovnosti $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ označme množinu na levé straně $L = A \cup (B \cap C)$ a množinu na pravé straně $P = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Ve



Obr. 1.37:

Vennově diagramu obě množiny L, P znázorníme, viz obrázek 1.38, a výsledky porovnáme. Z obrázku je zřejmé, že $L = P$.



Obr. 1.38:

b) V rovnosti $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ označme množinu na levé straně $L = A \cap (B \cup C)$ a množinu na pravé straně $P = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Ve Vennově diagramu obě množiny L, P znázorníme a výsledky porovnáme. Porovnáním výsledků dospějeme k závěru, že $L = P$. Tvorbu obrázku ponecháváme na čtenáři.

31. a) - 4), b) - 3), c) - 1), d) - 2).

32. Časopis Čtyřlístek odebírá 11 žáků.

33. 6 dětí si koupilo párek v rohlíku i kofolu.

34. V atletice soutěžilo 24 dětí, v plavání jich soutěžilo 16.

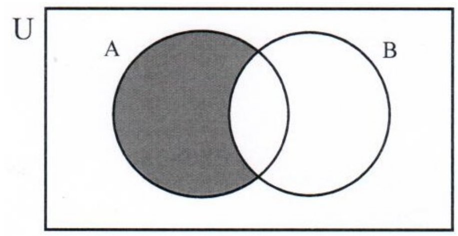
35. Na kytaru hraje 17 dětí, na flétnu hraje 8 dětí. 5 dětí hraje současně na oba nástroje.

36. 19 studentů nechodilo do žádného kurzu.

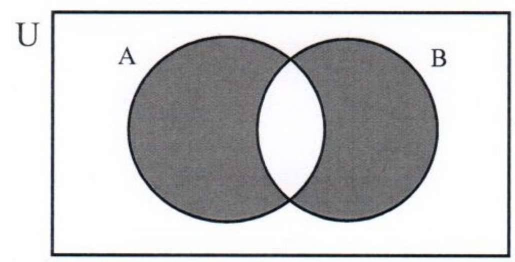
37. V programátorské firmě neovládá cizí jazyk 28 lidí, celkem 27 lidí ovládá pouze jeden jazyk.

38. Itálii nebo Francii navštívilo 11 žáků, Rakousko nebo Itálii navštívilo 11 žáků a Rakousko nebo Francii navštívilo 10 žáků.

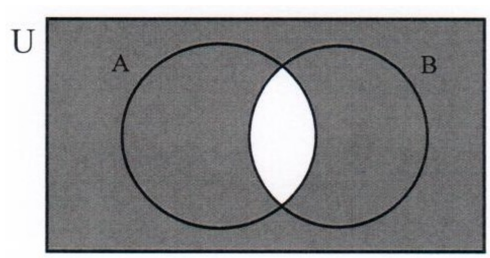
39. a) viz 1.39, b) viz 1.40, c) viz 1.41.



Obr. 1.39:



Obr. 1.40:



Obr. 1.41:

1.5 Definice, matematické věty a pravidla odvozování

Každá matematická disciplína pracuje s matematickými pojmy, které zavádíme prostřednictvím definic. Vlastnosti matematických pojmů následně odvozujeme a formulujeme do výroků, kterým říkáme matematické věty. V předcházejících dvou kapitolách jsme měli možnost se seznámit se základními logickými a matematickými pojmy (výrok, množina). V této kapitole si upřesníme a doplníme dosavadní poznatky o zavádění nových matematických pojmů a ukážeme, jak vlastnosti těchto pojmů odvozovat a následně ověřovat.

1.5.1 Matematická definice

Matematickou definicí rozumíme gramatickou větu, kterou přesně vymezujeme význam nějakého matematického pojmu pomocí pojmů základních nebo dříve zavedených. Současně tak vymezujeme podstatné vlastnosti zaváděného pojmu, stanovujeme jeho název, případně symbolické označení.

Příklady matematických definic:

- Těžnice je úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem protější strany.
- Celé číslo je sudé právě tehdy, je-li dělitelné dvěmi.
- Čtverec je pravoúhlý rovnostranný čtyřúhelník.
- Osa úsečky je přímka, která prochází středem této úsečky a je kolmá k přímce, která danou úsečku obsahuje.
- Kružnice je množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu stejnou nenulovou vzdálenost.

Každý matematický pojem má obsah a rozsah.

Obsah pojmu je soubor všech vlastností, které jsou pro tento pojem charakteristické.

Rozsah pojmu vymezuje množinu všech prvků, které mají charakteristické vlastnosti stanovené jeho obsahem.

Význam obsahu a rozsahu pojmu objasníme na příkladu ROVNOBĚŽNÍKU v následující poznámce:

Poznámka 1.13 Definice pojmu ROVNOBĚŽNÍK je následující:

Rovnoběžník je čtyřúhelník, jehož protější strany jsou rovnoběžné. (1.25)

Do obsahu pojmu ROVNOBĚŽNÍK patří všechny vlastnosti, které tento geometrický útvar má. Některé charakteristické znaky obsahu pojmu ROVNOBĚŽNÍK jsou:

a) Rovnoběžník je rovinný útvar.
b) Rovnoběžník je čtyřúhelník.
c) Rovnoběžník má protilehlé strany rovnoběžné.
d) Rovnoběžník má čtyři vrcholy.
e) Rovnoběžník má čtyři strany.

Rozsahem pojmu ROVNOBĚŽNÍK je množina všech rovnoběžníků. Označme tuto množinu $\mathcal{R}$.

Pokud bychom charakterizovali rovnoběžník pouze jako čtyřúhelník, vymezili bychom obsah tohoto pojmu nedostatečně, neboť čtyřúhelníkem je například i lichoběžník. Pokud bychom charakterizovali rovnoběžník pouze jako rovinný útvar, opět nebude tento pojem vymezen jednoznačně, neboť rovinným útvarem je i trojúhelník.

Pro formulaci definice pojmu rovnoběžník vybereme ze seznamu znaků obsahu tohoto pojmu takové vlastnosti, které přesně pojem rovnoběžník vymezují. Pojem rovnoběžník bychom tak mohli definovat několika různými způsoby. Například pro zavedení pojmu rovnoběžníku v definici 1.25 výše byly vybrány charakteristické znaky b), c).

Platí obecné pravidlo: Když zvětšíme obsah pojmu, zúží se jeho rozsah a naopak.

Pro učitele 1. stupně ZŠ je dále důležité **třídění matematických pojmů**. Nejjednodušší je tzv. **třídění dichotomické**, které provádíme následovně: K obsahu daného pojmu přidáme další znak, který má alespoň jeden prvek rozsahu, ale ne všechny prvky rozsahu. Tak provedeme rozdělení rozsahu pojmu na dvě podmnožiny (třídy). Každou z takto vzniklých podmnožin můžeme dále analogicky rozložit na dvě nové skupiny.

Vrátíme-li se zpět k pojmu ROVNOBĚŽNÍK, můžeme k jeho obsahu připojit další znak, který má některý prvek z jeho rozsahu. Uvažujme například znak: "Všechny úhly rovnoběžníku jsou pravé." Tímto se rozpadne rozsah pojmu ROVNOBĚŽNÍK (množina všech rovnoběžníků $\mathcal{R}$) na dvě disjunktní neprázdné podmnožiny (třídy):

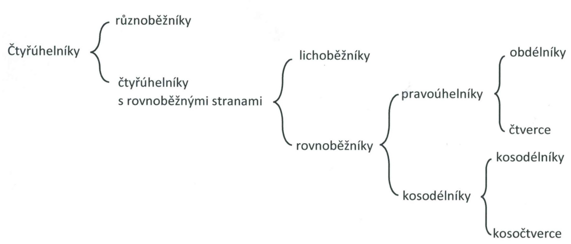
- $\mathcal{R}_1$ - množina všech pravoúhelníků,
- $\mathcal{R}_2$ - množina všech kosoúhelníků,

přičemž platí $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}$. Každou z takto vzniklých podmnožin $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ můžeme opět rozložit na dvě skupiny dle další vlastnosti obsahu pojmu ROVNOBĚŽNÍK.

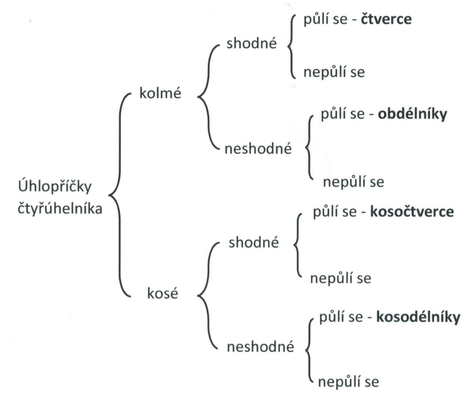
Správně provedené třídění dává přehled o vlastnostech a vztazích objektů, které náleží do rozsahu daného pojmu a je důležité pro vytvoření vhodné terminologie. Řadu příkladů třídění matematických pojmů známe ze školské matematiky (a nejen z matematiky). V příkladu 1.42 je vysvětleno třídění pojmu ČTYŘÚHELNÍK.

Příklad 1.42 Proveďte třídění pojmu ČTYŘÚHELNÍK.
Řešení: Čtyřúhelníky můžeme třídit podle různých kritérií. Třídění čtyřúhelníků lze provést například podle toho, zda mají některé dvojice stran rovnoběžné, případně shodné, zda jsou některé jejich strany na sebe kolmé apod. Tento způsob třídění čtyřúhelníků vyjadřuje schéma na obrázku 1.42.

Jiné třídění čtyřúhelníků lze provádět vzhledem k vlastnostem jeho úhlopříček, jak znázorňuje schéma na obrázku 1.43.



Obr. 1.42:



Obr. 1.43:

Z textu výše je zřejmé, že samotná definice formuluje takové charakteristické vlastnosti (znaky) daného pojmu, že jsme schopni podle nich o každém objektu rozhodnout, zda patří do rozsahu daného pojmu či nikoliv. Definice má tedy obsahovat všechny znaky, z nichž vyplývají všechny ostatní vlastnosti tvořící obsah pojmu. Definice přitom nemá obsahovat více charakteristických vlastností pojmů, než je k přesnému vymezení nutné (ve školské matematice na těchto požadavcích z metodických důvodů nemusíme někdy trvat).

Nový pojem v definici zavádíme jen pomocí pojmů, které již známe a které byly zavedeny dříve. Budujeme-li však od počátku nějakou matematickou disciplínu, nelze zavádět základní pojmy výše uvedeným způsobem, neboť na samém počátku ještě nemáme žádné pojmy zavedeny. Základní pojmy tedy zavádíme prostřednictvím soustavy základních vět, kterým říkáme **axiomy**, v nichž se tyto základní pojmy vyskytují. Současně jsou v nich uvedeny vztahy, které mezi těmito základními pojmy jsou. Utvořit vhodnou soustavu axiomů jako základ nějaké vědní disciplíny vyžaduje několik důležitých momentů. Axiomy totiž nelze dokázat, jejich pravdivost předpokládáme a vycházíme z nich při důkazech dalších vlastností nově zaváděných pojmů. Tyto axiomy tedy nahrazují přímo definice základních pojmů - v tomto případě tedy hovoříme o **implicitní definici**. Zavádíme-li nový pojem pomocí pojmů, které již známe, hovoříme o **explicitní definici**.

Zavedení základních pojmů matematické disciplíny prostřednictvím soustavy axiomů je složité a náročné a z těchto důvodů není možné jej na základních školách použít. Proto, zejména v nižších ročnících, zavádíme základní pojmy intuitivně. Explicitní definice však již ve školské matematice používáme běžně.

Ve školním vyučování se bohužel objevuje při zavádění nových pojmů řada nedostatků či nepřesností. Chybně vytvořené definice ve školské matematice mohou být následující:

a) **Definice široká** - neobsahuje všechny charakteristické znaky, které je třeba k přesnému vymezení pojmu uvést.

   Příklad široké definice:

- Rovnoběžník je čtyřúhelník.

b) **Definice úzká** - obsahuje alespoň jeden znak, který nepatří do obsahu příslušného pojmu.

Příklad úzké definice:

- Množina všech celých čísel je množina všech přirozených čísel a všech čísel k nim opačných.

c) **Definice nadbytečná** - obsahuje více charakteristických znaků, než je nutné.

Příklad nadbytečné definice:

- Rovnoběžník je čtyřúhelník, který má čtyři strany, z nichž protější jsou rovnoběžné.

d) **Definice kruhem** - odkazuje na pojem, který má být vysvětlen.

Příklady definice kruhem:

- Množina je konečná, má-li konečný počet prvků.
- Čtverec je čtyřúhelník, který má čtvercový tvar.

V textu bylo již výše zmíněno, že řadu pojmů lze definovat více způsoby. Hovoříme pak o **ekvivalentních definicích**. Hlavním kritériem u ekvivalentních definic je, aby byl splněn požadavek, že definované pojmy mají stejný obsah i rozsah.

1.5.2 Matematická věta

Matematickou větou rozumíme pravdivý výrok s matematickým obsahem. Její pravdivost lze dokázat. Někdy se matematické větě též říká **matematická poučka** nebo **teorém**.

Příklady matematických vět:

1) Jestliže je přirozené číslo dělitelné šesti, pak je dělitelné i třemi.
2) Číslo $\sqrt{2}$ není racionální číslo.
3) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
4) Pro každé dvě množiny A, B platí: $(A \cap B)' = A' \cup B'$.
5) Součet dvou sudých přirozených čísel je číslo sudé.
6) Celé číslo je dělitelné čtyřmi právě tehdy, když číslo zapsané jeho posledním dvojčíslím je dělitelné čtyřmi.

Z uvedených příkladů matematických vět je patrno, že mohou mít různou stavbu. Rozlišujeme tyto základní druhy matematických vět ve tvaru kvantifikovaných výroků:

1. **Věta typu obecného výroku**: "Pro každé $x \in D$ platí $v(x)$", kde $v(x)$ je daná výroková forma proměnné x a D je definiční obor výrokové formy $v(x)$. Symbolicky tuto větu vyjádříme:

$$\forall x \in D : v(x).$$

Příkladem matematické věty obecného výroku je tvrzení 2) výše. Tuto větu lze přeformulovat do tvaru: "Pro každé racionální číslo x platí: $x \neq \sqrt{2}$." Pomocí matematické symboliky zapíšeme tuto větu:

$$\forall x \in \mathbb{Q} : x \neq \sqrt{2}.$$

Většina matematických vět je formulována ve tvaru kvantifikovaných výroků, v nichž vyjadřujeme výrokovou formu $v(x)$:

a) ve tvaru implikace výrokových forem $p(x) \Rightarrow q(x)$,
b) ve tvaru ekvivalence výrokových forem $p(x) \Leftrightarrow q(x)$.

Rozlišujeme pak:

ad a) **Větu typu obecného výroku ve tvaru implikace**: "Pro každé $x \in D$ platí, že jestliže $p(x)$, pak je $q(x)$." Symbolicky vyjádřeno:

$$\forall x \in D : p(x) \Rightarrow q(x). \tag{1.26}$$

Výroková forma $p(x)$ v této větě se pak nazývá **předpoklad (premisa) věty** a výroková forma $q(x)$ se nazývá **závěr (tvrzení) věty**. Přitom $p(x)$ je **postačující podmínkou pro** $q(x)$ a $q(x)$ je **nutnou podmínkou pro** $p(x)$.
Příkladem matematické věty tohoto typu je věta 1) výše, kterou lze přeformulovat do tvaru: "Pro každé přirozené číslo n platí: jestliže n je dělitelné šesti, pak je n dělitelné i třemi." Pomocí matematické symboliky zapíšeme tuto větu:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 6|n \Rightarrow 3|n.$$

Tuto matematickou větu lze také zformulovat následujícím způsobem:
"Postačující podmínkou, aby přirozené číslo n bylo dělitelné třemi, je, aby n bylo dělitelné šesti."
"Nutnou podmínkou, aby přirozené číslo n bylo dělitelné šesti, je, aby n bylo dělitelné třemi."

ad b) **Větu typu obecného výroku ve tvaru ekvivalence**: "Pro každé $x \in D$ platí $p(x)$ právě tehdy, když platí $q(x)$." Symbolicky vyjádřeno:

$$\forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow q(x). \tag{1.27}$$

Příkladem matematické věty tvaru ekvivalence je věta 6) výše: "Celé číslo je dělitelné čtyřmi právě tehdy, když číslo zapsané jeho posledním dvojčíslím je dělitelné čtyřmi."

2. **Věta typu existenčního výroku**: "Existuje (alespoň jedno) $x \in D$, pro které platí $v(x)$." Symbolicky tuto větu vyjádříme:
$$\exists x \in D : v(x).$$
3. **Věta typu výroku o existenci a jednoznačnosti**: "Existuje právě jedno $x \in D$, pro které platí $v(x)$. " Symbolicky tuto větu vyjádříme:
$$\exists! x \in D : v(x).$$

Poznámka 1.14 Pro naše další úvahy budeme dále používat matematickou větu typu obecného výroku ve tvaru implikace, viz 1.26:
$$\forall x \in D : p(x) \Rightarrow q(x).$$
Pro tento typ věty definujeme **obrácený výrok** tvaru
$$\forall x \in D : q(x) \Rightarrow p(x), \tag{1.28}$$
a **obměněnou větu** tvaru
$$\forall x \in D : \neg q(x) \Rightarrow \neg p(x). \tag{1.29}$$

Z vlastností obráceného výroku 1.28 a obměněné věty 1.29 k dané matematické větě 1.26 ve tvaru implikace vyplývá, že

- **obrácený výrok k dané větě nemusí být matematická věta** (tj. nemusí se jednat o pravdivý výrok). Lehce se přesvědčíme o tom, že například obrácený výrok k matematické větě "Součet dvou sudých přirozených čísel je číslo sudé." není pravdivý. Ve tvaru implikace tuto větu zformulujeme: "Pro libovolná přirozená čísla x, y platí: jsou-li x, y sudá čísla, pak je i $x + y$ sudé číslo." Obrácený výrok k této větě je: "Pro libovolná přirozená čísla x, y platí: je-li $x + y$ sudé číslo, pak i čísla x, y jsou sudá." Tento výrok je nepravdivý, stačí položit například $x = 1$, $y = 5$. Jejich součet $x + y$ je sudé číslo, ale x, y nejsou sudá čísla.

- **obměněná věta k dané větě je s ní logicky ekvivalentní**. Snadno se přesvědčíme (pomocí tabulky pravdivostních hodnot), že výrok
$$\forall x \in D : [p(x) \Rightarrow q(x)] \Leftrightarrow [\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)]$$
je tautologií, tedy vždy pravdivý. Původní matematická věta
$$\forall x \in D : p(x) \Rightarrow q(x).$$
a její obměněná věta
$$\forall x \in D : \neg q(x) \Rightarrow \neg p(x).$$
jsou ekvivalentní. Obměněná věta k dané matematické větě je tedy také matematickou větou.

Poznámka 1.15 Matematická věta 1.27 typu obecného výroku ve tvaru ekvivalence

$$\forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

vyjadřuje, že platí věta 1.26 ve tvaru implikace a současně její obrácený výrok 1.28.

Příklad 1.43 Uvažujme matematickou větu ve tvaru implikace: "Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: Jestliže je číslo n dělitelné šesti, pak je n dělitelné třemi." Utvořte k této větě:

a) větu obměněnou,
b) obrácený výrok,
c) negaci věty

a rozhodněte o jejich pravdivosti.[4]

Řešení:

a) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: Jestliže číslo n není dělitelné třemi, není dělitelné šesti. (pravdivý výrok, jedná se o matematickou větu)
b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: Je-li číslo n dělitelné třemi, je dělitelné šesti. (nepravdivý výrok, nejedná se o matematickou větu)
c) Existuje $n \in \mathbb{N}$, pro které platí: Číslo n je dělitelné šesti a zároveň není dělitelné třemi. (nepravdivý výrok, nejedná se o matematickou větu)

1.5.3 Pravidla odvozování

V běžném životě často vyvozujeme různé závěry z daných předpokladů. Pokud vycházíme z pravdivých výroků (předpokladů) a úsudek je správně formálně sestaven, je důsledek (závěr, tvrzení) rovněž správný. Ne všechny úsudky běžného života jsou však sestaveny správně. V dalším textu si proto ukážeme, jak lze rozhodnout, zda vyslovený úsudek je správný.

Definice 1.1: Říkáme, že **z výrokové formule** p **plyne (vyplývá) výroková formule** q právě tehdy, když výroková formule $p \Rightarrow q$ je tautologie. Tuto skutečnost zapíšeme $\frac{p}{q}$.

Předpokládáme-li s ohledem na definici 1.1, že výroková formule $p \Rightarrow q$ je tautologie (tj. z výrokové formule p plyne výroková formule q), pak platí: nabývá-li výroková formule p pravdivostní hodnoty 1, musí nabývat pravdivostní hodnoty 1 i výroková formule q (viz tabulka 1.2). Říkáme proto také, že **z pravdivosti výroku** p **plyne pravdivost výroku** q.

Napíšeme-li obecně zápis

$$\frac{p_1, p_2, \dots, p_n}{q_1, q_2, \dots, q_m},$$

[4] Pravidla pro negaci jednoduchých kvantifikovaných výroků byla zavedena v kapitole 1.3.2 v tabulce 1.7.

kde $p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_m$ jsou výrokové formule, znamená to, že výroková formule

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \Rightarrow (q_1 \wedge q_2 \wedge ... \wedge q_m) \tag{1.30}$$

je tautologie, neboť z pravdivosti všech výroků $p_1, p_2, ..., p_n$ plyne pravdivost všech výroků $q_1, q_2, ..., q_m$.

Na základě definice 1.1 můžeme nalézt celou řadu případů, kdy z pravdivosti několika výroků vyplývá pravdivost jiných výroků. Takové případy nazýváme **pravidla odvozování** a užíváme je pro odvozování pravdivých výroků z výroků, které již za pravdivé předpokládáme. Pro posouzení správnosti pravidla stačí sestavit tabulku pravdivostních hodnot příslušné formule 1.30. Používáme-li pravidla odvozování, říkáme, že **správně usuzujeme** nebo též, že náš **úsudek je správný**.

Uvedeme několik pravidel odvozování, z nichž řadu používáme, aniž si to uvědomujeme. Podle definice 1.1 se lze snadno přesvědčit, že uvedené zápisy jsou zápisy pravidel odvozování (tj. příslušné výrokové formule jsou tautologie).

$$\frac{p \wedge q}{p}, \qquad \frac{p}{p \vee q}, \qquad \frac{p,\ \neg(p \wedge q)}{\neg q}, \qquad \frac{p \Rightarrow q,\ \neg q}{\neg p}.$$

Příklad 1.44 Jsou dány výrokové formule p, q. Rozhodněte, zda dané zápisy jsou zápisy správného odvozování:

a) $\dfrac{p \Rightarrow q,\ p}{q}$, b) $\dfrac{p \Rightarrow q,\ \neg p}{\neg q}$.

Řešení:

a) Zápis $\dfrac{(p \Rightarrow q),\ p}{q}$ přepíšeme do zápisu výrokové formule $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$. Pravdivostní hodnoty této výrokové formule určíme pomocí tabulky:

[(p	$\Rightarrow$	q)	$\wedge$	p]	$\Rightarrow$	q
1	1	1	1		1	
1	0	0	0		1	
0	1	1	0		1	
0	1	0	0		1	

Z tabulky je zřejmé, že výroková formule $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ je tautologie, tedy zápis $\dfrac{(p \Rightarrow q),\ p}{q}$ je zápisem správného odvozování (z pravdivosti výroků $p \Rightarrow q$ a p vyplývá pravdivost výroku q).

b) Zápis $\dfrac{p \Rightarrow q,\ \neg p}{\neg q}$ přepíšeme do zápisu výrokové formule $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg p] \Rightarrow \neg q$. Pravdivostní hodnoty této výrokové formule určíme pomocí tabulky:

$[\,(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$\neg p\,]$	$\Rightarrow$	$\neg q$
1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1

Z tabulky je zřejmé, že výroková formule $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg p] \Rightarrow \neg q$ není tautologie, tedy zápis $\dfrac{p \Rightarrow q,\, \neg p}{\neg q}$ není zápisem správného odvozování.

V následujícím odstavci ukážeme, jak lze využít pravidel odvozování k provádění důkazů matematických vět.

1.5.4 Důkaz matematické věty

Důkazem matematické věty je logické odvození její platnosti (pravdivosti), při kterém se vychází z definic, axiomů a matematických vět dříve dokázaných.

Připomeňme, že matematickou větu lze obvykle vyslovit jako obecný výrok ve tvaru implikace, kterou zapíšeme symbolicky:

$$\forall x \in D : p(x) \Rightarrow q_(x). \tag{1.31}$$

V dalším textu si představíme základní důkazy matematických vět typu obecného výroku ve tvaru implikace 1.31:

1. **Přímý důkaz** matematické věty je nejčastěji používaným důkazem ve školské matematice. Přímý důkaz implikace 1.31 vychází z pravdivosti předpokladu $p(x)$, z něhož postupně odvozujeme další pravdivá tvrzení s cílem odvodit pravdivost závěru $q(x)$. Přímý důkaz matematické věty 1.31 je tedy založený na tautologii

   $$\forall x \in D : [(p(x) \Rightarrow r(x)) \wedge (r(x) \Rightarrow q(x))] \Rightarrow [p(x) \Rightarrow q(x)].$$

   Uvedenou tautologii lze zapsat stručně:

   $$\forall x \in D : [p(x) \Rightarrow r(x) \Rightarrow q(x)] \Rightarrow [p(x) \Rightarrow q(x)].$$

   Tato tautologie vyjadřuje skutečnost, že pokud pro $\forall x \in D$ platí $p(x) \Rightarrow r(x)$ a současně $r(x) \Rightarrow q(x)$, pak pro $\forall x \in D$ platí $p(x) \Rightarrow q(x)$. Obecně lze tedy tuto tautologii napsat jako řetězec implikací

   $$\forall x \in D : [(p(x) \Rightarrow p_1(x)) \wedge (p_1(x) \Rightarrow p_2(x)) \wedge ... \wedge (p_n(x) \Rightarrow q(x))] \Rightarrow [p(x) \Rightarrow q(x)].$$

   Pro tento řetězec implikací lze použít stručnější zápis:

   $$\forall x \in D : [p(x) \Rightarrow p_1(x) \Rightarrow p_2(x) \Rightarrow ... \Rightarrow p_n(x) \Rightarrow q(x)] \Rightarrow [p(x) \Rightarrow q(x)].$$

   Postup přímého důkazu matematické věty je založen na sestavení řetězce pravdivých implikací:

$$\begin{gathered}\forall x \in D : p(x) \Rightarrow p_1(x)\\ \forall x \in D : p_1(x) \Rightarrow p_2(x)\\ \vdots\\ \forall x \in D : p_n(x) \Rightarrow q(x).\end{gathered}$$

Na základě tohoto řetězce odvodíme z pravdivého předpokladu $p(x)$ pravdivý závěr $q(x)$.

Metodu přímého důkazu budeme ilustrovat na následujícím příkladu.

Příklad 1.45 Součin sudého a lichého čísla je sudé číslo. Dokažte.

Řešení: Matematickou větu vyjádřenou slovně zformulujeme do tvaru implikace:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : (x \text{ je sudé} \wedge y \text{ je liché}) \Rightarrow x \cdot y \text{ je sudé.}$$

Důkaz: Předpokládáme, že x je sudé a y liché. Tato čísla lze tedy zapsat: $x = 2 \cdot k$, $y = 2 \cdot l + 1$, kde $k, l \in \mathbb{Z}$. Vyjdeme-li z tohoto vyjádření čísel x, y, pak jejich součin $x \cdot y$ zapíšeme:

$$x \cdot y = 2 \cdot k \cdot (2 \cdot l + 1).$$

Označme $m = k \cdot (2 \cdot l + 1)$, kde $m \in \mathbb{Z}$. Pak $x \cdot y = 2 \cdot m$. Z poslední rovnosti je zřejmé, že $x \cdot y$ je sudé číslo. Dokázali jsme, že součin sudého a lichého čísla je číslo sudé.

2. **Nepřímý důkaz** matematické věty používáme zpravidla v situaci, kdy se nám danou větu nepodařilo dokázat důkazem přímým. Princip nepřímého důkazu matematické věty 1.31 tvaru implikace spočívá v tom, že přímým důkazem dokážeme její větu obměněnou

   $$\forall x \in D : \neg q(x) \Rightarrow \neg p(x),$$

   která je s ní logicky ekvivalentní. Při nepřímém důkazu matematické věty 1.31 tedy využíváme následující tautologii:

   $$\forall x \in D : [p(x) \Rightarrow q(x)] \Leftrightarrow [\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)].$$

Na následujícím příkladu ukážeme postup při nepřímém důkazu matematické věty.

Příklad 1.46 Jestliže je n^2 liché číslo, pak i číslo n je liché. Proveďte nepřímý důkaz tohoto tvrzení.

Řešení: Matematickou větu vyjádřenou slovně zformulujeme do tvaru implikace:

$$\forall n \in \mathbb{Z} : n^2 \text{ je liché} \Rightarrow n \text{ je liché.}$$

Přímým důkazem bychom toto tvrzení dokazovali obtížně. Budeme proto větu dokazovat nepřímo, tedy dokážeme větu obměněnou, kterou zapíšeme v následujícím tvaru:

$$\forall n \in \mathbb{Z} : n \text{ je sudé} \Rightarrow n^2 \text{ je sudé.}$$

Obměněnou větu nyní dokážeme přímo:

Důkaz: V obměněné větě předpokládáme, že n je sudé, tedy $n = 2 \cdot k$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Pak mocninu n^2 zapíšeme:

$$n^2 = 2 \cdot k \cdot 2 \cdot k = 2 \cdot 2 \cdot k \cdot k.$$

Označme $l = 2 \cdot k \cdot k$, kde $l \in \mathbb{Z}$. Pak $n^2 = 2 \cdot l$, tj. n^2 je sudé číslo. Dokázali jsme větu obměněnou a tím jsme dokázali i původní větu, tj. pokud je druhá mocnina n^2 celého čísla n číslo liché, pak je n liché číslo.

3. **Důkaz sporem** matematické věty spočívá v tom, že dokážeme nepravdivost její negace. Při důkazu sporem totiž předpokládáme, že matematická věta 1.31 tvaru implikace neplatí, tedy předpokládáme, že platí její negace. Negací tvrzení

$$\forall x \in D : p(x) \Rightarrow q(x).$$

získáváme existenční výrok[5]

$$\exists x \in D : p(x) \wedge \neg q(x).$$

Z tohoto předpokladu odvodíme přímým důkazem (řetězcem implikací) výrok, který je se samotným předpokladem v rozporu nebo nějaký jiný nepravdivý výrok. Dokážeme tak, že negace původní věty neplatí a platí původní věta 1.31, čímž je její pravdivost dokázána.

Na následujícím příkladu ukážeme postup při důkazu sporem matematické věty.

Příklad 1.47 Jestliže je n^2 liché číslo, pak i číslo n je liché.[6] Dokažte sporem.

Řešení: Matematickou větu vyjádřenou slovně zformulujeme do tvaru implikace:

$$\forall n \in \mathbb{Z} : n^2 \text{ je liché} \Rightarrow n \text{ je liché.}$$

Důkaz sporem této matematické věty spočívá v tom, že přímým důkazem dokážeme nepravdivost její negace, která je tvaru:

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n^2 \text{ je liché} \wedge\ n \text{ je sudé.} \tag{1.32}$$

[5] Pravidla pro negaci jednoduchých kvantifikovaných výroků byla uvedena v kapitole 1.3.2 v tabulce 1.7.

[6] Tutéž matematickou větu jsme již dokázali nepřímým důkazem v příkladu 1.46.

Důkaz: Předpokládáme, že n je sudé číslo a současně n^2 je liché číslo. Již dříve jsme dokázali (viz nepřímý důkaz v příkladu 1.46), že pokud je n sudé číslo, pak i n^2 je sudé číslo. Tento závěr je však v rozporu s předpokladem tvrzení 1.32, že n je sudé číslo a současně n^2 je liché číslo. Negace 1.32 původní věty tedy neplatí a platí původní věta: Jestliže je n^2 liché číslo, pak i číslo n je liché.

4. **Důkaz matematickou indukcí** využíváme speciálně u matematických vět popisujících vlastnosti přirozených čísel, tj. matematických vět typu:

$$\forall n \in \mathbb{N} : v(n), \tag{1.33}$$

kde $v(n)$ je výroková forma proměnné n (vlastnost přirozených čísel). Důkaz matematickou indukcí je založen na následující větě, kterou uvedeme bez důkazu:

Věta 1.1 Věta o úplné matematické indukci Nechť výroková forma $v(n)$ proměnné n je definovaná pro všechna přirozená čísla n a nechť $v(1)$ je pravdivý výrok. Nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí implikace $v(k) \Rightarrow v(k+1)$. Pak pro všechna přirozená čísla n platí $v(n)$.

Důkaz věty 1.33 matematickou indukcí spočívá ve dvou krocích:

1. Dokážeme, že daná vlastnost platí pro $n = 1$ (tj. dokážeme, že výrok $v(1)$ je pravdivý).

2. Dokážeme, že když daná vlastnost platí pro $n = k$, pak platí i pro $n = k + 1$ (tj. dokážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí implikace $v(k) \Rightarrow v(k + 1)$).

Na základě věty 1.1 o úplné matematické indukci pak vlastnost $v(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n.

Poznámka 1.16 Druhý krok z předcházejícího schématu je nazýván **indukční krok**. Dokazujeme v něm, že pro každé přirozené číslo k vyplývá z platnosti výroku $v(k)$ platnost výroku $v(k + 1)$. Tvrzení $v(k)$ je tzv. **indukční předpoklad**.

Při důkazu matematickou indukcí není podstatné, že se začíná právě od čísla 1. Můžeme začít od nejmenšího přirozeného čísla, pro které má dokazovaná vlastnost platit. Postup při důkazu matematickou indukcí budeme ilustrovat na následujícím příkladu.

Příklad 1.48 Součet prvních n přirozených čísel je roven číslu $\frac{n(n+1)}{2}$. Dokažte matematickou indukcí.

Důkaz: Třeba dokázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$v(n) : 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tuto rovnost dokážeme ve dvou krocích:

1. Dokážeme, že daná rovnost platí pro $n = 1$, tj. dokážeme, že platí $v(1) : 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Platnost této rovnosti je zřejmá.

2. Předpokládejme, že daná vlastnost platí pro $n = k$. Dokážeme, že tato vlastnost platí i pro $n = k + 1$.

Nechť tedy pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí vlastnost

$$v(k) : 1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}, \tag{1.34}$$

což je indukční předpoklad. Máme dokázat, že potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$v(k+1) : 1 + 2 + ... + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Nechť k je libovolné přirozené číslo. Pak

$$1 + 2 + ... + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \\ = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Využili jsme indukčního předpokladu 1.34 a dokázali jsme, že vlastnost $v(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n.

1.5.5 Úlohy k procvičení

1. Rozhodněte, které z daných gramatických vět jsou definice a které jsou matematické věty.

a) Pro všechna přirozená čísla, která jsou dělitelná deseti, platí, že jsou dělitelná pěti.

b) Existuje celé číslo, které je řešením rovnice $5x - 2 = 8$.

c) Prvočíslo je přirozené číslo větší než 1, které je dělitelné pouze číslem jedna a sebou samým.

d) Součet vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je $180°$.

e) Pro všechna přirozená čísla, která jsou dělitelná pěti, platí, že jsou dělitelná deseti.

f) Celé číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný třemi.

g) Přímku o nazýváme osou úsečky AB ($A \neq B$) právě tehdy, když jsou přímky AB a o navzájem kolmé a přímka o prochází středem úsečky AB.

h) Součin dvou čísel je roven nule právě tehdy, když je alespoň jeden činitel roven nule.

i) Proti větší straně trojúhelníka leží větší úhel.

j) Obsah trojúhelníka je roven polovině součinu délky libovolné jeho strany a výšky příslušné k této straně.

2. Jsou dány výrokové formule p, q, r. Rozhodněte, zda dané zápisy jsou zápisy správného odvozování:

a) $\frac{p\Rightarrow q,\ \neg q}{\neg p}$, b) $\frac{p\Leftrightarrow q,\ \neg p}{\neg(p\wedge r)}$, c) $\frac{p,\ q\Leftrightarrow r}{p\vee r}$, d) $\frac{p\Leftrightarrow q,\ r}{p\vee \neg r}$.

3. Je dána věta ve tvaru implikace: "Pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$ platí: Jestliže je součin $x \cdot y$ liché číslo, pak součet $x + y$ je sudé číslo." Utvořte k této větě

a) větu obměněnou,
b) obrácený výrok,
c) negaci věty,

zapište je symbolicky a rozhodněte o jejich pravdivosti.

4. Ke každé matematické větě formulujte větu obměněnou, resp. obrácený výrok. V případě obráceného výroku rozhodněte o jeho pravdivosti.

a) Pro každý čtyřúhelník platí: Je-li čtverec, pak mu lze opsat kružnici.
b) Pro každou kvadratickou rovnici platí: Je-li ve tvaru $ax^2 + bx = 0$, pak alespoň jeden její kořen je roven nule.
c) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: Jestliže je cifra 5 poslední cifrou čísla n v jeho dekadickém zápisu, je číslo n dělitelné pěti.
d) Jsou-li ramena dvou ostrých úhlů rovnoběžná, pak jsou tyto úhly shodné.

5. Proveďte přímý důkaz matematické věty: "Součin dvou libovolných celých čísel n, $n+1$ je číslo sudé."

6. Dokažte, že součin libovolných dvou lichých čísel je číslo liché.

7. Dokažte, že součet libovolných dvou lichých čísel je číslo sudé.

8. Dokažte, že součet tří po sobě následujících celých čísel, z nichž prostřední je sudé, je dělitelný šesti.

9. Pro každé přirozené číslo n platí: Jestliže $n^2 + 6$ je dělitelné pěti, pak n není dělitelné pěti. Dokažte.

10. Dokažte, že součet třetích mocnin prvních n přirozených čísel je roven číslu $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

11. Dokažte, že pro všechna přirozené čísla n platí rovnost

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Výsledky:

1. Výroky c), g) jsou matematické definice; výroky a), b), d), f), h) i), j) jsou matematické věty; tvrzení e) je nepravdivý výrok (není matematická věta).

2. a) Zápis $\dfrac{p\Rightarrow q,\ \neg q}{\neg p}$ přepíšeme do zápisu výrokové formule $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$. Pravdivostní hodnoty této výrokové formule určíme pomocí tabulky:

$[\,(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$\neg q\,]$	$\Rightarrow$	$\neg p$
1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1

Z tabulky je zřejmé, že výroková formule $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$ je tautologie, tedy zápis $\dfrac{p\Rightarrow q,\ \neg q}{\neg p}$ je zápisem správného odvozování (z pravdivosti výroků $p \Rightarrow q$ a $\neg q$ vyplývá pravdivost výroku $\neg p$).

b) Zápis $\dfrac{p\Leftrightarrow q,\ \neg p}{\neg(p\wedge r)}$ přepíšeme do zápisu výrokové formule $[(p \Leftrightarrow q)\wedge\neg p] \Rightarrow \neg(p\wedge r)$. Pravdivostní hodnoty této výrokové formule určíme pomocí tabulky:

$[\,(p$	$\Leftrightarrow$	$q)$	$\wedge$	$\neg p\,]$	$\Rightarrow$	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$r)$
1	1	1	0	0	1	0		1	1
1	1	1	0	0	1	1		0	0
1	0	0	0	0	1	0		1	1
1	0	0	0	0	1	1		0	0
0	0	1	0	1	1	1		0	1
0	0	1	0	1	1	1		0	0
0	1	0	1	1	1	1		0	1
0	1	0	1	1	1	1		0	0

Z tabulky je zřejmé, že výroková formule $[(p \Leftrightarrow q)\wedge\neg p] \Rightarrow \neg(p\wedge r)$ je tautologie, tedy zápis $\dfrac{p\Leftrightarrow q,\ \neg p}{\neg(p\wedge r)}$ je zápisem správného odvozování (z pravdivosti výroků $p \Leftrightarrow q$ a $\neg p$ vyplývá pravdivost výroku $\neg(p \wedge r)$).

c) Zápis $\dfrac{p,\ q\Leftrightarrow r}{p\vee r}$ přepíšeme do zápisu výrokové formule $[p \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \vee r)$. Pravdivostní hodnoty této výrokové formule určíme pomocí tabulky:

$[\,p$	$\wedge$	$(q$	$\Leftrightarrow$	$r)\,]$	$\Rightarrow$	$(p$	$\vee$	$r)$
1	1	1	1	1	1		1	
1	0	1	0	0	1		1	
1	0	0	0	1	1		1	
1	1	0	1	0	1		1	
0	0	1	1	1	1		1	
0	0	1	0	0	1		0	
0	0	0	0	1	1		1	
0	0	0	1	0	1		0	

Z tabulky je zřejmé, že výroková formule $[p \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \vee r)$ je tautologie, tedy zápis $\dfrac{p,\ q\Leftrightarrow r}{p\vee r}$ je zápisem správného odvozování (z pravdivosti výroků p a $q \Leftrightarrow r$ vyplývá pravdivost výroku $p \vee r$).

d) Zápis $\frac{p \Leftrightarrow q,\ r}{p \vee \neg r}$ přepíšeme do zápisu výrokové formule $[(p \Leftrightarrow q) \wedge r] \Rightarrow (p \vee \neg r)$.
Pravdivostní hodnoty této výrokové formule určíme pomocí tabulky:

[(p	$\Leftrightarrow$	q)	$\wedge$	r]	$\Rightarrow$	(p	$\vee$	$\neg r$)
1	1	1	1	1	1		1	0
1	1	1	0	0	1		1	1
1	0	0	0	1	1		1	0
1	0	0	0	0	1		1	1
0	0	1	0	1	1		0	0
0	0	1	0	0	1		1	1
0	1	0	1	1	0		0	0
0	1	0	0	0	1		1	1

Z tabulky je zřejmé, že výroková formule $[(p \Leftrightarrow q) \wedge r] \Rightarrow (p \vee \neg r)$ není tautologie, tedy zápis $\frac{p \Leftrightarrow q,\ r}{p \vee \neg r}$ není zápisem správného odvozování.

3. Matematickou větu zapíšeme nejdříve symbolicky formou kvantifikovaného výroku:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : x \cdot y = 2k + 1 \Rightarrow x + y = 2k, \text{ kde } k \in \mathbb{N}.$$

a) Pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$ platí: Jestliže je součet $x + y$ liché číslo, pak součin $x \cdot y$ je sudé číslo. (pravdivý výrok - matematická věta)
Symbolický zápis věty obměněné: $\forall x, y \in \mathbb{N} : x + y = 2k + 1 \Rightarrow x \cdot y = 2k$

b) Pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$ platí: Jestliže je součet $x + y$ sudé číslo, pak součin $x \cdot y$ je liché číslo. (nepravdivý výrok - není matematická věta)
Symbolický zápis obráceného výroku: $\forall x, y \in \mathbb{N} : x + y = 2k \Rightarrow x \cdot y = 2k + 1$

c) Existují přirozená čísla x, y, pro která platí: Součin $x \cdot y$ je liché číslo a zároveň součet $x + y$ je liché číslo. (nepravdivý výrok - není matematická věta)
Symbolický zápis negace věty: $\exists x, y \in \mathbb{N} : x \cdot y = 2k + 1 \wedge x + y = 2k + 1$.

4. a) Věta obměněná: "Pro každý čtyřúhelník platí: Nelze-li mu opsat kružnici, není čtverec."

Obrácený výrok: "Pro každý čtyřúhelník platí: Lze-li mu opsat kružnici, je to čtverec." (nepravdivý výrok)

b) Věta obměněná: "Pro každou kvadratickou rovnici platí: Jestliže žádný její kořen není roven nule, pak rovnice není ve tvaru $ax^2 + bx = 0$."

Obrácený výrok: "Pro každou kvadratickou rovnici platí: Jestliže alespoň jeden její kořen je roven nule, pak je rovnice ve tvaru $ax^2 + bx = 0$." (pravdivý výrok)

c) Věta obměněná: "Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: Jestliže číslo n není dělitelné pěti, pak cifra 5 není poslední cifrou čísla n v jeho dekadickém zápisu."

Obrácený výrok: "Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: Jestliže je číslo n dělitelné pěti, pak je cifra 5 poslední cifrou čísla n v jeho dekadickém zápisu." (nepravdivý výrok)

5. Provedeme přímý důkaz matematické věty, kterou zapíšeme symbolicky:

$$\forall n \in \mathbb{Z} : n \cdot (n+1) = 2 \cdot k,$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí, že z čísel n, $n+1$ je právě jedno sudé a právě jedno liché, tj. nastane právě jedna ze situací:

a) pokud n je sudé ($n = 2 \cdot l$), pak $n+1$ je liché ($n+1 = 2 \cdot l + 1$), kde $l \in \mathbb{Z}$,

b) pokud n je liché ($n = 2 \cdot l - 1$), pak $n+1$ je sudé ($n+1 = 2 \cdot l$), $l \in \mathbb{Z}$.

V případě situace a) platí, že

$$n \cdot (n+1) = 2 \cdot l \cdot (2 \cdot l + 1).$$

Označme $k = l \cdot (2 \cdot l + 1)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Dosazením získáme rovnost $n \cdot (n+1) = 2 \cdot k$, z níž je zřejmé, že součin $n \cdot (n+1)$ je sudé číslo pro n sudé.

V případě situace b) platí, že

$$n \cdot (n+1) = (2 \cdot l - 1) \cdot 2 \cdot l = 2 \cdot l \cdot (2 \cdot l - 1).$$

Označme $m = l \cdot (2 \cdot l - 1)$, kde $m \in \mathbb{Z}$. Dosazením získáme rovnost $n \cdot (n+1) = 2 \cdot m$, z níž je zřejmé, že součin $n \cdot (n+1)$ je sudé číslo pro n liché.

Dokázali jsme, že $n \cdot (n+1)$ je sudé číslo pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

6. Provedeme přímý důkaz. Je třeba dokázat následující tvrzení:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : (x \text{ je liché} \wedge y \text{ je liché}) \Rightarrow x \cdot y \text{ je liché.}$$

Na základě předpokladu, že x a y jsou lichá celá čísla, lze tato čísla zapsat ve tvaru: $x = 2 \cdot k + 1$, $y = 2 \cdot l + 1$, kde $k, l \in \mathbb{Z}$. Pak součin $x \cdot y$ zapíšeme:

$$x \cdot y = (2 \cdot k + 1) \cdot (2 \cdot l + 1) = 4 \cdot k \cdot l + 2 \cdot k + 2 \cdot l + 1 = 2 \cdot (2 \cdot k \cdot l + k + l) + 1.$$

Označme $m = 2 \cdot k \cdot l + k + l$, kde $m \in \mathbb{Z}$. Pak $x \cdot y = 2 \cdot m + 1$. Dokázali jsme, že součin dvou lichých čísel je číslo liché.

7. Provedeme přímý důkaz. Je třeba dokázat následující tvrzení:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : (x \text{ je liché} \wedge y \text{ je liché}) \Rightarrow x + y \text{ je sudé.}$$

Na základě předpokladu, že x a y jsou lichá celá čísla, lze tato čísla zapsat ve tvaru: $x = 2 \cdot k + 1$, $y = 2 \cdot l + 1$, kde $k, l \in \mathbb{Z}$. Pak součet $x + y$ zapíšeme:

$$x + y = (2 \cdot k + 1) + (2 \cdot l + 1) = 2 \cdot k + 1 + 2 \cdot l + 1 = 2 \cdot k + 2 \cdot l + 2 = 2 \cdot (k + l + 1).$$

Označme $m = k + l + 1$, kde $m \in \mathbb{Z}$. Pak $x + y = 2 \cdot m$. Dokázali jsme, že součet dvou lichých čísel je číslo sudé.

8. Provedeme přímý důkaz. Předpokládejme tři po sobě následující celá čísla x, y, z, z nichž prostřední je sudé, tj. $x = 2 \cdot k - 1$, $y = 2 \cdot k$, $z = 2 \cdot k + 1$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Pak součet $x + y + z$ zapíšeme:

$$x + y + z = (2 \cdot k - 1) + 2 \cdot k + (2 \cdot k + 1) = 2 \cdot k - 1 + 2 \cdot k + 2 \cdot k + 1 = 6 \cdot k.$$

Dokázali jsme, že součet tří po sobě následujících celých čísel, z nichž prostřední je sudé, je dělitelný šesti.

9. Provedeme nepřímý důkaz. Danou matematickou větu zapíšeme:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 5 | n^2 + 6 \Rightarrow 5 \not| n. \tag{1.35}$$

K matematické větě 1.35 vytvoříme větu obměněnou:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 5 | n \Rightarrow 5 \not| n^2 + 6,$$

kterou dokážeme přímo. Z předpokladu víme, že číslo n je dělitelné pěti, tj. $n = 5 \cdot k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$n^2 + 6 = (5 \cdot k)^2 + 6 = 25 \cdot k^2 + 6 = 5 \cdot (5 \cdot k^2 + 1) + 1.$$

Označme $m = 5 \cdot k + 1$, kde $m \in \mathbb{N}$. Úpravou získáme rovnost $n^2 + 6 = 5 \cdot m + 1$, z níž je zřejmé, že číslo $n^2 + 6$ není dělitelné pěti, tj. $5 \not| n^2 + 6$. Dokázali jsme platnost věty obměněné k matematické větě 1.35. Tedy jsme dokázali, že pro každé přirozené číslo n platí: Jestliže $n^2 + 6$ je dělitelné pěti, pak n není dělitelné pěti.

10. Je třeba dokázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$v(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Důkaz provedeme matematickou indukcí ve dvou krocích:

1. Dokážeme, že daná vlastnost platí pro $n = 1$, tj. dokážeme, že platí $v(1)$: $1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4} = \frac{1 \cdot 4}{4} = 1$. Pro $n = 1$ uvedená rovnost platí.
2. Předpokládejme, že daná vlastnost platí pro $n = k$. Dokážeme, že pak platí i pro $n = k+1$, tj. dokážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí implikace $v(k) \Rightarrow v(k+1)$. Nechť tedy pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$v(k) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}. \tag{1.36}$$

Máme dokázat, že potom také pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$v(k+1) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ získáme

$$v(k+1) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$
$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

S využitím indukčního předpokladu 1.36 jsme dokázali, že vlastnost $v(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n.

11. Je třeba dokázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$v(n) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Důkaz provedeme matematickou indukcí ve dvou krocích:

1. Dokážeme, že daná vlastnost platí pro $n = 1$, tj. dokážeme, že platí $v(1)$: $1 \cdot 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$. Pro $n = 1$ uvedená rovnost platí.
2. Předpokládejme, že daná vlastnost platí pro $n = k$. Dokážeme, že pak platí i pro $n = k+1$, tj. dokážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí implikace $v(k) \Rightarrow v(k+1)$. Nechť tedy pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$v(k) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}. \tag{1.37}$$

Máme dokázat, že potom také pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$v(k+1) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ získáme

$$v(k+1) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} +$$
$$+(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

S využitím indukčního předpokladu 1.37 jsme dokázali, že vlastnost $v(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n.

1.6 Využití výrokové logiky a základních poznatků o množinách ve školské matematice na 1. stupni ZŠ

• Výroková logika

Děti od útlého věku formulují výroky a učí se rozhodovat o jejich pravdivosti. Úvahy o pravdivosti daného tvrzení vycházejí z konkrétní situace a vlastní zkušenosti dítěte. Zařazení prvků výrokové logiky do činností, které jsou realizovány s dětmi předškolního a mladšího školního věku, si klade za cíl, aby děti získaly potřebu argumentace a samy pociťovaly důležitost logiky při přesném formulování pravidel. Současně se tak děti na propedeutické úrovni učí používat jazyk logiky.

V tomto období je tedy velmi důležité zařazovat do výuky různé otázky, úlohy a činnosti, které jsou propedeutikou pojmů výrok a pravdivostní hodnota výroku. Pojem výrok je nahrazen slovem vyjádření, tvrzení, věta, sdělení apod. Zadání těchto úloh má vést děti k rozhodnutí o pravdivosti uvedeného výroku. Učitel může například vyslovit výroky:

"Anička je dnes ve škole."
"Toník je dnes ve škole."
"Kája dnes není ve škole." apod.

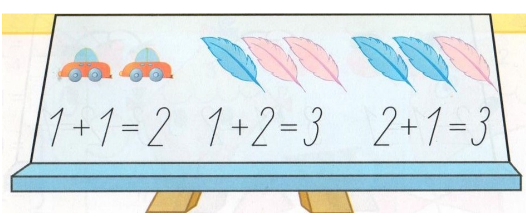
a žáci mají rozhodnout o jejich pravdivosti. Obtížnost úloh může být stupňována tím, že učitel tvoří negace těchto výroků, případně složené výroky, a žáci opět určují jejich pravdivostní hodnoty. Tato činnost je významnou stránkou rozumové výchovy žáků a počátečním krokem k vytváření smyslu pro pravdivé poznání.

Znalost pravdivých a nepravdivých výroků lze využít například u činností, při kterých děti třídí předměty na ty, které mají požadovanou vlastnost a které danou vlastnost nemají: dřevěné, bílé, nejsou černé apod. Vhodným příkladem takové úlohy o třídění může být úloha 17 z odstavce 2.3.2.

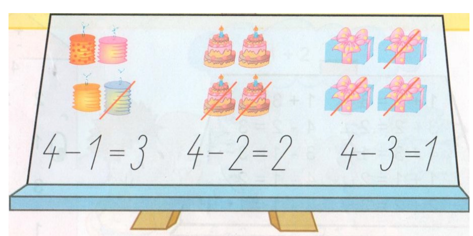
V hodinách matematiky se žáci již na začátku prvního stupně setkávají s mnoha výroky s matematickým obsahem například při určování počtu objektů zadaného souboru, při porovnávání počtu prvků zadaných souborů nebo u základních početních operací. Jedná se například o výroky (pravdivé) typu:

$5 - 3 = 2$	$1 + 3 = 4$	$3 \cdot 4 = 12$	$28 : 7 = 4$
$2 < 6$	$5 > 45$	$(2 + 6) + 7 = 15$	$2 \cdot (3 + 6) = 18$

Vybrané ukázky 1.44 a 1.45 z učebnice matematiky pro 1. ročník (Potůčková, 1998) interpretují pravdivé výroky.



Obr. 1.44:



Obr. 1.45:

Děti předškolního i mladšího školního věku se dále v běžném životě často setkávají s jazykovými výrazy: *každý*, *všechny*, *žádný*, *někdo*, *něco*, *nic*, *nikdo*, *aspoň jeden*, *právě jeden*, které nazýváme kvantifikátory. Správné pochopení kvantifikátorů vede k přesnosti myšlení, konání a vyjadřování se. Význam slov všechny, některé, někdo, nikdo objevují děti při běžných školních i mimoškolních činnostech. V souvislosti s tímto mohou být ve škole učitelem proneseny následující věty:

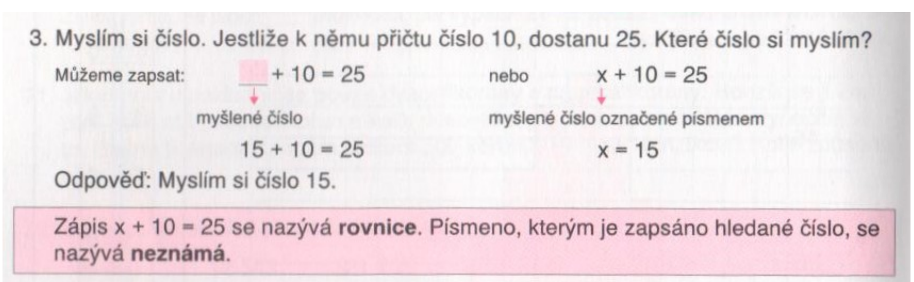
"Jsou dnes ve škole všechny děti naší třídy?"
"Máte všichni připravený domácí úkol?"
"Každý z vás si nyní položí na lavici jednu červenou pastelku."
"Všichni si teď společně zazpíváme."
"Každý z Vás si nyní položí na lavici alespoň jednu pastelku."
"Chybí někdo?"
"Nikdo nechybí."

Na základě obdobných vět jsou děti vedeny k pochopení kvantifikátorů a k jejich správnému použití v matematice při přesném vyjadřování. Poznamenejme, že učitelovy správné formulace i s potřebnými kvantifikátory jsou předpokladem toho, aby si žáci v budoucnu vytvářeli správné představy o nových pojmech a vztazích mezi nimi. A také jsou předpokladem k tomu, aby si lidé navzájem správně rozuměli!

Na 1. stupni si žáci začínají vytvářet představu o proměnných a chápat jejich význam například dosazováním přirozených čísel do rámečků v zápisech typu

$$\square < 4 \quad \text{nebo} \quad \square = 6 \quad \text{nebo} \quad \square + 2 = 5 \quad \text{nebo} \quad 8 - 4 = \square \quad \text{nebo} \quad 7 \cdot \square = 35,$$

v nichž rámeček $\square$ představuje neznámou (proměnnou) a samotný zápis představuje výrokovou formu jedné proměnné. Po dosazení přirozeného čísla do rámečku děti rozhodují, zda je nebo není doplněný zápis pravdivý, tj. rozhodují o pravdivosti výroku, který vznikne ze zadané výrokové formy, případně hledají přímo obor pravdivosti zadané výrokové formy. Zamění-li se v zápise výrokové formy rámeček za písmeno, řeší žáci rovnice o jedné proměnné (neznámé), viz ukázka 1.46 z učebnice matematiky pro 4. ročník (Blažková et al., 1996b).


3. Myslím si číslo. Jestliže k němu přičtu číslo 10, dostanu 25. Které číslo si myslím?
Můžeme zapsat: $\square + 10 = 25$ (myšlené číslo) nebo $x + 10 = 25$ (myšlené číslo označené písmenem)
$15 + 10 = 25$ $x = 15$
Odpověď: Myslím si číslo 15.
Zápis x + 10 = 25 se nazývá **rovnice**. Písmeno, kterým je zapsáno hledané číslo, se nazývá **neznámá**.

Obr. 1.46:

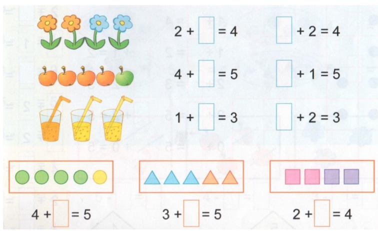
Postupně si děti osvojují užití proměnných v zápisech vlastností a vztahů, například:

$a + 10$	15					80
a	5	25	17	32		
$a \cdot 10$	50	250			400	

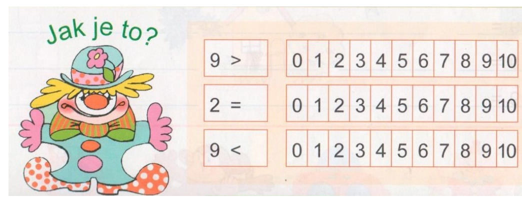
Později mohou žáci přejít k dosazování přirozených čísel do zápisů typu

$$\square + \square < 10 \quad \text{nebo} \quad \square + \square = 6,$$

které představují výrokové formy dvou proměnných, a opět rozhodují o pravdivosti či nepravdivosti vytvořených výroků. Na obrázcích 1.47 a 1.48 můžeme vidět ukázky vybraných příkladů z učebnice matematiky pro 1. ročník ZŠ (Potůčková, 1998) reprezentující výrokové formy jedné proměnné.



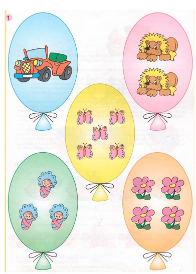
Obr. 1.47:



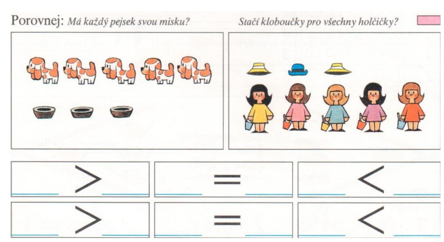
Obr. 1.48:

- **Množiny**

Jedním ze základních úkolů matematiky na 1. stupni ZŠ je vybudování pojmu přirozeného čísla a osvojení si početních výkonů s přirozenými čísly. Zavedení přirozených čísel, vztahů mezi nimi a operací s nimi se opírá o pojem množina. Se samotným pojmem množina se na 1. stupni ZŠ nesetkáme, ale množiny jsou prostředkem, který umožňuje pochopit podstatu probírané látky.



Obr. 1.49:

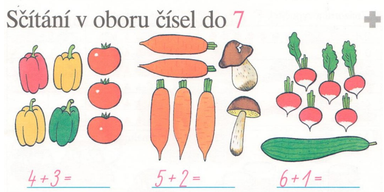


Obr. 1.50:

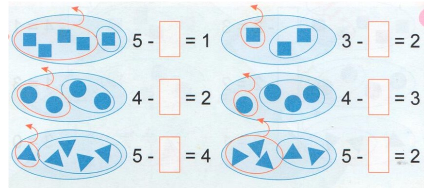
Z následujících ukázek je patrné, jak se znázornění různých souborů předmětů (množin), s nimiž žáci pracují, uplatňuje při seznamování s přirozenými čísly (viz 1.49), při jejich porovnávání (viz 1.50), sčítání (viz 1.51) a odčítání (viz 1.52) v 1. ročníku a při dělení přirozených čísel (viz 1.53) v 2. ročníku. Obrázky byly převzaty z učebnic matematiky pro 1. ročník ZŠ (Staudková et al., 2019a) a (Potůčková, 1998) a pro 2. ročník (Potůčková, 1999).

Důležitou roli hrají množiny při grafickém znázornění slovních úloh, které můžeme vidět na ukázkách 1.54 a 1.55 vybraných z učebnic matematiky pro 3. ročník (Blažková et al., 2006).

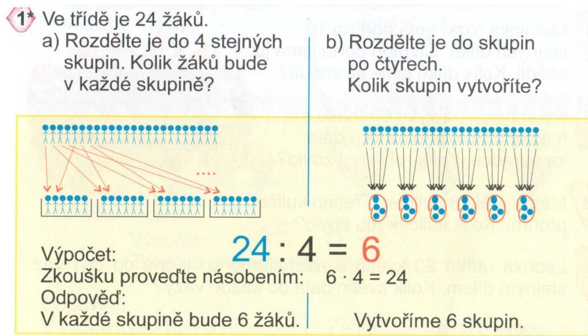
Ukázky slovních úloh na obrázcích 1.56 a 1.57 vybrané z pracovních sešitů k učebnicím matematiky pro 3. ročník (Blažková et al., 2011a) a (Blažková et al., 2011b) reprezentují grafické znázornění řešení úloh s využitím množinové operace průniku.



Obr. 1.51:



Obr. 1.52:

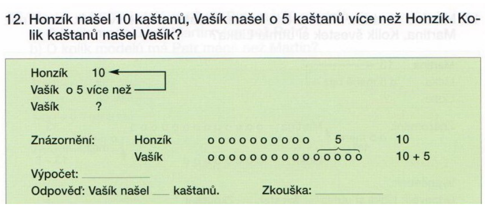


Obr. 1.53:

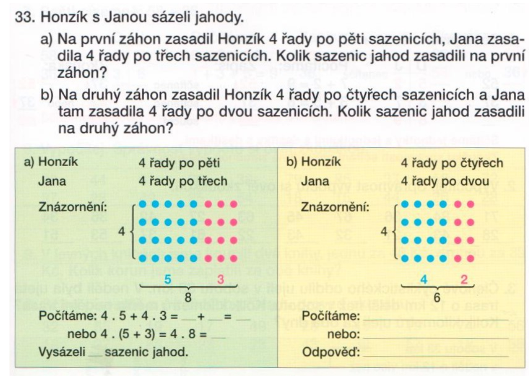
• Logická výstavba matematiky

Významným momentem ve vyučování matematiky je, když dítě vybírá ze známých informací podle určitých kritérií a z těchto předpokladů pak odvozuje důsledky. Pro tyto dovednosti dítěte jsou kladeny nároky na samotného učitele, u kterého je nezbytné, aby sám usuzoval správně. Nedbalé vyjadřování podmínek a nedůslednost při vyvození důsledků může negativně ovlivnit správnost logického úsudku dítěte. Jako příklad tohoto uveďme dvě tvrzení: "Jestli si nenapíšeš úlohu, nepustíš si počítač." a "Kdo správně vypočítá příklad, dostane jedničku." Po těchto pronesených tvrzeních by se nemělo stát, že si dítě pustí počítač, aniž by mělo hotovou úlohu, a také musí dostat jedničku za správně vypočítaný příklad. Ale pozor na nedbalou formulaci: "Kdo vypočítá příklad, dostane jedničku." Pak by mělo dítě dostat jedničku za jakkoli vypočítaný příklad!

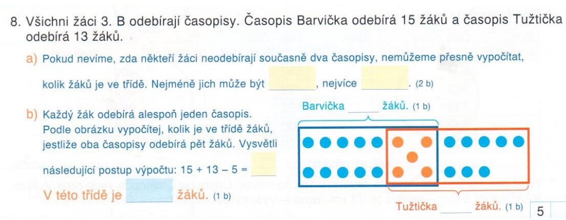
Další nároky kladené na učitele se týkají znalostí definic a důkladného osvojení si matematických pojmů. Učitel by měl být schopen najít způsob, jak pojmy žákům vysvětlit na jejich myšlenkové úrovni, aby si vytvořili správné představy o nich. Přesné vyjadřování učitele pozitivně ovlivňuje tvorbu správných představ konkrétních pojmů, kultivaci jazyka a slovní vyjadřování dětí.



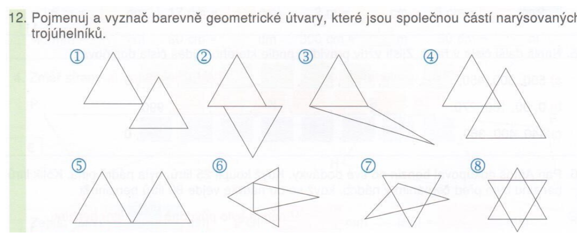
Obr. 1.54:



Obr. 1.55:



Obr. 1.56:



Obr. 1.57:

2 Binární relace a zobrazení

2.1 Kartézský součin dvou množin

Příklad 2.1 (motivační) Tři hoši Adam, Boris a Cyril a tři děvčata Klára, Lucie a Markéta se dohodli, že během prázdnin pošle každý hoch každé dívce pohlednici. Kolik pohlednic bylo celkem posláno?

Řešení: Využijeme pouze počátečních písmen ve jménech hochů a dívek. Množinu hochů označme H, tj. $H = \{A, B, C\}$ a množinu dívek označme D, tj. $D = \{K, L, M\}$. Každou poslanou pohlednici označíme pomocí uspořádané dvojice, kde první složkou bude vždy odesílatel (tedy jeden z hochů) a druhou složkou příjemce (tedy jedna z dívek). Například pohlednice, kterou poslal Cyril Kláře, bude označena jako uspořádaná dvojice $[C, K]$. Množina P všech pohlednic bude zapsána pomocí těchto uspořádaných dvojic

$$P = \{[A, K], [A, L], [A, M], [B, K], [B, L], [B, M], [C, K], [C, L], [C, M]\}.$$

Hoši poslali celkem devět pohlednic.

V příkladu 2.1 jsme označili množinu hochů H a množinu dívek D. Pomocí prvků množin H a D jsme vytvořili množinu P všech zaslaných pohlednic. Množina P je výsledkem další množinové operace, kterou budeme následně definovat.

Uvažujme dvě množiny A a B. V následujících úvahách využijeme zmíněný pojem uspořádané dvojice, kterou označíme $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$. Prvek x se nazývá první složka uspořádané dvojice $[x, y]$, prvek y se nazývá druhá složka uspořádané dvojice $[x, y]$.

Rovnost uspořádaných dvojic formulujeme takto: Uspořádaná dvojice $[x, y]$ se rovná uspořádané dvojici $[u, v]$ (píšeme $[x, y] = [u, v]$) právě tehdy, když $x = u$ a zároveň $y = v$.

Definice 2.1: Nechť A, B jsou libovolné množiny. Množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$, nazýváme **kartézský součin** množin A, B, označujeme $A \times B$ a symbolicky zapíšeme

$$A \times B = \{[x, y]; x \in A \wedge y \in B\}.$$

Poznámka 2.1 a) Prvky množiny $A \times B$ jsou tedy uspořádané dvojice $[x, y]$, tj. $[x, y] \in A \times B$.

b) Jestliže $A = B$, potom kartézský součin $A \times A$ píšeme též A^2 a hovoříme o kartézské druhé mocnině množiny A.

c) Pojmy uspořádaná dvojice a kartézský součin dvou množin lze zobecnit. Uspořádanou trojicí rozumíme skupinu tří objektů s uvedením, který z objektů je na prvním, druhém a třetím místě ve skupině - říkáme, že je první, druhou a třetí složkou uspořádané trojice. Kartézským součinem tří množin A, B, C rozumíme množinu všech uspořádaných trojic $[x, y, z]$, kde $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Označujeme $A \times B \times C$ a symbolicky zapisujeme

$$A \times B \times C = \{[x, y, z]; x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}.$$

Obdobně hovoříme o uspořádané n-tici a kartézském součinu n množin $A_1, A_2, ..., A_n$, který zapisujeme $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Příklad 2.2 Jsou dány množiny $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$. Určete

a) $A \times B$, b) $B \times A$, c) A^2, d) B^2.

Řešení:
a) $A \times B = \{[a, 1], [a, 2], [b, 1], [b, 2], [c, 1], [c, 2]\}$,
b) $B \times A = \{[1, a], [1, b], [1, c], [2, a], [2, b], [2, c]\}$,
c) $A^2 = A \times A = \{[a, a], [a, b], [a, c], [b, a], [b, b], [b, c], [c, a], [c, b], [c, c]\}$,
d) $B^2 = B \times B = \{[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2]\}$.

V následující větě uvedeme některé základní vlastnosti kartézského součinu:

Věta 2.1 Pro libovolné tři množiny A, B, C platí:

1) $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset)$,
2) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B)$,
3) $A \subset B \Rightarrow (A \times C \subset B \times C) \wedge (C \times A \subset C \times B)$,
4) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
5) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
6) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

Důkaz: Dokážeme pouze dvě tvrzení věty 2.1, a to 1) a 5). Důkazy ostatních tvrzení jsou buď zřejmé, nebo se tvrzení dokazují analogicky.

1) Označme výroky

$$p\colon A \times B = \emptyset, \qquad q\colon A = \emptyset \vee B = \emptyset.$$

Dokážeme nejdříve implikaci $p \Rightarrow q$. Důkaz provedeme sporem, tzn. dokážeme neplatnost negace $\neg(p \Rightarrow q)$. Podle vztahu 1.10 v kapitole 1.1.2 dokážeme neplatnost výroku $p \wedge \neg q$.
Nechť existují dvě množiny A, B s vlastnostmi $A \times B = \emptyset$ a současně $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$. Pokud jsou obě množiny A, B neprázdné, potom existují prvky $a \in A$, $b \in B$ (v každé množině alespoň jeden prvek). Podle definice 2.1 kartézského součinu však uspořádaná dvojice $[a, b] \in A \times B$, což je spor s předpokladem, že $A \times B = \emptyset$.
Obrácená implikace $q \Rightarrow p$ se dokáže analogicky.

5) Dokazujeme rovnost množin $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$. Označme množiny

$$L = (A \cup B) \times C, \qquad P = (A \times C) \cup (B \times C).$$

Máme-li dokázat rovnost $L = P$, musíme dokázat, že $L \subset P \;\wedge\; P \subset L$. Nejprve dokážeme inkluzi $L \subset P$, tzn. zvolíme libovolnou uspořádanou dvojici $[x, y] \in L$ a dokážeme, že současně $[x, y] \in P$. Nechť

$$\begin{aligned}
&[x, y] \in (A \cup B) \times C \quad \Rightarrow \quad [x \in (A \cup B) \wedge y \in C] \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad [(x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C] \quad \Rightarrow \quad [(x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)] \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad [x, y] \in A \times C \vee [x, y] \in B \times C \quad \Rightarrow \quad [x, y] \in (A \times C) \cup (B \times C).
\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že $[x, y] \in P$, tedy $L \subset P$. Inkluze $P \subset L$ se dokáže analogicky.

Poznámka 2.2 Tvrzení 4), 5) a 6) věty 2.1 lze po řadě formulovat rovněž ve tvaru

4*) $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$

5*) $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$

6*) $C \times (A - B) = (C \times A) - (C \times B)$

Poznámka 2.3 a) Pro kartézský součin obecně neplatí komutativní zákon. Pro ilustraci stačí uvažovat množiny $A \times B$ a $B \times A$ z příkladu 2.2.

b) Pro kartézský součin neplatí ani asociativní zákon. Uvážíme-li např. množinu $A = \{a\}$, pak

$$\begin{aligned}
&(A \times A) \times A = \{[a, a]\} \times \{a\} = \{[[a, a], a]\}, \quad \text{zatímco} \\
&A \times (A \times A) = \{a\} \times \{[a, a]\} = \{[a, [a, a]]\}.
\end{aligned}$$

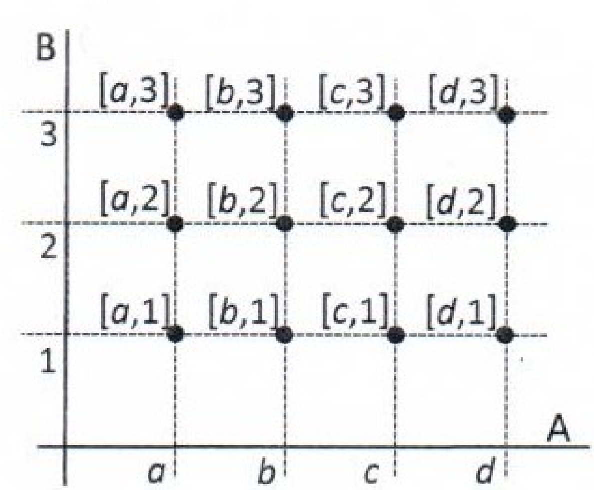
Poznámka 2.4 Kartézský součin $A \times B$ dvou množin lze graficky znázornit pomocí **kartézského grafu** (obdobně jako body v rovině). Prvky množiny A vyznačíme jako body na vodorovné ose, prvky množiny B jako body na svislé ose. Uspořádané dvojice kartézského součinu $A \times B$ pak tvoří všechny body roviny, jejichž souřadnice jsou určeny uspořádanými dvojicemi kartézského součinu $A \times B$. Znázornění kartézského součinu dvou množin A a B kartézským grafem budeme ilustrovat na příkladu 2.3.

Příklad 2.3 Znázorněte kartézský součin $A \times B$ kartézským grafem, kde $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$.

Řešení: Kartézský součin množin A a B je množina

$$A \times B = \{[a,1],[a,2],[a,3],[b,1],[b,2],[b,3],[c,1],[c,2],[c,3],[d,1],[d,2],[d,3]\}.$$

Kartézský graf množiny $A \times B$ je znázorněn na obrázku 2.58.



Obr. 2.58:

2.1.1 Úlohy k procvičení

1. Nechť $A = \{k, l, m\}$, $B = \{t, u, v, w\}$. Zapište výčtem prvků kartézské součiny $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$ a zakreslete jejich kartézské grafy.

2. Nechť $A = \{1, 2\}$, $B = \{\triangle, \circ, \heartsuit\}$. Zapište výčtem prvků kartézské součiny $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$.

3. Nechť $A = \{1, 2\}$, $B = \{\triangle, \circ, \heartsuit\}$, $C = \{x, y\}$. Zapište výčtem prvků kartézské součiny $(A \times B) \times C$, $A \times (B \times C)$.

4. Dokažte, že platí $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

5. Alenka má na panenku čtyři sukénky (červenou, modrou, zelenou a hnědou) a tři halenky (bílou, fialovou a žlutou). Kolika a kterými způsoby může Alenka svou panenku obléci?

Výsledky:

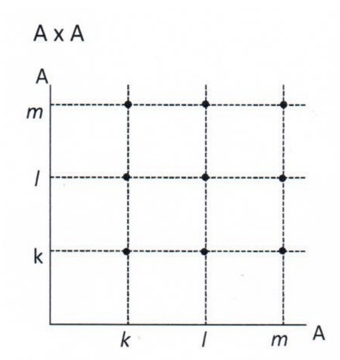
1. $A \times A = \{[k, k], [l, l], [m, m], [k, l], [l, k], [k, m], [m, k], [l, m], [l, m]\}$,

$A \times B = \{[k, t], [k, u], [k, v], [k, w], [l, t], [l, u], [l, v], [l, w], [m, t], [m, u], [m, v], [m, w]\}$,

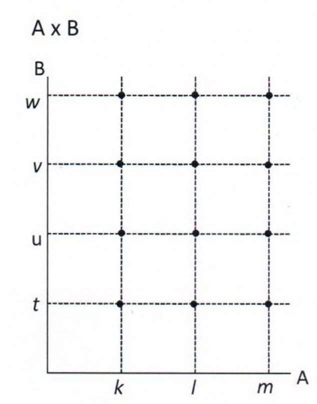
$B \times A = \{[t, k], [t, l], [t, m], [u, k], [u, l], [u, m], [v, k], [v, l], [v, m], [w, k], [w, l], [w, m]\}$,

$B \times B = \{[t, t], [t, u], [t, v], [t, w], [u, u], [u, v], [u, t], [u, w], [v, u], [v, v], [v, t], [v, w], [w, u],$
$[w, v], [w, t], [w, w]\}$.

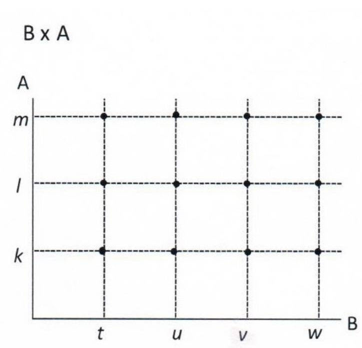
Kartézské grafy kartézských součinů $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$ jsou znázorněny po řadě na obrázcích 2.59, 2.60, 2.61 a 2.62.



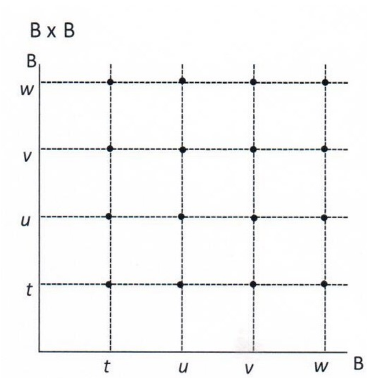
Obr. 2.59:



Obr. 2.60:



Obr. 2.61:



Obr. 2.62:

2. $A \times A = \{[1, 1], [2, 2], [1, 2], [2, 1]\}$,

$A \times B = \{[1, \triangle], [1, \circ], [1, \heartsuit], [2, \triangle], [2, \circ], [2, \heartsuit]\}$,

$B \times A = \{[\triangle, 1], [\circ, 1], [\heartsuit, 1], [\triangle, 2], [\circ, 2], [\heartsuit, 2]\}$,

$B \times B = \{[\triangle, \triangle], [\triangle, \circ], [\triangle, \heartsuit], [\circ, \triangle], [\circ, \circ], [\circ, \heartsuit], [\heartsuit, \triangle], [\heartsuit, \circ], [\heartsuit, \heartsuit]\}$.

3. $(A \times B) \times C = \{[[1, \triangle], x], [[1, \triangle], y], [[1, \circ], x], [[1, \circ], y], [[1, \heartsuit], x], [[1, \heartsuit], y], [[2, \triangle], x],$

$[[2, \triangle], y], [[2, \circ], x], [[2, \circ], y], [[2, \heartsuit], x], [[2, \heartsuit], y]\}$,

$A \times (B \times C) = \{[1, [\triangle, x]], [1, [\triangle, y]], [1, [\circ, x]], [1, [\circ, y]], [1, [\heartsuit, x]], [1, [\heartsuit, y]], [2, [\triangle, x]],$

$[2, [\triangle, y]], [2, [\circ, x]], [2, [\circ, y]], [2, [\heartsuit, x]], [2, [\heartsuit, y]]\}$.

4. Tvrzení $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ dokážeme jako rovnost množin. Označme množiny

$$L = (A \cap B) \times C, \qquad P = (A \times C) \cap (B \times C).$$

Máme-li dokázat, že $L = P$, musíme dokázat, že $L \subset P \;\wedge\; P \subset L$. Nejprve dokážeme inkluzi $L \subset P$, tzn. zvolíme libovolnou uspořádanou dvojici $[x, y] \in L$ a dokážeme, že současně $[x, y] \in P$. Nechť

$$\begin{aligned}
&[x, y] \in (A \cap B) \times C \quad \Rightarrow \quad [x \in (A \cap B) \wedge y \in C] \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad [(x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C] \quad \Rightarrow \quad [x, y] \in (A \times C) \wedge [x, y] \in (B \times C)] \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad [x, y] \in (A \times C) \cap (B \times C).
\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že $[x, y] \in P$, tedy $L \subset P$.
Inkluzi $P \subset L$ dokážeme analogicky, tzn. zvolíme libovolnou uspořádanou dvojici $[x, y] \in P$ a dokážeme, že současně $[x, y] \in L$. Nechť

$$\begin{aligned}
&[x, y] \in (A \times C) \cap (B \times C) \quad \Rightarrow \quad [x, y] \in (A \times C) \wedge [x, y] \in (B \times C)] \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad [(x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C)] \quad \Rightarrow \quad [x \in (A \cap B) \wedge y \in C] \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad [x, y] \in (A \cap B) \times C.
\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že $[x, y] \in L$, tedy $P \subset L$. Z uvedeného vyplývá, že $P = L$.

5. Označme S množinu všech sukének a H množinu všech halenek. Prvky obou množin označme malými počátečními písmeny, tj. $S = \{\check{c}, m, z, h\}$ a $H = \{b, f, \check{z}\}$. Možnosti, které Alenka má pro oblečení panenky, jsou zapsány kartézským součinem

$$S \times H = \{[\check{c}, b], [\check{c}, f], [\check{c}, \check{z}], [m, b], [m, f], [m, \check{z}], [z, b], [z, f], [z, \check{z}], [h, b], [h, f], [h, \check{z}]\}.$$

Existuje 12 možností, jak panenku obléci.

2.2 Binární relace

2.2.1 Pojem binární relace

Příklad 2.4 Jsou dány dvě množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7, 8, 9\}$. Uvažujme následující vztah (relaci) mezi prvky obou množin:

"Číslo $x \in A$ je dělitelem čísla $y \in B$".

Platnost tohoto vztahu pro prvky x, y zapíšeme pomocí uspořádané dvojice $[x, y]$. Prozkoumejme všechny prvky kartézského součinu množiny $A \times B$ a vyberme z ní ty uspořádané dvojice $[x, y]$, pro které výše zadaný vztah dělitelnosti platí. Množinu vybraných uspořádaných dvojic splňujících vztah dělitelnosti zapíšeme výčtem prvků takto: $R = \{[1, 6], [1, 7], [1, 8], [1, 9], [2, 6], [2, 8], [3, 6], [3, 9], [4, 8]\}$. Zřejmě platí množinová inkluze $R \subset A \times B$, která nás motivuje k následující definici.

Definice 2.2 Nechť A, B jsou libovolné množiny. **Binární relací** R **z množiny** A **do množiny** B nazýváme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$ (tj. $R \subset A \times B$). Jestliže $A = B$, potom podmnožinu kartézského součinu $A \times A$ nazýváme **binární relací** R **v množině** A (tj. $R \subset A \times A$).

Poznámka 2.5 a) Každá binární relace je podle definice 2.2 množina. Všechny poznatky o množinách, které jsme poznali v první kapitole, platí tedy i pro binární relace. Každou binární relaci je možno určit výčtem prvků (samozřejmě pouze binární relaci na množinách s nepříliš mnoha prvky) nebo charakteristickou vlastností (výrokovou formou dvou proměnných). Množina R z příkladu 2.4 je tedy binární relací z množiny A do množiny B, kterou lze zapsat symbolicky charakteristickou vlastností

$$R = \{[x, y] \in A \times B; x|y\}$$

nebo též slovně

$$R = \{[x, y] \in A \times B; x \text{ je dělitelem čísla } y\}.$$

b) Pojem binární relace lze přirozeným způsobem zobecnit na pojem n - ární relace. Pro $n = 3$ se tyto relace nazývají *ternární*. S ternárními relacemi se setkáváme při zavádění operací s přirozenými čísly. Příkladem ternární relace je relace $T = \{[x, y, z] \in A \times A \times A; x + y = z\}$ daná charakteristickou vlastností (tj. výrokovou formou tří proměnných) a definovaná v množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Relace T je pak daná výčtem prvků takto:
$T = \{[1, 1, 2], [1, 2, 3], [2, 1, 3], [2, 2, 4], [1, 3, 4], [3, 1, 4], [1, 4, 5], [4, 1, 5], [2, 3, 5], [3, 2, 5]\}$.
Relacemi n - árními, kde $n > 2$, se ale nyní nebudeme zabývat, proto lze v následujících úlohách o binárních relacích slovo "binární" vynechávat a hovořit pouze o relacích. Pod každým pojmem "relace" bude dále myšlena "binární relace".

Binární relaci R z množiny A do množiny B lze znázornit graficky několika způsoby, z nichž uvádíme dva nejběžnější:

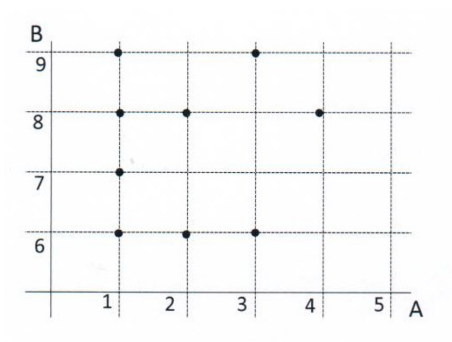
(1) *Kartézský graf*: V tomto grafu jsou uspořádané dvojice dané relace znázorněny v rovině analogicky jako body v rovině v analytické geometrii. Je-li definována relace R z množiny A do množiny B, znázorníme prvky x z množiny A na vodorovnou osu a prvky y z množiny B na svislou osu. Uspořádané dvojice relace R jsou pak zobrazeny jako body v eukleidovské rovině.

Na obrázku 2.63 je kartézský graf relace R z příkladu 2.4.

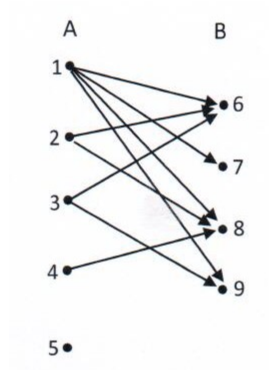
(2) *Uzlový graf*: V tomto grafu znázorníme všechny prvky množiny A i B jako body v rovině (tzv. uzly). Každou uspořádanou dvojici $[x, y]$ relace R pak znázorníme šipkou (tzv. orientovanou hranou) s počátečním bodem x a koncovým bodem y.

Na obrázku 2.64 je uzlový graf relace R z příkladu 2.4.

Uzlový graf lze sestrojit celý pouze u relací definovaných na množinách s nepříliš mnoha prvky, přičemž všechny prvky množin, na kterých je relace definována, musí být v grafu vyznačeny (i když nejsou krajními body žádné šipky).



Obr. 2.63:



Obr. 2.64:

Poznámka 2.6 Relaci R v množině A, tj. $R \subset A \times A$, budeme graficky znázorňovat takto:

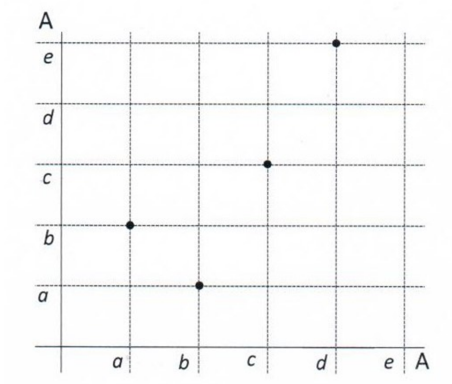
(1) *Kartézský graf*: Uspořádané dvojice relace R v množině A jsou opět znázorněny v rovině stejně jako body v rovině v analytické geometrii. Na vodorovnou osu znázorníme prvky x z množiny A a na svislou osu prvky y z množiny A. Uspořádané dvojice relace R jsou pak zobrazeny jako body v eukleidovské rovině.

Uvažujme například relaci $R = \{[c, c], [a, b], [b, a], [d, e]\}$ v množině $M = \{a, b, c, d, e\}$. Kartézský graf relace R je na obrázku 2.65.

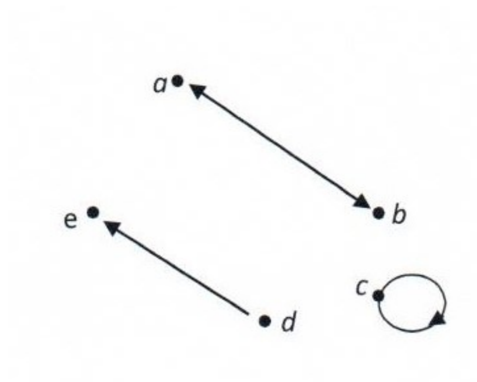
(2) *Uzlový graf*: V tomto grafu znázorníme všechny prvky množiny A jako body v rovině (tzv. uzly). Každou uspořádanou dvojici $[x, y]$ relace R pak znázorníme šipkou (tzv. orientovanou hranou) s počátečním bodem x a koncovým bodem y. Je-li $x = y$, nazýváme šipku smyčkou, kterou znázorníme kolem bodu x. Pokud současně platí $[x, y] \in R$, $[y, x] \in R$, pak příslušné dvojici oboustranně orientovaných šipek říkáme "dvojšipka".

Uzlový graf relace $R = \{[c, c], [a, b], [b, a], [d, e]\}$ v množině $M = \{a, b, c, d, e\}$ je na obrázku 2.66.

Uvedená interpretace grafického znázornění relací včetně terminologie koresponduje s pojmem graf ve smyslu teorie grafů. V této souvislosti je grafem relace orientovaný graf, který může obsahovat smyčky, jednoduché šipky a oboustranně orientované šipky.



Obr. 2.65:



Obr. 2.66:

Definice 2.3 Nechť R je binární relace z množiny A do množiny B. Množinu všech prvních složek všech uspořádaných dvojic binární relace R nazýváme **první obor binární relace** R a označujeme $O_1(R)$. Množinu všech druhých složek všech uspořádaných dvojic binární relace R nazýváme **druhý obor binární relace** R a označujeme $O_2(R)$. Oba obory zapisujeme symbolicky takto:

$$O_1(R) = \{x \in A; \exists y \in B : [x, y] \in R\},$$
$$O_2(R) = \{y \in B; \exists x \in A : [x, y] \in R\}.$$

Je zřejmé, že $O_1(R) \subset A$ a $O_2(R) \subset B$.
Jestliže R je binární relace v množině A, pro kterou platí, že $O_1(R) = A$, pak relaci R nazýváme **relací na množině** A.

Poznámka 2.7 Uvažujme množiny A, B a binární relaci R z příkladu 2.4. Prvním, resp. druhým oborem relace R jsou množiny $O_1(R) = \{1, 2, 3, 4\}$, resp. $O_2(R) = \{6, 7, 8, 9\}$

Příklad 2.5 Nechť $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a nechť S je relace v množině A, která je definovaná výčtem uspořádaných dvojic:
$S = \{[1, 3], [1, 5], [1, 7], [1, 9], [3, 5], [3, 7], [3, 9], [5, 7], [5, 9], [7, 9]\}$. Určete první a druhý obor relace S.

Řešení: $O_1(S) = \{1, 3, 5, 7\}$, $O_2(S) = \{3, 5, 7, 9\}$. Poznamenejme, že relace S je svou charakteristickou vlastností definována jako tzv. ostré vzestupné uspořádání všech lichých čísel množiny A:

$$S = \{[x, y] \in A \times A; x < y \ \wedge \ x \text{ je liché} \ \wedge \ y \text{ je liché}\}.$$

Poznámka 2.8 Uvažujeme-li situaci, že množiny A a B z definice 2.2 jsou podmnožinami množiny $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, můžeme při všech úvahách o relacích s výhodou využít znalostí o elementárních funkcích, resp. analytické geometrie ze středoškolské matematiky. To ilustruje následující příklad.

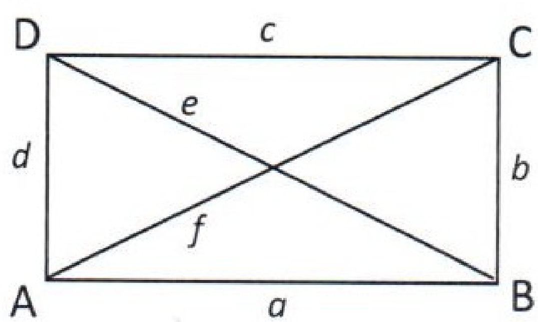
Příklad 2.6 V množině $\mathbb{R}$ všech reálných čísel jsou definovány relace:

a) $R_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = x + 3\}$,
b) $R_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = x^2\}$,
c) $R_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4\}$.

Určete jejich první a druhý obor.

Řešení:
a) $O_1(R_1) = \mathbb{R}$, $O_2(R_1) = \mathbb{R}$,
b) $O_1(R_2) = \mathbb{R}$, $O_2(R_2) = \langle 0, \infty\rangle$,
c) $O_1(R_3) = \langle -1, 3\rangle$, $O_2(R_3) = \langle -4, 0\rangle$.

Příklad 2.7 Je dán obdélník $ABCD$. Označme jeho strany a, b, c, d a jeho úhlopříčky e, f, viz obrázek 2.67. Dále je definována množina M všech úseček, jejichž krajní body jsou vrcholy obdélníka $ABCD$, tj. $M = \{a, b, c, d, e, f\}$.



Obr. 2.67:

Určete výčtem prvků binární relaci R v množině M danou vztahem: "Úsečka x je shodná s úsečkou y". Relaci R zapište výčtem prvků, symbolicky a určete její první a druhý obor.

Řešení: Relace R je dána výčtem prvků
$R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [e, e], [f, f], [a, c], [c, a], [b, d], [d, b], [e, f], [f, e]\}$, a zapsaná symbolicky

$$R = \{[x, y] \in M \times M; x \cong y\},$$

$O_1(R) = \{a, b, c, d, e, f\} = M$, $O_2(R) = \{a, b, c, d, e, f\} = M$.

V následující poznámce uvádíme příklad binární relace "ze života".

Poznámka 2.9 Uvažujme pětičlennou rodinu s těmito členy: matka, otec, dcera Petra, syn Jan a syn Kamil. Označme pro naše účely jednotlivé členy této rodiny malými tiskacími písmeny: m (matka), o (otec), p (Petra), j (Jan), k (Kamil). Budeme pracovat s množinou $M = \{m, o, p, j, k\}$, která představuje uvažovanou rodinu, jejíž členové jsou prvky množiny M. Zaměříme se dále na všechny uspořádané dvojice $[x, y]$ prvků množiny M (tj. $[x, y] \in M \times M$), pro které platí, že "x je bratrem y". Jedná se o tyto uspořádané dvojice:

$[j, p]$ ... "j je bratrem p" (Jan je bratrem Petry),
$[j, k]$ ... "j je bratrem k" (Jan je bratrem Kamila),
$[k, p]$ ... "k je bratrem p" (Kamil je bratrem Petry),
$[k, j]$ ... "k je bratrem j" (Kamil je bratrem Jana).

Vztah "být bratrem" je zde reprezentován uvedenými čtyřmi uspořádanými dvojicemi. Množina $R = \{[j, p], [j, k], [k, p], [k, j]\}$ představuje vztah "být bratrem" v množině M a jedná se tedy o binární relaci v množině M. Z tohoto příkladu je zřejmé, že binární relace R v množině M je množina některých uspořádaných dvojic kartézského součinu $M \times M$, a v důsledku toho je podmnožinou kartézského součinu $M \times M$. Binární relace R, která je zadána výčtem prvků výše, je určena pomocí charakteristické vlastnosti takto:

$$R = \{[x, y] \in M \times M; x \text{ je bratrem } y\}.$$

První a druhý obor relace R jsou množiny $O_1(R) = \{j, k\}$ a $O_2(R) = \{p, k, j\}$.

Definice 2.4 Nechť R je binární relace z množiny A do množiny B. **Doplňkovou relací** k relaci R nazýváme binární relaci $R' \subset A \times B$ definovanou takto:

$$R' = \{[x, y] \in A \times B; [x, y] \notin R\}.$$

Poznámka 2.10 Doplňková relace R' k relaci R je podle teorie množin doplněk množiny R v množině $A \times B$. Doplňková relace R' se tedy vždy vztahuje k nějaké relaci R v základní množině $A \times B$, přičemž platí množinová rovnost

$$R' = (A \times B) - R.$$

Je-li relace R dána charakteristickou vlastností prostřednictvím výrokové formy $v(x, y)$ dvou proměnných x, y

$$R = \{[x, y] \in A \times B; v(x, y)\}, \tag{2.1}$$

pak doplňková relace R' k relaci R je vyjádřena negací výrokové formy $v(x, y)$

$$R' = \{[x, y] \in A \times B; \neg v(x, y)\}.$$

Definice 2.5 Nechť R je binární relace z množiny A do množiny B. **Inverzní relací** k relaci R nazýváme binární relaci $R^{-1} \subset B \times A$ definovanou takto:

$$R^{-1} = \{[x, y] \in B \times A; [y, x] \in R\}.$$

Poznámka 2.11 Nechť R je binární relace z množiny A do množiny B a nechť R^{-1} je inverzní relace k relaci R. Pak z definice 2.5 vyplývá pro libovolnou uspořádanou dvojici $[x,y] \in A \times B$ následující ekvivalence:

$$[x,y] \in R^{-1} \Leftrightarrow [y,x] \in R.$$

Pokud je relace R dána charakteristickou vlastností 2.1 prostřednictvím výrokové formy $v(x,y)$, pak vyjádření charakteristické vlastnosti relace inverzní R^{-1} obdržíme záměnou proměnných x, y ve výrokové formě $v(x,y)$.

Příklad 2.8 Jsou dány množiny $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{6,7,8,9\}$. Nechť R je binární relace z množiny A do množiny B daná vztahem: "Číslo $x \in A$ je dělitelem čísla $y \in B$". Určete

a) doplňkovou relaci R' k relaci R pomocí charakteristické vlastnosti a výčtem prvků,
b) inverzní relaci R^{-1} k relaci R výčtem prvků.

Řešení:
a) Pro prvky $[x,y]$ doplňkové relace R' platí: "Číslo $x \in A$ není dělitelem čísla $y \in B$", tedy $R' = \{[x,y] \in A \times B; x \nmid y\}$ a $R' = \{[2,7],[2,9],[3,7],[3,8],[4,6],[4,7],[4,9],[5,6],[5,7],[5,8],[5,9]\}$.
b) $R^{-1} = \{[6,1],[7,1],[8,1],[9,1],[6,2],[8,2],[6,3],[9,3],[8,4]\}$.

Příklad 2.9 Nechť R je binární relace v množině M z příkladu 2.7. Určete výčtem prvků a charakteristickou vlastností doplňkovou a inverzní relaci k relaci R.

Řešení:
$R' = \{[a,b],[b,a],[a,d],[d,a],[a,e],[e,a],[a,f],[f,a],[b,c],[c,b],[b,e],[e,b],[b,f],[f,b],[c,d],[d,c],[c,e],[e,c],[c,f],[f,c],[d,e],[e,d],[d,f],[f,d]\}$.
Pro prvky $[x,y]$ relace R platí: "Úsečka x je shodná s úsečkou y".
Pro prvky $[x,y]$ doplňkové relace R' platí: "Úsečka x není shodná s úsečkou y".

$R^{-1} = \{[a,a],[b,b],[c,c],[d,d],[e,e],[f,f],[c,a],[a,c],[d,b],[b,d],[f,e],[e,f]\}$.
Pro prvky $[x,y]$ inverzní relace R^{-1} platí: "Úsečka y je shodná s úsečkou x".
Povšimněte si, že pro tuto relaci platí rovnost $R = R^{-1}$.

Příklad 2.10 V množině $\mathbb{R}$ všech reálných čísel jsou definovány relace:

a) $R = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = 2x + 3\}$,
b) $S = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = x^2\}$,

Určete inverzní relace k relacím R, S. Dále určete první a druhý obor relací R^{-1} a S^{-1}.

Řešení: Je-li relace definována na nekonečné množině, není možné ji určit výčtem prvků, ale pouze pomocí jejich charakteristické vlastnosti.

a) $R^{-1} = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x = 2y + 3\}$. Po úpravě výrokové formy charakterizující relaci R^{-1} do tvaru $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ zjistíme, že platí $O_1(R^{-1}) = \mathbb{R}$, $O_2(R^{-1}) = \mathbb{R}$.

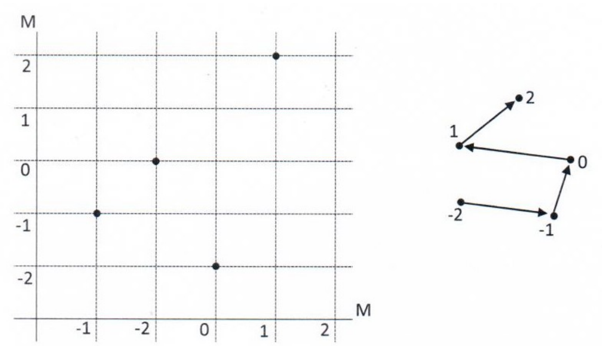
b) $S^{-1} = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x = y^2\}$. Výroková forma $x = y^2$ charakterizující relaci S^{-1} vyjadřuje parabolu s osou x a vrcholem v počátku soustavy souřadnic, proto platí $O_1(S^{-1}) = \langle 0, \infty \rangle$, $O_2(S^{-1}) = \mathbb{R}$.

Příklad 2.11 V množině $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ jsou dány relace R, S, T. Zakreslete jejich kartézské i uzlové grafy. Dále určete charakteristickou vlastností i výčtem prvků doplňkové a inverzní relace k relacím R, S, T v množině M.

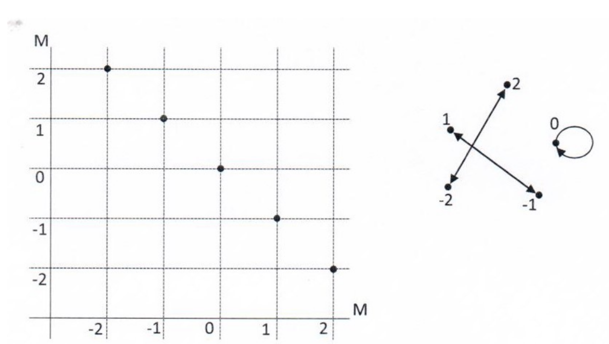
a) $R = \{[x, y] \in M \times M; y = x + 1\}$,
b) $S = \{[x, y] \in M \times M; y = -x\}$,
c) $T = \{[x, y] \in M \times M; y = |x|\}$.

Řešení: Binární relace R, S, T zapíšeme výčtem prvků.
a) $R = \{[-2, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, 2]\}$,
b) $S = \{[-2, 2], [-1, 1], [0, 0], [1, -1], [2, -2]\}$,
c) $T = \{[-2, 2], [-1, 1], [0, 0], [1, 1], [2, 2]\}$,

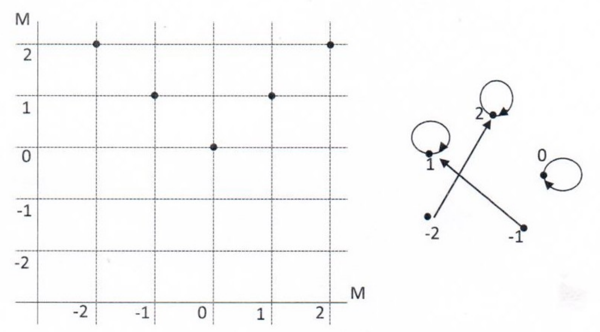
Kartézské a uzlové grafy relací R, S a T daných v množině M jsou znázorněny na obrázcích 2.68, 2.69 a 2.70 (v tomto pořadí).



Obr. 2.68:



Obr. 2.69:



Obr. 2.70:

Doplňkové a inverzní relace k relacím R, S, T zapíšeme nejdříve jejich charakteristickou vlastností.

a) $R' = \{[x,y] \in M \times M; y \neq x+1\}$, $R^{-1} = \{[x,y] \in M \times M; x = y+1\}$,
b) $S' = \{[x,y] \in M \times M; y \neq -x\}$, $S^{-1} = \{[x,y] \in M \times M; x = -y\}$,
c) $T' = \{[x,y] \in M \times M; y \neq |x|\}$, $T^{-1} = \{[x,y] \in M \times M; x = |y|\}$.

Vyjádření relací doplňkových a inverzních k relacím R, S, T výčtem prvků je následující:

a) $R' = \{[-2,-2],[-2,0],[-2,1],[-2,2],[-1,-2],[-1,-1],[-1,1],[-1,2],[0,-2],$
$[0,-1],[0,0],[0,2],[1,-2],[1,-1],[1,0],[1,1],[2,-2],[2,-1],[2,0],[2,1],[2,2]\}$, ll
$R^{-1} = \{[-1,-2],[0,-1],[1,0],[2,1]\}$,
b) $S' = \{[-2,1],[-2,0],[-2,1],[-1,-2],[-1,-1],[-1,0],[-1,2],[0,-2],$
$[0,-1],[0,1],[0,2],[1,-2],[1,0],[1,1],[1,2],[2,-1],[2,0],[2,1],[2,2]\}$,
$S^{-1} = \{[2,-2],[1,-1],[0,0],[-1,1],[-2,2]\}$,
c) $T' = \{[-2,-2],[-2,-1],[-2,0],[-2,1],[-1,-2],[-1,-1],[-1,0],[-1,2],[0,-2],$
$[0,-1],[0,1],[0,2],[1,-2],[1,-1],[1,0],[1,2],[2,-2],[2,-1],[2,0],[2,1]\}$,
$T^{-1} = \{[2,-2],[1,-1],[0,0],[1,1],[2,2]\}$,

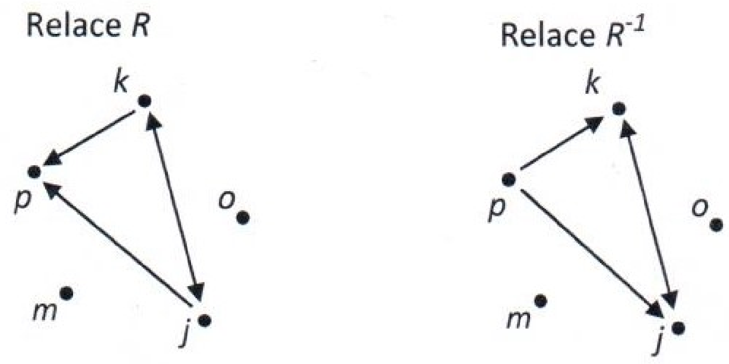
Příklad 2.12 Uvažujme relaci $R = \{[x,y] \in M \times M; x \text{ je bratrem } y\}$ z poznámky 2.9, kde $M = \{m,o,p,j,k\}$.

a) Zapište výčtem prvků relaci R^{-1} a charakteristickou vlastností relaci R'.
b) Zakreslete uzlový graf relací R a R^{-1}.

Řešení: Připomeňme, že relace R je dána výčtem prvků $R = \{[j,p],[j,k],[k,j],[k,p]\}$. Pak
a) $R' = \{[x,y] \in M \times M; x \text{ není bratrem } y\}$, $R^{-1} = \{[p,j],[k,j],[j,k],[p,k]\}$.
b) Uzlové grafy relací R a R^{-1} jsou na obrázku 2.71.

Pozorujete nějakou zajímavou souvislost mezi uzlovými grafy relací R a R^{-1} na obrázku 2.71?

Definice 2.6 Nechť R je binární relace z množiny A do množiny B ($R \subset A \times B$) a S



Obr. 2.71:

je binární relace z množiny B do množiny C ($S \subset B \times C$). Binární relaci $R \circ S$ z množiny A do množiny C definovanou vztahem

$$R \circ S = \{[x, y] \in A \times C; \exists z \in B : [x, z] \in R \wedge [z, y] \in S\}$$

nazýváme **relací složenou** z relací R a S (v tomto pořadí). Platí $R \circ S \subset A \times C$.

Poznámka 2.12 a) Relace $R \circ S$ složená z relací R a S zavedená v definici 2.6 je výsledkem operace, které říkáme **skládání relací**.

b) Operace skládání relací není obecně komutativní, a to ani v případě, jsou-li všechny skládané relace definovány v téže množině. Z výše uvedeného příkladu 2.14 je zjevné, že $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$.

c) Operace skládání relací je asociativní, tj. pro libovolné relace R, S, T definované v množině A platí: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$. Pokuste se ověřit tuto skutečnost na konkrétních příkladech.

Věta 2.2 Nechť M je neprázdná množina, R a S jsou relace v množině M. Pak platí

$$R \circ S = S \circ R \Leftrightarrow [(R \vee S \text{ je prázdná relace v } M) \vee (R \vee S \text{ je relace rovnosti na } M) \vee (R = S).$$

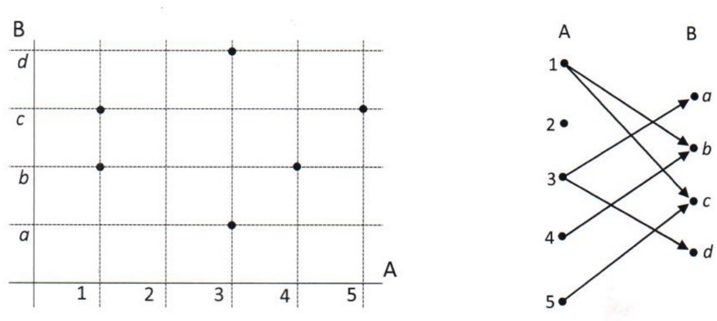
Srovnej toto tvrzení s částí 2) věty 2.1 v odstavci 2.1.

Příklad 2.13 Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$. Dále jsou dány binární relace R z množiny A do množiny B a S z množiny B do množiny C takto:

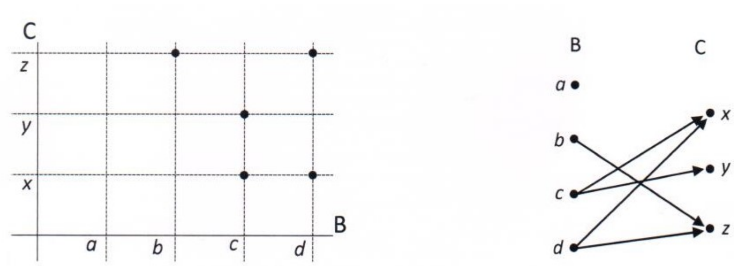
$$R = \{[1, b], [1, c], [3, a], [3, d], [4, b], [5, c]\},$$
$$S = \{[b, z], [c, x], [c, y], [d, x], [d, z]\}.$$

Určete relaci $R \circ S$ z množiny A do množiny C složenou z relací R a S (v tomto pořadí). Znázorněte kartézské a uzlové grafy relací R a S.

Řešení: $R \circ S = \{[1,z],[1,x],[3,x],[4,z],[3,z],[1,y],[5,x],[5,y]\}$.
Poznamenejme, že pro relaci $S \circ R$ složenou z relací S a R (v tomto pořadí) platí: $S \circ R = \emptyset$.
Kartézské a uzlové grafy relací R a S jsou znázorněny na obrázcích 2.72 a 2.73 (v tomto pořadí).



Obr. 2.72:



Obr. 2.73:

Příklad 2.14 Je dána množina $A = \{1,2,3,4,5\}$ a relace R_1, R_2 v množině A:

$$R_1 = \{[1,2],[1,3],[3,1],[3,4],[4,2],[5,3]\}, \qquad R_2 = \{[1,4],[2,1],[3,2]\}.$$

Určete relace $R_1 \circ R_2$ a $R_2 \circ R_1$.

Řešení: Platí:

$$R_1 \circ R_2 = \{[1,1],[1,2],[3,4],[4,1],[5,2]\}, \qquad R_2 \circ R_1 = \{[1,2],[2,2],[2,3]\}.$$

Definice 2.7 Nechť M je neprázdná množina. Pak definujeme tři speciální relace v množině M takto:

(1) Nechť $R = \emptyset$. Pak tato relace se nazývá **prázdná relace** v množině M (žádný prvek množiny M není v relaci s žádným prvkem množiny M).

(2) Nechť $R = M \times M$. Pak tato relace se nazývá **úplná relace** (každý prvek množiny M je v relaci s každým prvkem množiny M).

(3) Nechť $R = \{[x, y]; x = y\}$. Pak tato relace se nazývá **relace rovnosti** (každý prvek množiny M je v relaci sám se sebou).

2.2.2 Úlohy k procvičení

1. Určete

a) výčtem prvků všechny relace ve dvouprvkové množině $M = \{0, 1\}$,
b) počet všech binárních relací na množině o n prvcích.

2. Nechť $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ a nechť $R = \{[x, y] \in M \times M; y = x + 1\}$ je binární relace v množině M. Zapište tuto relaci výčtem prvků a sestrojte její uzlový a kartézský graf.

3. Nechť $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Určete výčtem prvků následující binární relace z množiny A do množiny B a určete jejich první a druhý obor:

a) $R = \{[x, y] \in A \times B; x + y = 10\}$,
b) $S = \{[x, y] \in A \times B; x|y\}$,
c) $T = \{[x, y] \in A \times B; y = x + 2\}$.

4. Nechť $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a nechť relace R, S jsou v množině M dány takto:

a) $R = \{[x, y] \in M \times M; x < y \Rightarrow x + y = 5\}$,
b) $S = \{[x, y] \in M \times M; x < 3 \Leftrightarrow y > 2\}$.

Určete relace R, S výčtem prvků, určete doplňkové a inverzní relace k těmto relacím. K relacím R, R', S a S' sestrojte jejich uzlové a kartézské grafy.

5. Nechť R, S jsou binární relace v množině M definované v předchozím příkladu. Určete výčtem prvků složené relace $R \circ S$, $S \circ R$, $R \circ R$ a $S \circ S$.

6. V množině $M = \{2, 3, 5, 7\}$ jsou dány relace:

$R_1 = \{[x, y] \in M \times M; x + y \leq 8\}$,
$R_2 = \{[x, y] \in M \times M; y > 2x\}$.

Určete složené relace $R_1 \circ R_2$, $R_1 \circ R_1$, $R_2 \circ R_1$, $R_2 \circ R_2$.

7. V množině $M = \{1, 2, 3, 4\}$ určete relaci R tak, aby složená relace $R \circ R$ byla prázdná množina.

8. Zapište symbolicky následující relace v množině $\mathbb{R}$ jako množiny všech uspořádaných dvojic x, y, které jsou určeny vlastnostmi:

a) číslo y je rovno druhé mocnině čísla x,
b) číslo y je menší než $3x+1$,
c) číslo y je dělitelem čísla $3x$,
d) číslo x je dvojnásobkem čísla y,
e) číslo x je větší nebo rovno číslu $7-y$.

9. Pomocí charakteristické vlatnoti zapište relace doplňkové k relacím:

a) $R_1 = \{[x,y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x = y\}$,
b) $R_2 = \{[x,y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x > y\}$,
c) $R_3 = \{[x,y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y|x\}$,
d) $R_4 = \{[x,y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y = 6\}$.

10. V množině $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ jsou definovány relace

$R = \{[x,y] \in A \times A : y = 2x - 4\}$,
$S = \{[x,y] \in A \times A : x^2 < y\}$,
$T = \{[x,y] \in A \times A : x + y < 5\}$.

Zapište tyto relace výčtem prvků. Dále zapište symbolicky relace R', S', T', $S \cap T$, $R \cap T'$, $R \cup S$.

11. V množině $A = \{1,2,3\}$ jsou dány relace

$R_1 = \{[x,y] \in A \times A : y = x - 1\}$,
$R_2 = \{[x,y] \in A \times A : y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}\}$.

Zapište výčtem prvků relace R_1, R_2, $R_1 \circ R_2$, $R_2 \circ R_1$. Dále zapište výčtem prvků a charakteristickou vlastností relace $R_1 \cup R_2$ a $R_1 \cap R_2$ a určete první a druhý obor $R_1 \cup R_2$ a $R_1 \cap R_2$.

12. Je dána relace $R = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y \geq 1 + 2x\}$. Zapište charakteristickou vlastností relaci inverzní R^{-1} a sestrojte kartézský graf relací R a R^{-1}.

13. Je dána relace $R = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y - 1 = x^2\}$. Znázorněte kartézské grafy relací R a R^{-1}.

14. Znázorněte kartézský graf relace $R = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; (x-1)^2 + (y+2)^2 \geq 9\}$ a určete její první a druhý obor.

15. Určete první a druhý obor relací v množině $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$ daných charakteristickou vlastností a zakreslete jejich kartézské grafy.

a) $R_1 = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; y = 2x - 1\}$,
b) $R_2 = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; y = x - 3\}$,
c) $R_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = 2x^2 - 1\}$,
d) $R_4 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = |x|\}$,
e) $R_5 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x^2 + y^2 = 4\}$,
f) $R_6 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = 3\}$,

16. Je dána množina měst $M = \{\text{Praha}, \text{Děčín}, \text{Bratislava}\}$ a množina řek $N = \{\text{Dunaj}, \text{Dyje}, \text{Labe}, \text{Vltava}\}$. Určete výčtem prvků relaci R z množiny M do množiny N, která je dána charakteristickou vlastností $R = \{[x, y] \in M \times N; \text{městem } x \text{ protéká řeka } y\}$.

Výsledky:

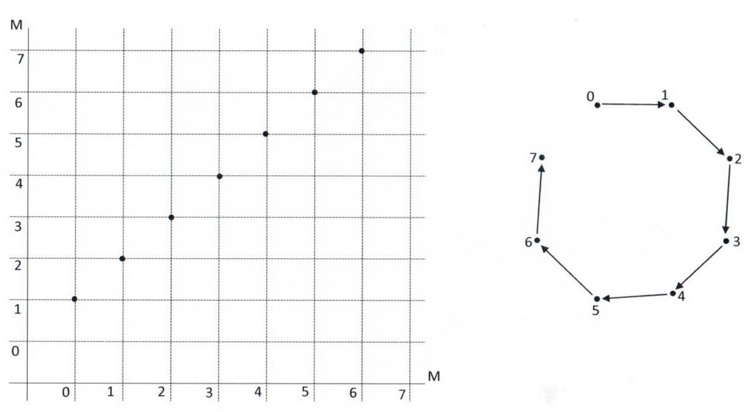
1. a) Všechny relace v množině $M = \{0, 1\}$ jsou následující:

- prázdná relace: $R_1 = \emptyset$,
- jednoprvkové relace: $R_2 = \{[0, 0]\}$, $R_3 = \{[1, 1]\}$, $R_4 = \{[0, 1]\}$, $R_5 = \{[1, 0]\}$,
- dvouprvkové relace: $R_6 = \{[0, 0], [1, 1]\}$, $R_7 = \{[0, 0], [1, 0]\}$, $R_8 = \{[0, 0], [0, 1]\}$, $R_9 = \{[1, 1], [1, 0]\}$, $R_{10} = \{[1, 1], [0, 1]\}$, $R_{11} = \{[1, 0], [0, 1]\}$,
- tříprvkové relace: $R_{12} = \{[0, 0], [1, 1], [1, 0]\}$, $R_{13} = \{[0, 0], [1, 1], [0, 1]\}$, $R_{14} = \{[0, 0], [0, 1], [1, 0]\}$, $R_{15} = \{[1, 1], [1, 0], [0, 1]\}$,
- čtyřprvková relace: $R_{16} = \{[0, 0], [1, 1], [1, 0], [0, 1]\} = M \times M$, tj. úplná relace. Z uvedeného výčtu je zřejmé, že existuje celkem 16 relací ve dvouprvkové množině M.

b) Počet všech binárních relací v množině o n prvcích je 2^{n^2}.

2. $R = \{[0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5], [5, 6], [6, 7]\}$.

Kartézský a uzlový graf relace R je na obrázku 2.74.



Obr. 2.74:

3. Relace zadané výčtem prvků jsou následující:

a) $R = \{[2,8],[3,7],[4,6],[5,5],[6,4]\}$,
$O_1(R) = \{2,3,4,5,6\}$, $O_2(R) = \{4,5,6,7,8\}$,

b) $S = \{[2,4],[2,6],[2,8],[3,6],[4,8]\}$,
$O_1(S) = \{2,3,4\}$, $O_2(S) = \{4,6,8\}$,

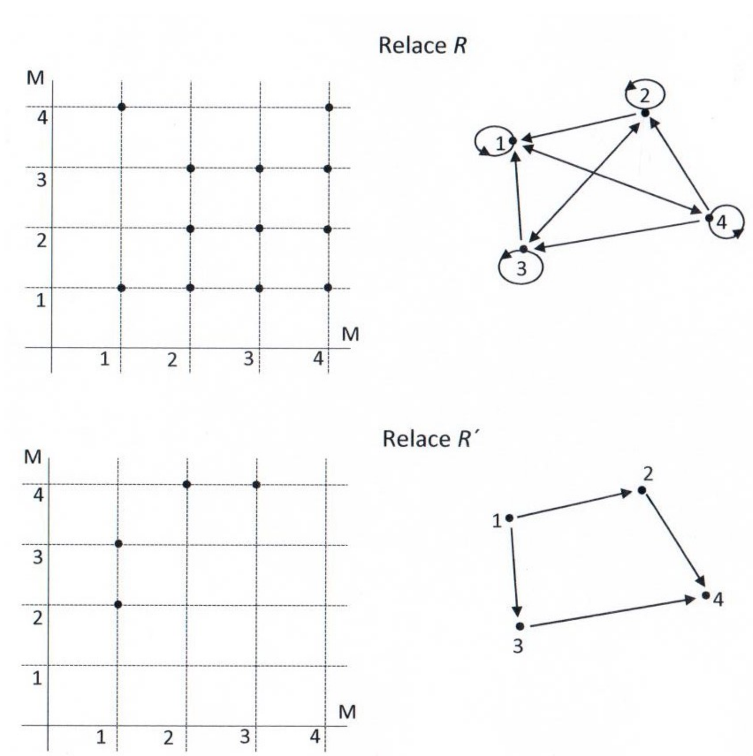
c) $T = \{[2,4],[3,5],[4,6],[5,7],[6,8]\}$,
$O_1(T) = \{2,3,4,5,6\}$, $O_2(T) = \{4,5,6,7,8\}$.

4. Relace zadané výčtem prvků jsou následující:

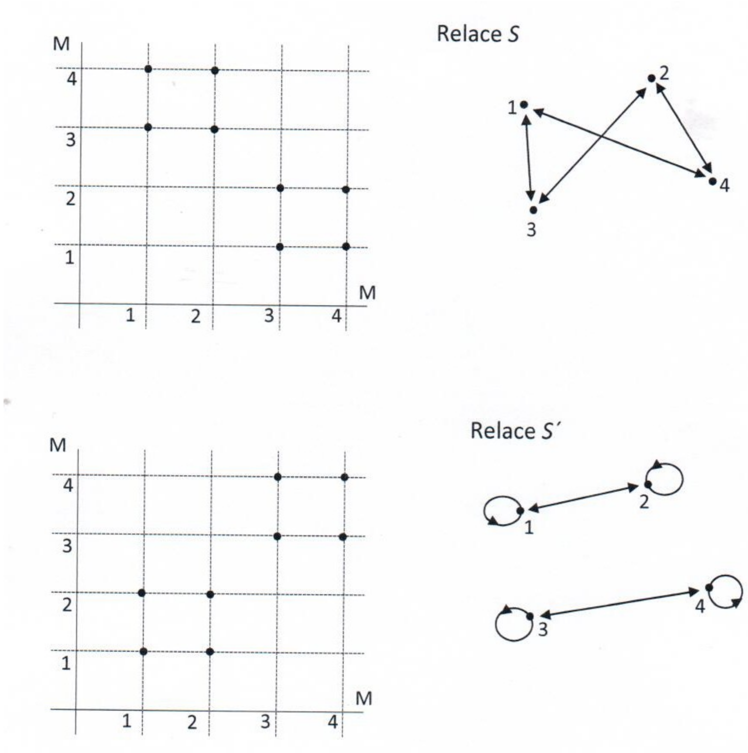
a) $R = \{[1,4],[2,3],[1,1],[2,1],[2,2],[3,1],[3,2],[3,3],[4,1],[4,2],[4,3],[4,4]\}$,
$R' = \{[x,y] \in M \times M; x < y \wedge x + y \neq 5\}$,
$R' = \{[1,2],[1,3],[2,4],[3,4]\}$,
$R^{-1} = \{[4,1],[3,2],[1,1],[1,2],[2,2],[1,3],[2,3],[3,3],[1,4],[2,4],[3,4],[4,4]\}$,

b) $S = \{[1,3],[1,4],[2,3],[2,4],[3,2],[3,1],[4,2],[4,1]\}$,
$S' = \{[x,y] \in M \times M; x < 3 \veebar y > 2\}$,
$S' = \{[1,2],[1,1],[2,1],[2,2],[3,3],[3,4],[4,3],[4,4]\}$,
$S^{-1} = \{[3,1],[4,1],[3,2],[4,2],[2,3],[1,3],[2,4],[1,4]\}$.

Kartézský a uzlový graf relací R a R' je na obrázku 2.75, kartézský a uzlový graf relací S a S' je na obrázku 2.76,



Obr. 2.75:



Obr. 2.76:

5. Složené relace zadané výčtem prvků jsou následující:

$R \circ S = \{[1,2],[1,1],[2,2],[2,1],[1,3],[1,4],[2,3],[2,4],[3,3],[3,4],[3,2],[3,1],[4,3],$
$[4,4],[4,2],[4,1]\},$
$S \circ R = \{[1,1],[1,2],[1,3],[1,4],[2,1],[2,2,],[2,3],[2,4],[3,3],[3,1],[3,2],[3,4],[4,3],$
$[4,1],[4,2],[4,4]\},$
$R \circ R = \{[1,1],[1,2],[1,3],[1,4],[2,1],[2,2],[2,3],[2,4],[3,4],[3,1],[3,3],[3,2],[4,4],$
$[4,1],[4,3],[4,2]\},$
$S \circ S = \{[1,2],[1,1],[2,2],[2,1],[3,3],[3,4],[4,3],[4,4]\}.$

6. $R_1 = \{[2,2],[2,3],[2,5],[3,2],[3,3],[3,5],[5,2],[5,3],$
$R_2 = \{[2,5],[2,7],[3,7]\},$
$R_1 \circ R_2 = \{[2,5],[2,7],[3,5],[3,7],[5,5],[5,7]\},$
$R_1 \circ R_1 = \{[2,5],[2,3],[3,2],[3,3],[3,5],[5,2],[5,3],[5,5]\},$
$R_2 \circ R_1 = \{[2,2],[2,3]\},$
$R_2 \circ R_2 = \emptyset.$

7. Například relace $R = \{[1,2],[3,4]\}$. Platí, že složená relace $R \circ R = \emptyset$.

8. a) $R_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2\},$
b) $R_2 = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y < 3x + 1\},$
c) $R_3 = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y|3x\},$

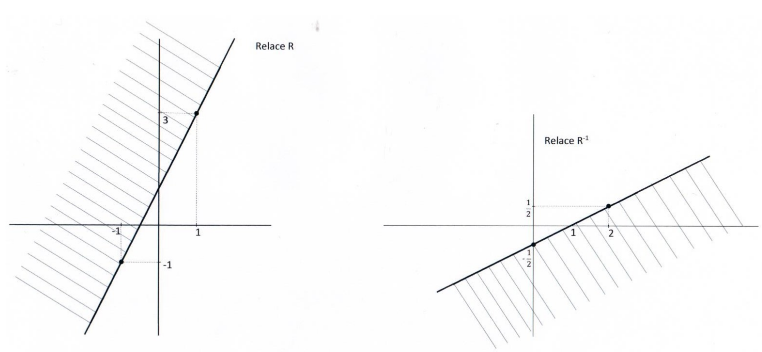
d) $R_4 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = 2y\}$,
e) $R_5 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geq 7 - y\}$.

9. a) $R_1' = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \neq y\}$,
b) $R_2' = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq y\}$,
c) $R_3' = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y \nmid x\}$,
d) $R_4' = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y \neq 6\}$.

10. $R = \{[3, 1], [4, 2], [5, 6]\}$,
$S = \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [2, 5], [2, 6]\}$,
$T = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 2], [2, 1], [3, 1]\}$,
$R' = \{[x, y] \in A \times A : y \neq 2x - 4\}$,
$S' = \{[x, y] \in A \times A : x^2 \geq y\}$,
$T' = \{[x, y] \in A \times A : x + y \geq 5\}$
$S \cap T = \{[x, y] \in A \times A : x^2 < y \wedge x + y < 5\}$,
$R \cap T' = \{[x, y] \in A \times A : y = 2x - 4 \wedge x + y \geq 5\}$,
$R \cup S = \{[x, y] \in A \times A : y = 2x - 4 \vee x^2 < y\}$,

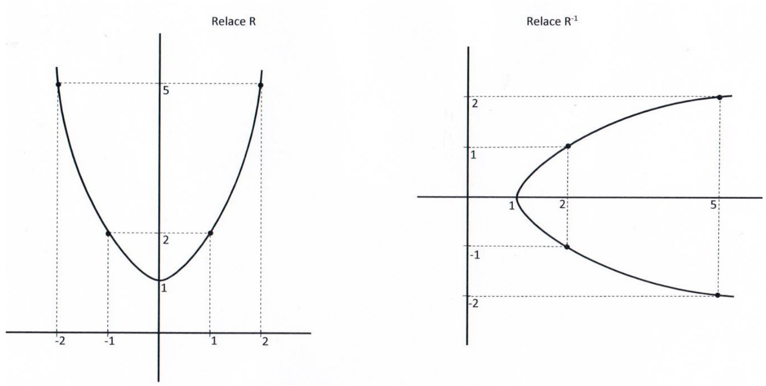
11. $R_1 = \{[2, 1], [3, 2]\}$, $R_2 = \{[1, 3], [3, 2]\}$,
$R_1 \circ R_2 = \{[2, 3]\}$, $R_2 \circ R_1 = \{[1, 2], [3, 1]\}$,
$R_1 \cup R_2 = \{[x, y] \in A \times A : y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2} \vee y = x - 1\} = \{[1, 3], [3, 2], [2, 1]\}$,
$R_1 \cap R_2 = \{[x, y] \in A \times A : y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2} \wedge y = x - 1\} = \{[3, 2]\}$,
$O_1(R_1 \cup R_2) = \{1, 2, 3\} = A$, $O_2(R_1 \cup R_2) = \{1, 2, 3\} = A$,
$O_1(R_1 \cap R_2) = \{3\}$, $O_2(R_1 \cap R_2) = \{2\}$.

12. $R^{-1} = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y \leq \frac{x-1}{2}\}$, kartézské grafy relací R a R^{-1} jsou na obrázku 2.77.

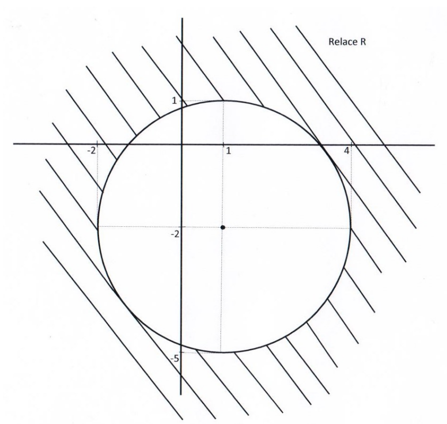


Obr. 2.77:

13. Kartézské grafy relací R a R^{-1} jsou na obrázku 2.78, $R^{-1} = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x - 1 = y^2\}$



Obr. 2.78:



Obr. 2.79:

14. Kartézský graf relace R je na obrázku 2.79, $O_1(R) = O_2(R) = \mathbb{R}$.

15. a) $O_1(R_1) = \mathbb{N}$, $O_2(R_1) = L$, kde L je množina všech kladných lichých čísel (část kartézského grafu je na obrázku 2.80),

b) $O_1(R_2) = \mathbb{N} - \{1, 2, 3\}$, $O_2(R_2) = \mathbb{N}$ (část kartézského grafu je na obrázku 2.81),

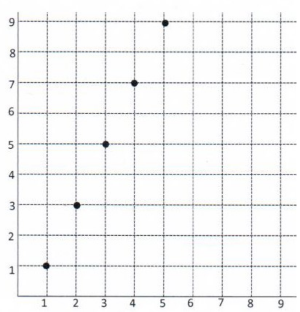
c) $O_1(R_3) = \mathbb{R}$, $O_2(R_3) = \langle -1; +\infty \rangle$, (obrázek 2.82),

d) $O_1(R_4) = \mathbb{R}$, $O_2(R_4) = \langle 0; +\infty \rangle$, (obrázek 2.83),

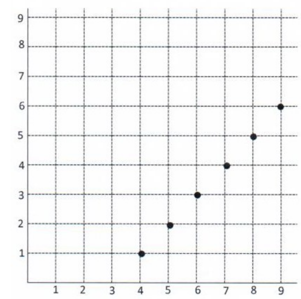
e) $O_1(R_5) = \langle -2; 2 \rangle$, $O_2(R_5) = \langle -2; 2 \rangle$, (obrázek 2.84),

f) $O_1(R_6) = \mathbb{R}$, $O_2(R_6) = \{3\}$, (obrázek 2.85),

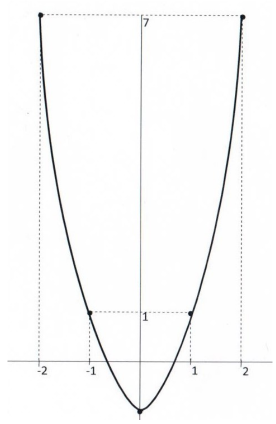
16. $R = \{$[Praha, Vltava], [Děčín, Labe], [Bratislava, Dunaj]$\}$.



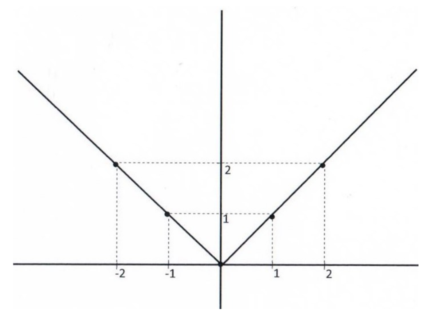
Obr. 2.80:



Obr. 2.81:



Obr. 2.82:



Obr. 2.83:

2.2.3 Binární relace v množině M a jejich vlastnosti

V celé této části budeme pracovat s binárními relacemi definovanými v množině M. Prvky uvažovaných relací budou tedy uspořádané dvojice, jejichž první a druhé složky budou prvky jedné množiny M. V následujícím textu vysvětlíme základní vlastnosti binárních relací v množině M.

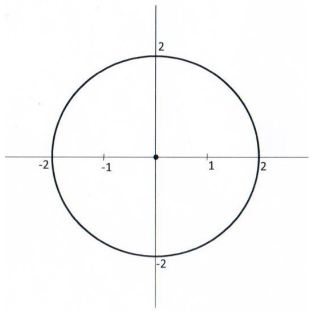
Definice 2.8: Řekneme, že binární relace R je **reflexivní** v množině M (zkráceně značíme $\mathcal{R}$) právě tehdy, když platí:

$$(\forall x \in M)[[x, x] \in R]. \tag{2.2}$$

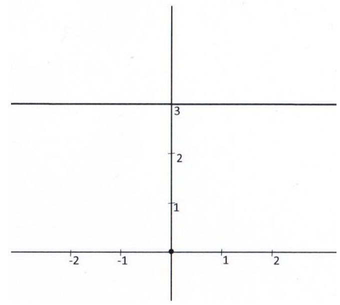
Poznámka 2.13 Je-li relace R reflexivní v množině M, je každý prvek množiny M v relaci sám se sebou. V uzlovém grafu se tato vlastnost projeví tak, že každý uzel je opatřen smyčkou. Kartézský graf reflexivní relace obsahuje všechny body na hlavní diagonále. V případě, že relace R není reflexivní (ve zkratce $\neg\mathcal{R}$), musí platit negace výroku 2.2 z definice 2.8, tedy

$$(\exists x \in M)[[x, x] \notin R].$$

Pokud tedy relace R není reflexivní, existuje v množině M prvek (stačí jeden!), který není sám se sebou v relaci. V uzlovém grafu se toto projeví tak, že alespoň jeden uzel není opatřen smyčkou.



Obr. 2.84:



Obr. 2.85:

Definice 2.9: Řekneme, že binární relace R je **antireflexivní** v množině M (zkráceně značíme $\mathcal{AR}$) právě tehdy, když platí

$$(\forall x \in M)[[x, x] \notin R]. \tag{2.3}$$

Poznámka 2.14 Je-li relace R antireflexivní v množině M, nesmí být žádný prvek množiny M v relaci sám se sebou, v uzlovém grafu relace tedy nesmí být ani jedna smyčka. Kartézský graf antireflexivní relace neobsahuje ani jeden bod na hlavní diagonále. V případě, že relace R není antireflexivní (ve zkratce $\neg\mathcal{AR}$), musí platit negace výroku 2.3 z definice 2.9, tedy

$$(\exists x \in M)[[x, x] \in R].$$

Pokud tedy relace R není antireflexivní, existuje v množině M prvek (stačí jeden!), který je sám se sebou v relaci. V uzlovém grafu se toto projeví tak, že v množině M existuje aspoň jeden uzel, který je opatřen smyčkou.

Je zřejmé, že žádná relace nemůže být reflexivní a současně antireflexivní. Existují však relace v množině, které nejsou reflexivni ani antireflexivní (obsahuje-li uzlový graf alespoň jednu smyčku, ale ne všechny). Tyto dvě vlastnosti tedy nejsou doplňkové.

Definice 2.10: Řekneme, že binární relace R je **symetrická** v množině M (zkráceně značíme $\mathcal{S}$) právě tehdy, když platí

$$(\forall x, y \in M)[[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R]. \tag{2.4}$$

Poznámka 2.15 Symetrická relace tedy s každou uspořádanou dvojicí $[x, y]$ obsahuje i dvojici $[y, x]$. To se uzlovém grafu projeví tak, že každé dva různé uzly množiny M jsou spojeny buď oboustranně orientovanou šipkou, nebo nejsou spojeny vůbec. U symetrické relace na počtu smyček v uzlovém grafu nezáleží. Kartézský graf symetrické relace musí být souměrný podle hlavní diagonály. V případě, že relace R není symetrická (ve zkratce $\neg\mathcal{S}$), musí platit negace výroku 2.4 z definice 2.10, tedy

$$(\exists x, y \in M)[[x, y] \in R \wedge [y, x] \notin R].$$

Pokud tedy relace R není symetrická, existuje v množině M dvojice různých prvků x, y (stačí jedna!), kdy prvek x je v relaci s prvkem y, ale prvek y není v relaci s prvkem x. V uzlovém grafu pak stačí k vyloučení symetrie relace R existence jediné jednoduché šipky. Poznamenejme ještě užitečné tvrzení:

Relace R je symetrická $\Leftrightarrow R = R^{-1}$.

Definice 2.11: Řekneme, že binární relace R je **antisymetrická** v množině M (zkráceně značíme $\mathcal{AS}$) právě tehdy, když platí

$$(\forall x, y \in M)[(x \neq y \wedge [x, y] \in R) \Rightarrow [y, x] \notin R]. \tag{2.5}$$

Poznámka 2.16 V uzlovém grafu antisymetrické relace musí být každé dva různé uzly x, y množiny M spojeny buď jednoduchou šipkou, nebo nejsou spojeny vůbec. Na počtu smyček v grafu antisymetrické relace nezáleží. V kartézském grafu antisymetrické relace nejsou žádné dva různé body souměrné podle hlavní diagonály (s výjimkou bodů ležících na hlavní diagonále). V případě, že relace R není antisymetrická (ve zkratce $\neg\mathcal{AS}$), musí platit negace výroku 2.5 definice 2.11, tedy

$$(\exists x, y \in M)[x \neq y \wedge [x, y] \in R \wedge [y, x] \in R].$$

Pokud relace R není antisymetrická, existuje v množině M dvojice různých prvků x, y (stačí jedna!), kdy prvek x je v relaci s prvkem y a současně prvek y je v relaci s prvkem x. V uzlovém grafu tedy stačí k vyloučení antisymetrie dané relace existence jediné oboustranné šipky.

Z definice 2.10 a 2.11 je zřejmé, že vlastnosti symetrie a antisymetrie nejsou doplňkové. Existují relace, které nejsou symetrické ani antisymetrické (obsahuje-li jejich uzlový graf jednoduché i oboustranné šipky). Existují však i relace, které mohou být symetrické a antisymetrické současně. To nastane pouze v případě, kdy ani jedna dvojice různých prvků množiny M není spojena žádnou šipkou. Například v množině $M = \{1, 2, 3\}$ je relace $R = \{[1, 1], [2, 2]\}$ současně symetrická i antisymetrická.

V literatuře bývá často vlastnost antisymetrie relace R definována takto:

$$(\forall x, y \in M)[([x, y] \in R \wedge [x, y] \in R) \Rightarrow x = y]. \tag{2.6}$$

Snadno se lze přesvědčit pomocí výrokové logiky, že výroky 2.6 a 2.5 z definice 2.11 jsou ekvivalentní.

Definice 2.12: Řekneme, že binární relace R je **tranzitivní** v množině M (zkráceně značíme $\mathcal{T}$) právě tehdy, když platí

$$(\forall x, y, z \in M)[([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R) \Rightarrow [x, z] \in R]. \tag{2.7}$$

Poznámka 2.17 Relace R je tedy tranzitivní, když s každými dvěma uspořádanými dvojicemi $[x, y]$, $[y, z]$ obsahuje i uspořádanou dvojici $[x, z]$. Tranzitivita relace je vlastnost, která se z uzlového i kartézského grafu určuje obtížně. Obecně platí, že tranzitivitu relace lze jednodušeji vyloučit než ji prokázat. K tomu může sloužit negace vlasnosti $\mathcal{T}$. V případě, že relace R není tranzitivní (ve zkratce $\neg\mathcal{T}$), musí platit negace výroku 2.7 definice 2.12, tedy

$$(\exists x, y, z \in M)[([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R) \wedge [x, z] \notin R].$$

Pokud tedy relace R není tranzitivní, existuje v množině M dvojice prvků x, y, které jsou spolu v relaci a současně dvojice prvků y, z, které jsou spolu v relaci, ale prvky x, z spolu v relaci nejsou. Nalezení trojice prvků s touto vlastností (tedy vyloučení tranzitivnosti relace) se v uzlovém grafu často podaří. Jednou z variant například je, že v uzlovém grafu tranzitivní relace pro každou oboustrannou šipku musí být oba její koncové uzly opatřeny smyčkou. Je-li relace R zadána výčtem prvků, je velmi užitečné následující tvrzení:

Relace R je tranzitivní $\Leftrightarrow R \circ R \subset R$.

Definice 2.13: Řekneme, že binární relace R je **souvislá** v množině M (zkráceně označíme $\mathcal{SO}$) právě tehdy, když platí

$$(\forall x, y \in M)[x \neq y \Rightarrow ([x, y] \in R \vee [y, x] \in R)]. \tag{2.8}$$

Poznámka 2.18 Souvislá relace musí pro každé dva různé prvky x, y obsahovat alespoň jednu z uspořádaných dvojic $[x, y]$, $[y, x]$. V uzlovém grafu souvislé relace musí být každé dva různé uzly množiny M spojeny buď jednoduchou šipkou, nebo oboustrannou šipkou. Na počtu smyček v grafu nezáleží. V případě, že relace R není souvislá (ve zkratce $\neg\mathcal{SO}$), musí platit negace výroku 2.8 definice 2.13, tedy

$$(\exists x, y \in M)[x \neq y \wedge [x, y] \notin R \wedge [y, x] \notin R].$$

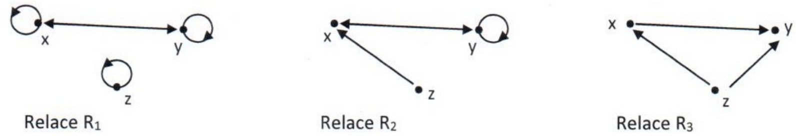
Pokud tedy relace R není souvislá, existuje v množině M dvojice různých prvků x, y (stačí jedna!), kdy prvek x není v relaci s prvkem y a současně prvek y není v relaci s prvkem x, neboli prvky ani jedné z dvojic $[x, y]$, $[y, x]$ nejsou v relaci. V uzlovém grafu stačí k vyloučení souvislosti dané relace existence jediné dvojice různých uzlů, které nejsou spojeny žádnou šipkou.

Příklad 2.15 Je dána množina $M = \{x, y, z\}$. Určete vlastnosti relací v množině M a zakreslete jejich grafy:

a) $R_1 = \{[x, x], [y, y], [z, z], [x, y], [y, x]\}$,
b) $R_2 = \{[x, y], [y, x], [y, y], [z, x]\}$,
c) $R_3 = \{[z, x], [z, y], [x, y]\}$,

Řešení:
a) R_1 má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
b) R_2 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
c) R_3 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$,

Grafy relací R_1, R_2, R_3 jsou na obrázku 2.86.



Obr. 2.86:

Příklad 2.16 Rozhodněte, jaké vlastnosti mají následující binární relace v množině $M = \{a, b, c, d\}$.

a) $R_1 = \{[c, b], [b, c], [a, a], [b, b], [c, c], [d, d]\}$,
b) $R_2 = \{[a, b], [c, d], [a, a], [b, b]\}$,
c) $R_3 = \{[a, b], [d, c], [b, d], [a, c], [a, d], [b, c]\}$,
d) $R_4 = \{[c, b], [b, c], [b, a]\}$,
e) $R_5 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [c, b], [b, c], [b, a], [a, b], [a, c], [c, a], [d, d]\}$,
f) $R_6 = \{[c, a], [d, b]\}$,
g) $R_7 = \{[a, a]\}$.

Řešení: Doporučujeme čtenáři, aby si pro určení všech vlastností jednotlivých relací, znázornil tyto relace uzlovým grafem.
a) R_1 má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
b) R_2 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
c) R_3 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$,
d) R_4 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
e) R_5 má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
f) R_6 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
g) R_7 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$.

Příklad 2.17 Určete vlastnosti relace $R = \{[x, y] \in M \times M; x \cong y\}$ z příkladu 2.7, kde $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ je množina všech úseček, jejichž krajní body jsou vrcholy obdélníka $ABCD$.

Řešení: Připomeňme, že relace R je dána výčtem prvků:
$R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [e, e], [f, f], [a, c], [c, a], [b, d], [d, b], [e, f], [f, e]\}$.
Relace R má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$.

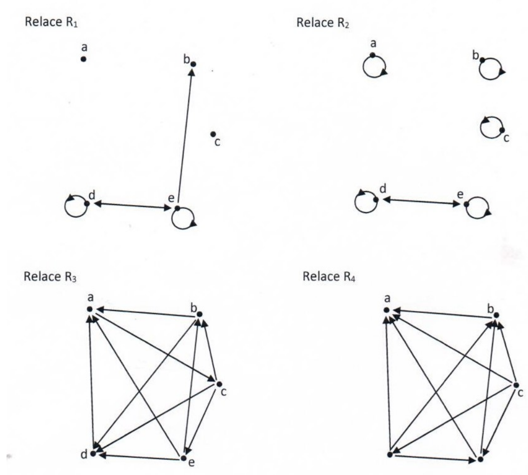
2.2.4 Úlohy k procvičení

1. Je dána množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Zapište druhým způsobem (výčtem prvků, resp. charakteristickou vlastností) následující binární relace v množině M:

a) $T_1 = \{[x, y] \in M^2; y < x \wedge y^2 > x\}$,
b) $T_2 = \{[x, y] \in M^2; y = 1 \Rightarrow x + y = 5\}$,
c) $T_3 = \{[x, y] \in M^2; x = y^2 \vee 2y = x\}$,
d) $T_4 = \{[1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4], [5, 5], [6, 6]\}$,
e) $T_5 = \{[1, 3], [2, 4], [3, 5], [4, 6]\}$,
f) $T_6 = \{[1, 1], [1, 3], [3, 1], [3, 3], [3, 5], [5, 3], [5, 5], [1, 5], [5, 1]\}$.

Určete oba obory daných relací. Sestrojte jejich uzlový i kartézský graf a zapište jejich vlastnosti.

2. Je dána množina $A = \{a, b, c, d, e\}$. Určete vlastnosti relací R_1, R_2, R_3, R_4 v množině A, které jsou znázorněny na uzlových grafech na obrázku 2.87.



Obr. 2.87:

3. V množině $M = \{1, 2, 3\}$ definujte osm binárních relací, sestrojte jejich grafy a určete jejich vlastnosti.

4. V množině $M = \{1, 2, 3\}$ definujte binární relaci, která nebude mít žádnou z vlastností: reflexivní, antireflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní, souvislá.

5. V množině $A = \{a, b, c, d\}$ definujte alespoň jednu neprázdnou binární relaci, která je:

a) $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$, b) $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{S}$, c) $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{T}$,
d) $\mathcal{AR} \wedge \mathcal{AS}$, e) $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \mathcal{S}$, f) $\mathcal{S} \wedge \mathcal{SO}$,
g) $\mathcal{S} \wedge \mathcal{SO}$, h) $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{T}$, i) $\neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{SO}$,

6. V množině $M = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ jsou dány binární relace:

a) $R_1 = \{[x, y] \in M \times M;$ číslo x je soudělné s číslem $y\}$,
b) $R_2 = \{[x, y] \in M \times M; x + 2y = 10\}$.

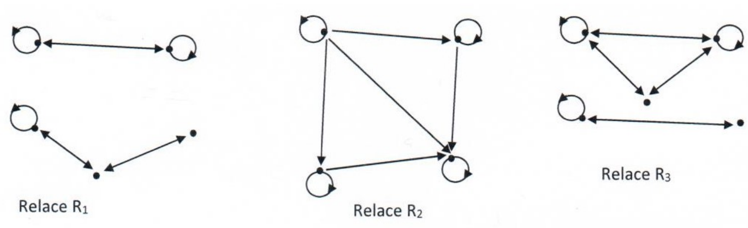
Určete jejich vlastnosti.[7]

7. V množině $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je dána binární relace

$$R = \{[x, y] \in M \times M; y \text{ je zbytek při dělení čísla } x \text{ číslem } 3\}.$$

Určete vlastnosti relace R a zakreslete její uzlový a kartézský graf.

8. Určete, které vlastnosti mají relace R_1, R_2 a R_3 znázorněné na obrázku 2.88.



Obr. 2.88:

9. Rozhodněte o každé z těchto relací, zda je reflexivní, symetrická, tranzitivní a souvislá:

a) shodnost trojúhelníků v rovině,
b) kolmost přímek v rovině,
c) mimoběžnost přímek v prostoru,
d) dělitelnost přirozených čísel,
e) inkluze množin v libovolném systému množin,
f) relace "být větší" v množině reálných čísel,
g) rovnost v množině celých čísel.

10. Je dána množina $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Určete vlastnosti relací R_1, R_2, R_3 v množině M, kde

a) $R_1 = \{[x, y] \in M \times M; y = x + 1\}$,
b) $R_2 = \{[x, y] \in M \times M; y = -x\}$,
c) $R_3 = \{[x, y] \in M \times M; y = |x|\}$.

11. Vraťme se nyní k poznámce 2.9 v odstavci 2.2.1, kde jsme uvažovali rodinu, jejíž jednotlivé členy jsme označili malými tiskacími písmeny:
m (matka), o (otec), p (Petra), j (Jan), k (Kamil).
Uvažovanou rodinu zde představuje množina $M = \{m, o, p, j, k\}$. V množině M je dána relace $R = \{[x, y] \in M \times M; x \text{ je bratrem } y\}$. Určete vlastnosti relace R.

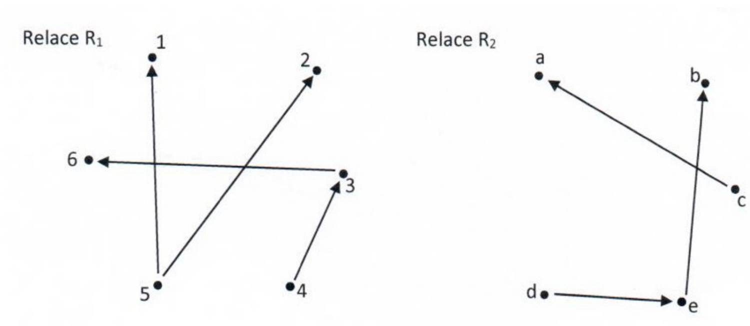
12. Určete vlastnosti relací R_1, R_2, R_3 z příkladu 2.6 v odstavci 2.2.1.

[7] Připomeňme, že přirozená čísla x a y nazýváme soudělná právě tehdy, když jejich největší společný dělitel je větší než jedna, tj. $NSD(x, y) > 1$.

13. V množině $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ je dána relace $R = \{[a, b], [b, c], [f, g], [g, a]\}$. Doplňte relaci R co nejmenším počtem uspořádaných dvojic tak, aby doplněná relace R_1 byla tranzitivní v množině M. Zakreslete uzlový graf nově vzniklé relace R_1.

14. Na hřišti si hraje šest dětí: Pavel, Kája, Zdeněk, Jana, Alena a Tonda. Definujte alespoň jednu relaci R danou charakteristickou vlastností "dítě x se kamarádí s dítětem y", kde $x, y \in A$, přičemž A je množina všech dětí na hřišti. Určete vlastnosti relace R a zakreslete její uzlový graf.

15. Doplňte uzlový graf relací R_1 a R_2 na obrázku 2.89 tak, aby nově vzniklé relace byly $\mathcal{AR} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{SO}$.



Obr. 2.89:

16. Uvažujme Z množinu všech lidí. Které z následujících relací jsou symetrické a které jsou tranzitivní v množině Z?

a) $S_1 = \{[x, y] \in Z \times Z : x$ je otcem $y\}$,
b) $S_2 = \{[x, y] \in Z \times Z : x$ bydlí ve stejném městě jako $y\}$,
c) $S_3 = \{[x, y] \in Z \times Z : x$ navštěvuje stejnou školu jako $y\}$,
d) $S_4 = \{[x, y] \in Z \times Z : x$ má menší hmotnost než $y\}$,
e) $S_5 = \{[x, y] \in Z \times Z : x$ je vyšší než $y\}$.

17. Je dána množina $B = \{x, y\}$. Určete výčtem prvků všechny relace v množině B, které jsou:

a) reflexivní,
b) antireflexivní,
c) symetrické,
d) nejsou tranzitivní,
e) reflexivní a nejsou tranzitivní,
f) souvislé.

Výsledky:

1. a) $T_1 = \{[3, 2], [4, 3], [5, 3], [5, 4], [6, 3], [6, 4], [6, 5]\}$, $O_1(T_1) = \{3, 4, 5, 6\}$, $O_2(T_1) = \{2, 3, 4, 5\}$,

relace T_1 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,

b) $T_2 = \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [2, 2], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [2, 6], [3, 2], [3, 3], [3, 4],$

$[3,5], [3,6], [4,1], [4,2], [4,3], [4,4], [4,5], [4,6], [5,2], [5,3], [5,4], [5,5], [5,6], [6,2], [6,3], [6,4], [6,5], [6,6]\}$,

$O_1(T_2) = \{1,2,3,4,5,6\} = M$, $O_2(T_2) = \{1,2,3,4,5,6\} = M$,

relace T_2 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$,

c) $T_3 = \{[1,1], [4,2], [2,1], [6,3]\}$, $O_1(T_3) = \{1,2,4,6\}$, $O_2(T_3) = \{1,2,3\}$,

relace T_3 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,

d) $T_4 = \{[x,y] \in M \times M; x = y\}$, $O_1(T_4) = \{1,2,3,4,5,6\} = M$, $O_2(T_4) = \{1,2,3,4,5,6\} = M$,

relace T_4 má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,

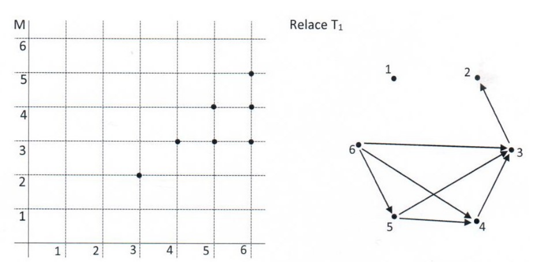
e) $T_5 = \{[x,y] \in M \times M; x < y \wedge x + 2 = y\}$, $O_1(T_5) = \{1,2,3,4\}$, $O_2(T_5) = \{3,4,5,6\}$,

relace T_5 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,

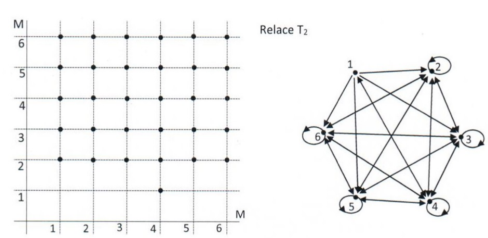
f) $T_6 = \{[x,y] \in M \times M; 2 \nmid x \wedge 2 \nmid y\}$, $O_1(T_6) = \{1,3,5\}$, $O_2(T_6) = \{1,3,5\}$,

relace T_6 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$.

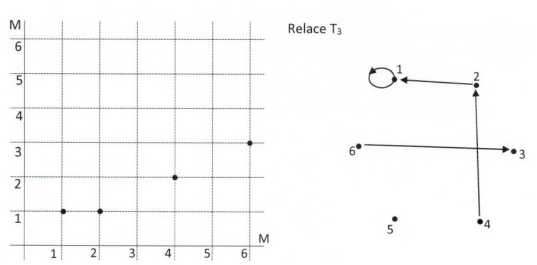
Kartézské a uzlové grafy relací T_1, …, T_6 jsou po řadě znázorněny na obrázcích 2.90, …, 2.95.



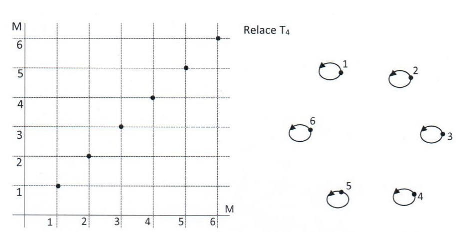
Obr. 2.90:



Obr. 2.91:



Obr. 2.92:



Obr. 2.93:

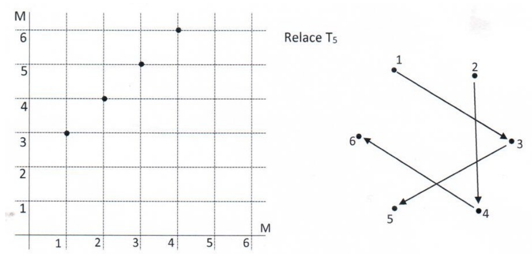
2. Relace

R_1 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,

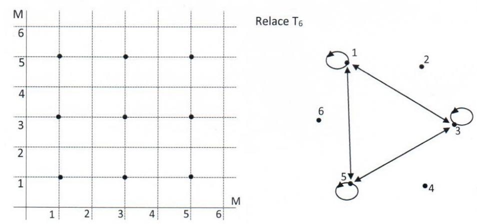
R_2 má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,

R_3 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$,

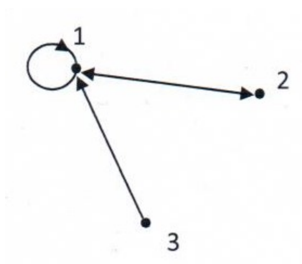
R_4 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$,



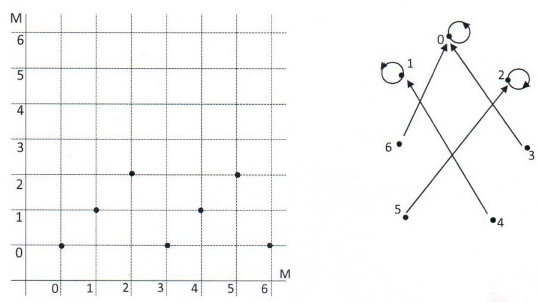
Obr. 2.94:



Obr. 2.95:



Obr. 2.96:



Obr. 2.97:

4. Například relace $R = \{[1,1],[3,1],[2,1],[1,2]\}$ graficky znázorněná na obrázku 2.96.

6. Relace
a) R_1 má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
b) R_2 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$.

7. $R = \{[0,0],[1,1],[2,2],[3,0],[4,1],[5,2],[6,0]\}$,

relace R má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$, kartézský a uzlový graf relace R je na obrázku 2.97.

8. Relace
R_1 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
R_2 má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
R_3 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$.

9. Relace
a) shodnost trojúhelníků v rovině je: $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
b) kolmost přímek v rovině je: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
c) mimoběžnost přímek v prostoru: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
d) dělitelnost přirozených čísel: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
e) inkluze množin v libovolném systému množin je $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
f) "být větší" v množině reálných čísel je: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$,
g) rovnost v množině celých čísel je: $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$.

10. Relace R_1, R_2 a R_3 nejdříve zapíšeme výčtem prvků a následně určíme jejich vlastnosti:

a) $R_1 = \{[2,-1],[-1,0],[0,1],[1,2]\}$.
R_1 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,

b) $R_2 = \{[-2,2],[-1,1],[0,0],[1,-1],[2,-2]\}$.
R_2 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,

c) $R_3 = \{[-2,2],[-1,1],[0,0],[1,1],[2,2]\}$.
R_3 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$.

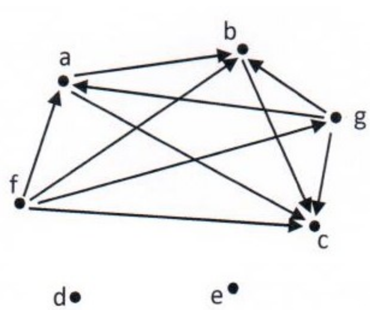
11. Relace R, která je dána výčtem prvků $R = \{[j,p],[j,k],[k,j],[k,p]\}$, má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$.

12. a) $R_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}; y = x+3\}$,
R_1 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$.

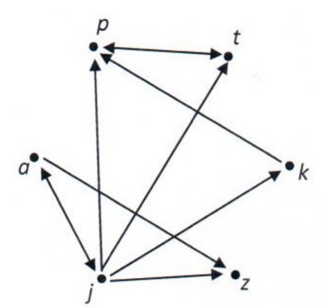
b) $R_2 = \{[x,y] \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}; y = x^2\}$,
R_2 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$.

c) $R_3 = \{[x,y] \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}; (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4\}$,
R_3 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$.

13. $R_1 = \{[a,b],[b,c],[f,g],[g,a],[a,c],[f,a],[g,b],[f,c],[f,b],[g,c]\}$, uzlový graf relace R_1 je na obrázku 2.98.



Obr. 2.98:

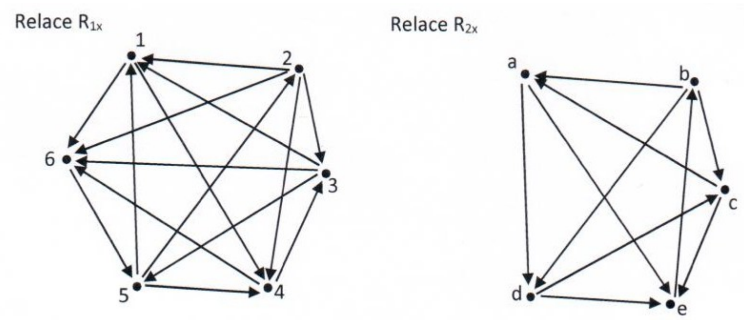


Obr. 2.99:

14. Využijeme pouze počátečních písmen ve jménech hochů a dívek na hřišti, tj. $A = \{p,k,z,j,a,t\}$. Relaci R danou charakteristickou vlastností "dítě x se kamarádí s dítětem y" můžeme zadat například takto: Kája se kamarádí s Pavlem, ale Pavel se s Kájou nekamarádí. Tonda a Pavel se kamarádí navzájem, Jana se kamarádí se všemi ostatními, ale s Janou se kamarádí pouze Alena. Alena se dále kamarádí ještě se Zdeňkem. Relace R takto zadaná vyjádřená výčtem prvků
$R = \{[k,p],[t,p],[p,t],[j,p],[j,a],[j,k],[j,z],[j,t],[a,j],[a,z]\}$ má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$. Uzlový graf zvolené relace R je na obrázku 2.99.

15. Na obrázku 2.100 je uvedeno jedno z možných řešení uzlových grafů u relací R_{1x}, resp. R_{2x} vzniklých z relací R_1, resp. R_2.

16. Relace S_2, S_3 jsou symetrické v množině Z. Relace S_2, S_3, S_4, S_5 jsou tranzitivní v množině Z.



Obr. 2.100:

17. a) $R_1 = \{[x,x],[y,y]\}$, $R_2 = \{[x,x],[y,y],[x,y]\}$, $R_3 = \{[x,x],[y,y],[y,x]\}$, $R_4 = \{[x,x],[y,y],[y,x],[x,y]\}$ (existují čtyři relace ve dvouprvkové množině B, které jsou reflexivní),

b) $S_1 = \{[x,y]\}$, $S_2 = \{[y,x]\}$, $S_3 = \{[x,y],[y,x]\}$, $S_4 = \emptyset$ (existují čtyři relace ve dvouprvkové množině B, které jsou antireflexivní),

c) $T_1 = \{[x,x]\}$, $T_2 = \{[y,y]\}$, $T_3 = \{[x,x],[y,y]\}$, $T_4 = \{[x,x],[x,y],[y,x]\}$, $T_5 = \{[y,y],[x,y],[y,x]\}$, $T_6 = \{[x,x],[y,y],[x,y],[y,x]\}$, $T_1 = \emptyset$ (existuje sedm relací ve dvouprvkové množině B, které jsou symetrické),

d) $U_1 = \{[x,x],[x,y],[y,x]\}$, $U_2 = \{[y,y],[x,y],[y,x]\}$, $U_3 = \{[x,y],[y,x]\}$ (existují tři relace ve dvouprvkové množině B, které nejsou tranzitivní),

e) nemá řešení,

f) $V_1 = \{[x,x],[x,y],[y,x]\}$, $V_2 = \{[y,y],[x,y],[y,x]\}$, $V_3 = \{[x,y],[y,x]\}$, $V_4 = \{[x,y]\}$, $V_5 = \{[x,y],[x,x]\}$, $V_6 = \{[x,y],[y,y]\}$, $V_7 = \{[y,x]\}$, $V_8 = \{[y,x],[x,x]\}$, $V_9 = \{[y,x],[y,y]\}$, $V_{10} = \{[y,x],[y,y],[x,x]\}$, $V_{11} = \{[x,y],[y,y],[x,x]\}$, $V_{12} = \{[y,x],[x,x],[y,y],[x,y]\}$ (existuje dvanáct relací relací ve dvouprvkové množině B, které jsou souvislé).

2.3 Relace ekvivalence a relace uspořádání

V následujícím textu se budeme zabývat speciálními relacemi definovanými v neprázdné množině M. Jedná se o relaci ekvivalence a relaci uspořádání, s jejichž aplikacemi se setkáváme v učivu matematiky na 1. stupni ZŠ.

2.3.1 Relace ekvivalence a rozklad množiny

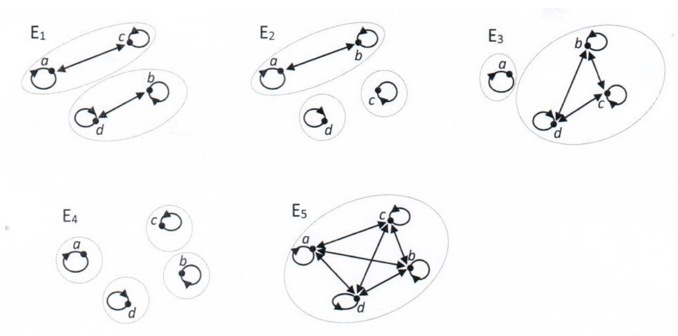
Definice 2.14: Binární relaci R definovanou v množině M nazýváme **relací ekvivalence** právě tehdy, když R je reflexivní, symetrická a tranzitivní relace.

Poznámka 2.19 a) Relace ekvivalence R je vždy relací **na množině** M, neboť $O_1(R) = M$, což plyne z reflexivnosti relace R.

b) Relaci ekvivalence na množině M značíme často symbolem $\sim$. Pokud pro prvky $x, y \in M$ platí, že $[x, y] \in \sim$, říkáme, že prvky x, y jsou **ekvivalentní** a píšeme $x \sim y$.

Příklad 2.18 Je dána množina $M = \{a, b, c, d\}$. Následující relace jsou příklady relací ekvivalence na množině M.

$E_1 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [a, c], [c, a], [b, d], [d, b]\}$,
$E_2 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [a, b], [b, a]\}$,
$E_3 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [b, c], [c, b], [b, d], [d, b], [c, d], [d, c]\}$,
$E_4 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d]\}$,
$E_5 = M \times M$.



Obr. 2.101:

Všimněte si jednotlivých uzlových grafů relací E_1, ..., E_5 na obrázku 2.101, které jsou ekvivalencemi na množině M. Je z nich zřejmé, že mimo relaci E_5 se nejedná o grafy souvislých relací. Na uzlových grafech těchto relací je také vidět, že všechny prvky množiny M jsou určitým způsobem "rozděleny" do skupin. Tento poznatek nás motivuje k následující definici:

Definice 2.14: Nechť M je neprázdná množina. Systém $T = \{A_1, A_2, A_3, ..., A_n\}$ podmnožin množiny M nazveme **rozklad množiny** M právě tehdy, když platí:

1) $A_i \neq \emptyset$ pro každé $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$,
2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n = M$,
3) $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, kde $i \neq j$.

Prvky systému T se nazývají **třídy rozkladu** množiny M.

Poznámka 2.20 a) Třídy A_1, A_2, A_3,..., A_n rozkladu T z definice 2.14 jsou navzájem disjunktní podmnožiny množiny M.

b) Všechny tři podmínky definice 2.14 lze slovně formulovat takto: Rozklad množiny M je systém **neprázdných** podmnožin množiny M s vlastností, že **každý** prvek množiny M patří **právě do jedné** z těchto podmnožin. Zvýrazněná slova vyjadřují tři podmínky definice 2.14.

Příklad 2.19 Je dána množina $M = \{a, b, c, d\}$. Následující systémy jsou příklady rozkladů množiny M.

$T_1 = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$,
$T_2 = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$,
$T_3 = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$,
$T_4 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$,
$T_5 = \{\{a, b, c, d\}\}$.

Poznámka 2.21 Vrátíme-li se k uzlovým grafům relací ekvivalence $E_1, \ldots, E_5$ z příkladu 2.18, vidíme, že skupiny (v odborné terminologii podgrafy), na které jsou uzlové grafy jednotlivých relací $E_1, \ldots, E_5$ "rozděleny", odpovídají po řadě rozkladům $T_1, \ldots, T_5$ množiny M z příkladu 2.19. Tato skutečnost nás motivuje k následující větě:

Věta 2.3 Každá relace ekvivalence E definovaná na neprázdné množině M vytváří rozklad množiny M.

Důkaz: Na množině M je definována relace ekvivalence E. Každému prvku a množiny M přiřaďme podmnožinu $A_a = \{x \in M; [a, x] \in E\}$. Protože relace E je relace ekvivalence na množině M, je reflexivní a tedy pro každé $a \in M$ platí $[a, a] \in E$. To znamená, že $a \in A_a$ pro každé $a \in M$ a všechny množiny A_a jsou tedy neprázdné. Odtud je zřejmé, že sjednocení všech množin A_a je pro každé $a \in M$ rovno množině M.
Zbývá dokázat, že žádný prvek $x \in M$ nemůže být prvkem současně dvou podmnožin A_a, A_b, kde $A_a \neq A_b$. Předpokládejme, že platí $x \in A_a$ a současně $x \in A_b$.
1. Z předpokladu dostáváme $[a, x] \in E$ a $[b, x] \in E$. Uvažujeme-li libovolný prvek $y \in A_a$, pak platí $[a, y] \in E$. Protože relace E je symetrická, z předpokladu $[a, x] \in E$ vyplývá $[x, a] \in E$. Relace E je také tranzitivní, odtud z platnosti $[x, a] \in E$, $[a, y] \in E$ plyne $[x, y] \in E$. Protože platí $[b, x] \in E$ a zároveň $[x, y] \in E$, dostáváme, že $[b, y] \in E$. To ale znamená, že $y \in A_b$. Dokázali jsme tak množinovou inkluzi $A_a \subset A_b$.
2. Množinovou inkluzi $A_b \subset A_a$ dokážeme analogicky.
Spojením 1. a 2. kroku důkazu jsme dokázali množinovou rovnost $A_a = A_b$. Dospěli jsme tak k následujícímu závěru: Jestliže $a \neq b$, potom buď $A_a = A_b$, nebo $A_a \cap A_b = \emptyset$. Všechny navzájem různé podmnožiny A_a množiny M, kde $a \in A_a$ definované $A_a = \{x \in M; [a, x] \in E\}$ tvoří rozklad T množiny M. Tento rozklad symbolicky zapíšeme $T = \{A_a; a \in M\}$.

Definice 2.15: Rozklad T množiny M z věty 2.3 se nazývá **rozklad množiny** M **generovaný ekvivalencí** E. Někdy užíváme též název rozklad T indukovaný ekvivalencí E nebo též rozklad T příslušný ekvivalenci E.

Poznámka 2.22 Tvrzení věty 2.3 říká, že každá relace ekvivalence E na množině M jednoznačně generuje rozklad T množiny M. V následující větě si ukážeme, že toto tvrzení platí i naopak.

Věta 2.4 Každý rozklad T množiny M jednoznačně generuje relaci ekvivalence E na množině M.

Důkaz: Dokážeme, že binární relace E je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
Nechť $x \in M$. Protože T je rozklad množiny M, existuje třída rozkladu T obsahující prvek x, označme ji X. Zřejmě platí $[x, x] \in E$ pro každé $x \in M$, tedy relace E je reflexivní.
Dokážeme, že relace E je symetrická. Nechť $x, y \in M$ a $[x, y] \in E$. Potom existuje množina $X \in T$ taková, že $x \in X$ a zároveň $y \in X$. Tuto vlastnost lze ekvivalentně zformulovat způsobem, že existuje množina $X \in T$ taková, že $y \in X$ a zároveň $x \in X$. Odtud $[y, x] \in E$, tedy relace E je symetrická.
Zbývá dokázat tranzitivnost relace E. Nechť $x, y, z \in M$, přičemž $[x, y] \in E$ a zároveň $[y, z] \in E$. Potom existuje množina $X \in T$ taková, že $x \in X$ a zároveň $y \in X$. Protože platí $[y, z] \in E$, platí také $z \in X$. Existuje tedy množina $X \in T$ taková, že $x \in X$ a současně $z \in X$, to znamená, že $[x, z] \in E$. Relace E je tedy tranzitivní.

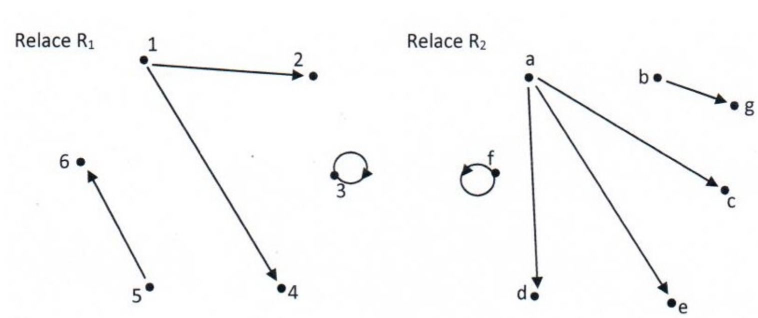
Definice 2.16: Relace ekvivalence E na množině M z věty 2.4 se nazývá **ekvivalence na množině** M **generovaná rozkladem** T množiny M.

Poznámka 2.23 a) Vraťme se k příkladům 2.18 a 2.19. Rozklad T_i množiny M generuje relaci ekvivalence E_i na množině M a naopak relace ekvivalence E_i na množině M generuje rozklad T_i množiny M (pro $i = 1, ..., 5$).

b) Příklady relací ekvivalence, s nimiž se setkáváme ve školské matematice jsou například shodnost trojúhelníků v rovině, shodnost úseček v rovině, rovnost přirozených čísel nebo rovnoběžnost přímek v rovině. V rámci úloh k procvičení jsme s těmito relacemi pracovali v odstavci 2.2.4.

2.3.2 Úlohy k procvičení

1. Doplňte relace R_1 a R_2 zadané uzlovým grafem na obrázku 2.102 co nejmenším počtem šipek, abyste získali relace ekvivalence.



Obr. 2.102:

2. V množině $M = \{x \in \mathbb{Z}; 0 \leq x < 7\}$ je definována relace

$$R = \{[x, y] \in M \times M; \text{čísla } x, y \text{ dávají při dělení čtyřmi stejný zbytek}\}.$$

Určete vlastnosti relace R. V případě, že se jedná o relaci ekvivalence na množině M, určete příslušný rozklad množiny M.

3. Na základě vašich počtářských dovedností určete vlastnosti následujících relací a rozhodněte, které z nich jsou relacemi ekvivalence na zadaných množinách.

a) $R_1 = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 2 \mid (x + y)\}$,
b) $R_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = 3y\}$,
c) $R_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 4\}$,
d) $R_4 = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y > 5\}$,
e) $R_5 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \neq y\}$.

4. Je dána množina $S = \{1, 2, 3, ..., 50\}$. Určete vlastnosti zadaných relací a rozhodněte, zda jsou relacemi ekvivalence na množině S.

a) $R_1 = \{[x, y] \in S \times S : y \mid x\}$,
b) $R_2 = \{[x, y] \in S \times S : x = y\}$.

5. Zapište všechny rozklady tříprvkové množiny $M = \{a, b, c\}$. Dále zapište relace ekvivalence generované jednotlivými rozklady množiny M a znázorněte je graficky.

6. Je dána množina $M = \{a, b, c, d, e, f\}$. Zjistěte, která z množin G, H, I, J je, případně není rozkladem množiny M, je-li dáno:

$G = \{\{a, d\}, \{c, e, f\}, \{b\}\}$, $\quad H = \{\{a, b, c\}, \{d, f\}\}$,
$I = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{a, f\}\}$, $\quad J = M$.

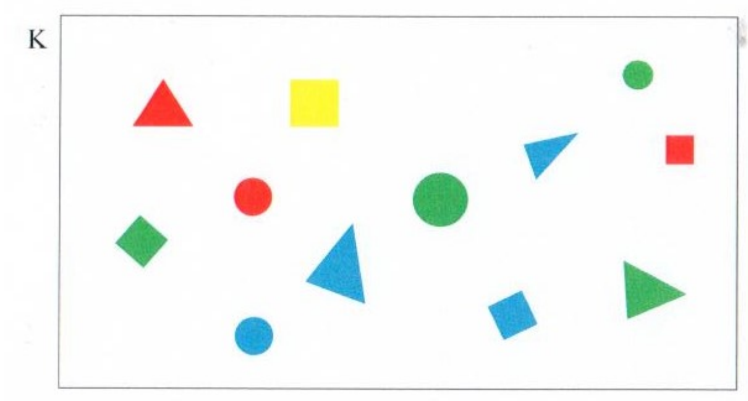
7. Uvažujme Z množinu všech lidí. Které z následujících relací jsou relacemi ekvivalence na množině Z?

a) $S_1 = \{[x, y] \in Z \times Z : x \text{ je matkou } y\}$,
b) $S_2 = \{[x, y] \in Z \times Z : x \text{ má stejnou národnost jako } y\}$,
c) $S_3 = \{[x, y] \in Z \times Z : x \text{ má stejné zaměstnání jako } y\}$,
d) $S_4 = \{[x, y] \in Z \times Z : x \text{ hodí dál míčem než } y\}$,
e) $S_5 = \{[x, y] \in Z \times Z : x \text{ váží víc než } y\}$.

8. Zjistěte, které z uvedených množin jsou rozklady množiny všech přirozených čísel $\mathbb{N}$:

a) $T_1 = \{\mathbb{L}, \mathbb{S}\}$, kde $\mathbb{S}$ je množina všech sudých přirozených čísel a $\mathbb{L}$ je množina všech lichých přirozených čísel,
b) $T_2 = \{A, B, C\}$, kde $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ je násobkem čísla } 2\}$, $C = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ je násobkem čísla } 3\}$,
c) $T_3 = \{A, B, C\}$, kde $A = \{1\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ je prvočíslo}\}$, $C = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ je číslo složené}\}$.

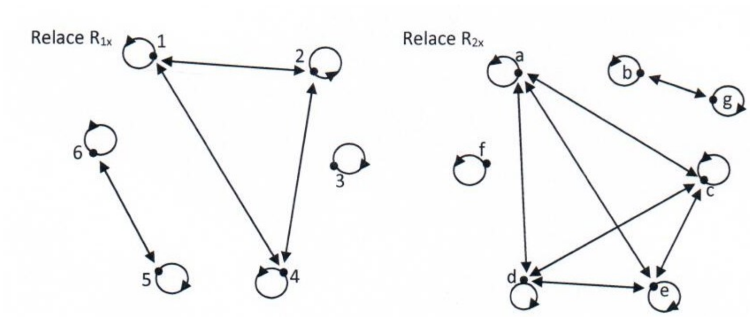
9. Na množině K rovinných geometrických útvarů z obrázku 2.103 definujte různé relace ekvivalence, které generují rozklad množiny K, a u každého případu uveďte jednotlivé třídy rozkladu.



Obr. 2.103:

Výsledky:

1. Uzlové grafy relací R_{1x}, resp. R_{2x} vzniklých z relací R_1, resp. R_2 jsou na obrázku 2.104.



Obr. 2.104:

2. $R = \{[0,0], [1,1], [2,2], [3,3], [4,4], [5,5], [6,6], [4,0][0,4], [5,1], [1,5], [2,6], [6,2]\}$, relace R má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$. Jedná se o relaci ekvivalence na množině M, která generuje rozklad $T = \{\{0,4\}, \{1,5\}, \{2,6\}, \{3\}\}$.

3. Relace
a) R_1 má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
b) R_2 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
c) R_3 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
d) R_4 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
e) R_5 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$.
Ze zadaných relací je pouze relace R_1 relací ekvivalence na množině $\mathbb{N}$.

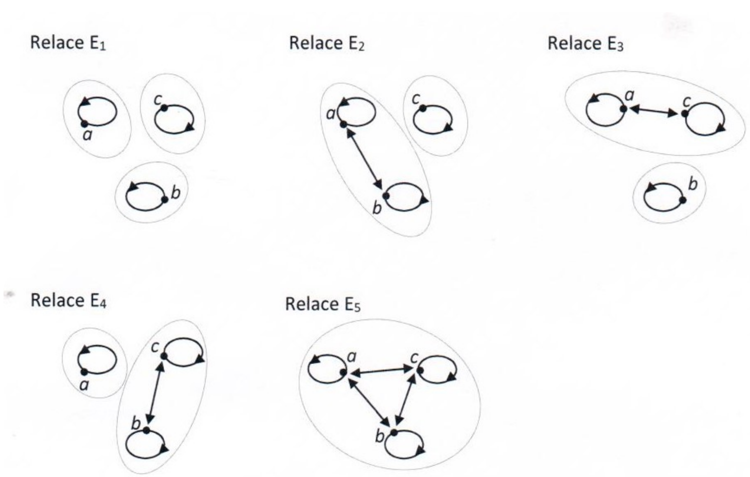
4. Relace
a) R_1 má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$,
b) R_2 má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$.
Ze zadaných relací je pouze relace R_2 relací ekvivalence na množině S.

5. Všechny rozklady množiny M a k nim příslušné ekvivalence na M jsou:

$$T_1 = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}, \quad T_2 = \{\{a,b\},\{c\}\}, \quad T_3 = \{\{a,c\},\{b\}\},$$
$$T_4 = \{\{a\},\{b,c\}\}, \quad T_5 = \{\{a,b,c\}\}.$$

Rozklad
T_1 generuje relaci ekvivalence $E_1 = \{[a,a],[b,b],[c,c]\}$,
T_2 generuje relaci ekvivalence $E_2 = \{[a,a],[b,b],[c,c],[a,b],[b,a]\}$,
T_3 generuje relaci ekvivalence $E_3 = \{[a,a],[b,b],[c,c],[a,c],[c,a]\}$,
T_4 generuje relaci ekvivalence $E_4 = \{[a,a],[b,b],[c,c],[b,c],[c,b]\}$,
T_5 generuje relaci ekvivalence $E_5 = \{[a,a],[b,b],[c,c],[a,c],[c,a],$
$[a,b],[b,a],[b,c],[c,b]\}$.

Uzlové grafy relací E_1, …, E_5 jsou na obrázku 2.105.



Obr. 2.105:

6. Pouze množina G je rozkladem množiny M. Množiny H, I, J nejsou rozkladem množiny M. Poznamenejme, že dle zápisu $J = M$ množina J netvoří rozklad množiny M, ale při zápisu $M = \{J\}$ by se o rozklad množiny M jednalo.

7. Pouze relace S_2 a S_3 jsou relacemi ekvivalence na množině Z.

8. Pouze systémy T_1 a T_3 jsou rozklady množiny všech přirozených čísel $\mathbb{N}$.

9. Prvky množiny K můžeme roztřídit například:

a) **podle barvy**: relace, která generuje rozklad množiny K podle barvy je $R_1 = \{[x,y] \in K \times K; x \text{ má stejnou barvu jako } y\}$. Rozklad množiny K obsahuje čtyři třídy A_1, A_2 A_3 a A_4, kde množina

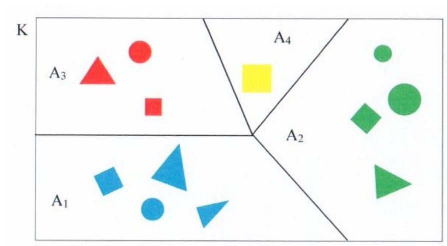
A_1 obsahuje všechny geometrické útvary množiny K modré barvy,
A_2 obsahuje všechny geometrické útvary množiny K zelené barvy,
A_3 obsahuje všechny geometrické útvary množiny K červené barvy,
A_4 obsahuje všechny geometrické útvary množiny K žluté barvy.

Obrázek 2.106 zachycuje grafické znázornění rozkladu množiny K generovaného relací ekvivalence R_1 (třídění útvarů množiny K podle barvy).

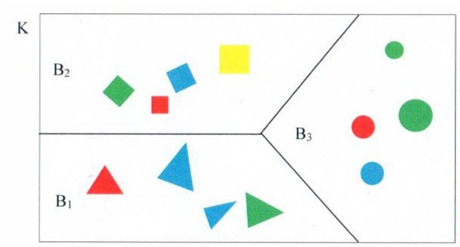
b) **podle tvaru**: relace, která generuje rozklad množiny K podle tvaru je $R_2 = \{[x, y] \in K \times K; x \text{ má stejný tvar jako } y\}$. Rozklad množiny K obsahuje tři třídy B_1, B_2 a B_3, kde množina

B_1 obsahuje všechny trojúhelníky množiny K,
B_2 obsahuje všechny čtverce množiny K,
B_3 obsahuje všechny kruhy množiny K.

Obrázek 2.107 zachycuje grafické znázornění rozkladu množiny K generovaného relací ekvivalence R_2 (třídění útvarů množiny K podle tvaru).



Obr. 2.106:



Obr. 2.107:

2.3.3 Relace uspořádání a uspořádané množiny

Definice 2.17: Binární relaci R definovanou v množině M nazýváme **relací uspořádání** právě tehdy, když R je antisymetrická a tranzitivní.
Je-li navíc relace R souvislá, nazývá se **lineární uspořádání**.
Je-li relace R reflexivní, resp. antireflexivní nazývá se toto uspořádání **neostré**, resp. **ostré**.

Poznámka 2.24 Z definice 2.17 plyne, že kombinací "přívlastků" lineární, ostré a neostré lze definovat celkem šest typů uspořádání v množině M. Přehledně je nyní uvedeme s využitím zavedených zkratek pro jednotlivé vlastnosti relací:

1. Ostré uspořádání v M, které není lineární, má vlastnosti: $\mathcal{AR} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$;

2. Neostré uspořádání v M, které není lineární, má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$;

3. Uspořádání v M, které není lineární, není ostré ani neostré, má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$;

4. Ostré lineární uspořádání v M má vlastnosti: $\mathcal{AR} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$;

5. Neostré lineární uspořádání v M má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$;
6. Lineární uspořádání v M, které není ostré ani neostré, má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$;

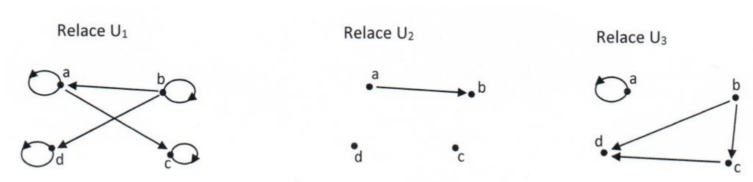
Uspořádání, které není lineární, se též nazývá **částečné uspořádání**.

Příklad 2.20 Je dána množina $M = \{a, b, c, d\}$. Zakreslete uzlové grafy následujících relací uspořádání v množině M a určete přesně jejich typ viz 2.24.

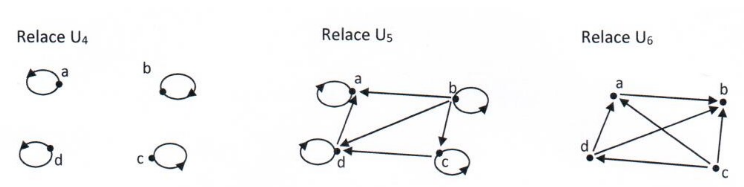
a) $U_1 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [a, c], [b, d]\}$,
b) $U_2 = \{[a, b]\}$,
c) $U_3 = \{[a, a], [b, c], [b, d], [c, d]\}$,
d) $U_4 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d]\}$,
e) $U_5 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [b, c], [c, d], [b, d], [b, a], [c, a], [d, a]\}$,
f) $U_6 = \{[c, d], [c, a], [c, b], [d, a], [d, b], [a, b]\}$.

Řešení:
a) U_1 je neostré uspořádání, které není lineární,
b) U_2 je ostré uspořádání, které není lineární,
c) U_3 je uspořádání, které není lineární, není ostré ani neostré,
d) U_4 je neostré uspořádání, které není lineární. Toto uspořádání na množině M je jediné, které je současně ekvivalencí na množině M.
e) U_5 je neostré lineární uspořádání,
f) U_6 je ostré lineární uspořádání.

Grafy relací uspořádání $U_1, ..., U_6$ jsou na obrázcích 2.108 a 2.109.



Obr. 2.108:



Obr. 2.109:

Poznámka 2.25 Uvažujme neprázdnou množinu M a relaci uspořádání U v množině M. Je-li $[x, y] \in U$, kde $x \neq y$, říkáme, že **prvek** x **předchází před prvkem** y vzhledem k uspořádání U v M a zapíšeme $x <_U y$.

Poznámka 2.26 Ze školské matematiky známe symboly $<, \leq, >, \geq$. Čteme je po řadě takto: "menší než", "menší nebo rovno než", "větší než", "větší nebo rovno než". Jedná se o symboly používané při zapisování nerovností reálných, racionálních, celých nebo přirozených čísel. Symboly $<$ a $>$, resp. $\leq, \geq$ označují **ostré**, resp. **neostré nerovnosti**.

Příklad 2.21 Určete vlastnosti následujících relací:

a) $R_1 = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x < y\}$,
b) $R_2 = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq y\}$,
c) $R_3 = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x > y\}$,
d) $R_4 = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \geq y\}$.

Řešení: Relace
a) R_1 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$,
b) R_2 má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$,
c) R_3 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$,
d) R_4 má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$.

Poznámka 2.27

a) Relace R_1 a R_3 z příkladu 2.21 označované ve školské matematice symboly $<$ a $>$ jsou relacemi ostrého lineárního uspořádání na množině $\mathbb{N}$. Relace R_2 a R_4 označované symboly $\leq$ a $\geq$ jsou relacemi neostrého lineárního uspořádání na množině $\mathbb{N}$.

b) Ostré lineární uspořádání $<$ v číselných množinách se často nazývá **přirozené uspořádání číselné množiny**. Speciálně relace R_1 na množině $\mathbb{N}$ z příkladu 2.21 je tzv. **přirozené uspořádání množiny přirozených čísel**.

Definice 2.18: Nechť M je neprázdná množina a U je relace uspořádání v množině M. Uspořádánaná dvojice (M, U) se nazývá **uspořádaná množina**, kterou označujeme $[M]$, tedy $[M] = (M, U)$. Množina M se nazývá **pole uspořádané množiny**.

Názvy uspořádaných množin z definice 2.18 lze specifikovat podle uvedených šesti typů uspořádání, viz poznámka 2.24. Pokud je například uspořádání U v množině M ostré i lineární, hovoříme o ostře lineárně uspořádané množině $[M] = (M, U)$ apod.

Poznámka 2.28 Nyní se dohodneme na jednodušším zápisu uspořádané množiny. Nechť $[K] = (K, U)$ je ostře lineárně uspořádaná množina, jejíž pole je $K = \{a, b, c, d\}$ a uspořádání $U = \{[c, d], [c, a], [c, b], [d, a], [d, b], [a, b]\}$. Zápis $[K] = (\{a, b, c, d\}, \{[c, d], [c, a], [c, b], [d, a], [d, b], [a, b]\})$ neposkytuje přehlednou informaci o uspořádání prvků. Využijeme poznámky 2.25, kde jsme zavedli místo zápisu $[x, y] \in U$ označení $x <_U y$, které čteme "prvek x předchází před prvkem y". Uspořádanou množinu $[K] = (K, U)$ zapíšeme výčtem prvků takto: $[K] = [\{c, d, a, b\}]$. V dalších úvahách se ukáže výhoda tohoto zkráceného zápisu, neboť je z něj ihned zřejmé pořadí prvků v uspořádané množině. Je důležité si uvědomit, že

- K je množina, nezáleží v ní na pořadí prvků, ve kterém jsou zapsány,
- $[K]$ je uspořádaná množina, v níž každý její prvek má jednoznačně určené pořadí, které je dáno uspořádáním v množině K,
- $[K] \neq K$.

Například $[K] = [\{c, d, a, b\}]$ a $[L] = [\{a, b, d, c\}]$ jsou dvě různé uspořádané množiny, tj. $[K] \neq [L]$. Obě mají stejné pole, kterým je množina $\{a, c, b, d\}$, ale různá uspořádání:

$[K] = (\{a, b, c, d\}, \{[c, d], [c, a], [c, b], [d, a], [d, b], [a, b]\})$,
$[L] = (\{a, b, c, d\}, \{[a, c], [a, b], [a, d], [c, b], [c, d], [b, d]\})$.

Poznámka 2.29 a) Ze školské matematiky známe uspořádané číselné množiny s přirozeným uspořádáním $<$, které v kontextu s definicí 2.18 zapisujeme

$$[\mathbb{N}] = (\mathbb{N}, <), \quad [\mathbb{Z}] = (\mathbb{Z}, <), \quad [\mathbb{Q}] = (\mathbb{Q}, <), \quad [\mathbb{R}] = (\mathbb{R}, <).$$

Pole těchto uspořádaných číselných množin jsou po řadě množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

b) Ze školské matematiky rovněž známe uspořádané množiny

- $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{N}, >)$, $(\mathbb{N}, \geq)$,

jejichž polem je množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$. Porovnáme-li relace uspořádání $R_1,\ldots,R_4$ z příkladu 2.21, vidíme, že korespondují po řadě s relacemi uspořádání $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ v právě popsaných uspořádaných množinách s polem $\mathbb{N}$.

- $(\mathbb{N}, |)$,

kde polem je opět množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ a symbol $|$ značí relaci dělitelnosti.

Definice 2.19: Nechť (M_1, U_1), (M_2, U_2) jsou ostře lineárně uspořádané množiny. Pak řekneme, že ostře lineárně uspořádaná množina (M_1, U_1) je podmnožinou ostře lineárně uspořádané množiny (M_2, U_2) právě když platí:

$$M_1 \subset M_2 \;\wedge\; U_1 = U_2 \cap (M_1 \times M_1).$$

V matematické terminologii říkáme, že uspořádání U_1 je **zúžení** (restrikce) uspořádání U_2 na množinu M_1.

Poznámka 2.30 Z definice 2.19 vidíme, že relaci inkluze pro uspořádané množiny nelze definovat jen ve smyslu první kapitoly, že každý prvek množiny M_1 je prvkem množiny M_2, ale je potřeba provést i zúžení relace uspořádání z množiny M_2 na množinu M_1. Uvažujme například následující lineárně uspořádané množiny: (K, U), (L, V), (M, T), kde

$K = \{a, b, c, d\}$, $U = \{[c, d], [c, a], [c, b], [d, a], [d, b], [a, b]\}$,

$L = \{a, b\}$, $V = \{[b, a]\}$,

$M = \{a, b\}$, $T = \{[a, b]\}$,

Uspořádaná množina (L, V) není podmnožinou uspořádané množiny (K, U), přestože platí $L \subset K$. Je zřejmé, že v uspořádané množině (K, U) platí $a <_U b$, zatímco v uspořádané množině (L, V) platí $b <_V a$ (tj. prvek a předchází před prvkem b v uspořádání U v množině K, zatímco prvek b předchází před prvkem a v uspořádání V v množině L).
Naopak (M, T) je podmnožinou (K, U), neboť $M \subset K$ a současně v obou uspořádaných množinách (K, U), (M, T) platí, že $a <_U b$ a zároveň $a <_T b$ (tj. prvek a předchází před prvkem b v uspořádání U v množině K a současně prvek a předchází před prvkem b i v uspořádání T v množině M).

Definice 2.20: Nechť $[K] = (K, U)$ je ostře lineárně uspořádaná množina. Prvek $a \in [K]$ se nazývá **první prvek** množiny $[K]$, jestliže platí:

$$(\forall x \in [K])[x \neq a \Rightarrow a <_U x].$$

Slovy tedy můžeme říci, že první prvek a ostře lineárně uspořádané množiny předchází před všemi ostatními prvky této množiny.

Definice 2.21: Nechť $[K] = (K, U)$ je ostře lineárně uspořádaná množina. Prvek $b \in [K]$ se nazývá **poslední prvek** množiny $[K]$, jestliže platí:

$$(\forall x \in [K])[x \neq b \Rightarrow x <_U b].$$

Slovy tedy můžeme říci, že poslední prvek b ostře lineárně uspořádané množiny má tu vlastnost, že všechny ostatní prvky této množiny předchází před prvkem b.

Poznámka 2.31 a) Vidíme, že označení první a poslední prvek má stejný význam, jaký známe z běžného života. Představíme-li si konečnou ostře lineárně uspořádanou množinu jako frontu osob např. v supermarketu u pokladny, pak první je ten, který stojí před všemi ostatními, zatímco poslední je ten, před kterým stojí všichni ostatní.

b) Vrátíme-li se k uspořádané množině $[K] = [\{c, d, a, b\}]$ z poznámky 2.28, je z jejího zápisu zřejmé, že prvek c je prvním prvkem uspořádané množiny $[K]$ (c předchází před všemi ostatními prvky množiny $[K]$ v uspořádání U) a prvek b je posledním prvkem množiny $[K]$ (všechny ostatní prvky množiny $[K]$ předchází před prvkem b v uspořádání U).

Příklad 2.22 V množině $A = \{a, b, c\}$ jsou dány relace:

a) $R_1 = \{[c, a], [a, b], [c, b]\}$,
b) $R_2 = \{[b, c], [b, a], [c, a]\}$.

Vyšetřete vlastnosti daných relací. V případě, že se jedná o ostré lineární uspořádání, zapište množinu $[A]$ vzhledem k danému uspořádání a určete první a poslední prvek množiny $[A]$.

Řešení: Relace

a) R_1 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$. R_1 je ostré lineární uspořádání. Prvním prvkem množiny $[A]$ je c, posledním prvkem množiny $[A]$ je b, lineárně upořádaná množina dle uspořádání R_1 je zapsaná jako $[A] = (A, R_1) = [\{c, a, b\}]$.

b) R_2 má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$. R_2 je ostré lineární uspořádání. Prvním prvkem množiny $[A]$ je b, posledním prvkem množiny $[A]$ je a, lineárně upořádaná množina dle uspořádání R_2 je zapsaná jako $[A] = (A, R_2) = [\{b, c, a\}]$.

Definice 2.22: Nechť $[M]$ je ostře lineárně uspořádaná množina. Pak řekneme, že množina $[M]$ je **dobře uspořádaná** a uspořádání na této množině nazveme **dobré uspořádání**, jestliže každá neprázdná podmnožina množiny $[M]$ má první prvek.

Vztah inkluze z definice 2.22 chápeme ve smyslu definice 2.19 jako inkluzei mezi uspořádanými množinami. Jako příklad dobře uspořádané množiny lze uvést množinu $[\mathbb{N}] = (\mathbb{N}, <)$ všech přirozených čísel s relací přirozeného uspořádání čísel podle velikosti (vzestupně). Jako příklad množiny, která není dobře uspořádaná, lze uvést množinu $[\mathbb{Z}] = (\mathbb{Z}, <)$ všech celých čísel, uspořádanou opět relací přirozeného uspořádání.

Příklad 2.23 Sledujte různá uspořádání množiny všech přirozených čísel $\mathbb{N}$. Rozhodněte, ve kterých případech je množina přirozených čísel dobře uspořádaná.

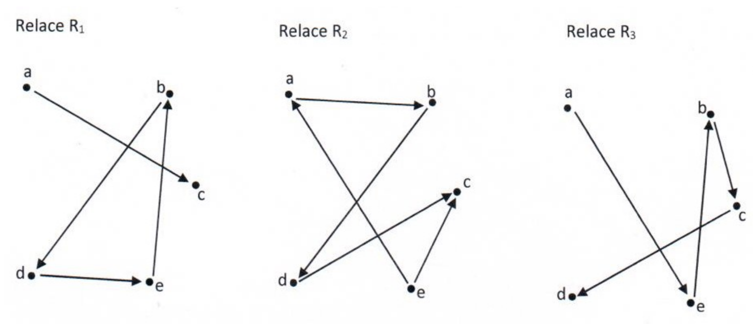
$[\mathbb{N}]_1 = [\{1, 2, 3, ...\}]$, $[\mathbb{N}]_2 = [\{..., 3, 2, 1\}]$, $[\mathbb{N}]_3 = [\{1, 3, 5, ..., 2, 4, 6, ...\}]$,
$[\mathbb{N}]_4 = [\{..., 6, 4, 2, 1, 3, 5, ...\}]$, $[\mathbb{N}]_5 = [\{2, 3, 4, ..., 1\}]$.

Řešení:
Množinu $\mathbb{N}$ lze uspořádat mnoha způsoby, přičemž výše uvedené množiny $[\mathbb{N}]_1, \ldots, [\mathbb{N}]_5$ jsou navzájem různé, přestože obsahují tytéž prvky. Každé dvě množiny se liší uspořádáním.
Množiny $[\mathbb{N}]_2$ a $[\mathbb{N}]_4$ nejsou dobře uspořádané, neboť nemají první prvek. Dobře uspořádané množiny jsou $[\mathbb{N}]_1$, $[\mathbb{N}]_3$ a $[\mathbb{N}]_5$.

2.3.4 Úlohy k procvičení

1. Doplňte uzlové grafy relací R_1, R_2, R_3 na obrázku 2.110 tak, aby představovaly relace ostrého lineárního uspořádání v množině $M = \{a, b, c, d, e\}$.

2. V množině $M = \{a, b, c, d\}$ je dána relace $R = \{[b, c], [c, d], [b, a], [b, d], [d, a], [c, a]\}$. Ověřte, že relace R je ostrým lineárním uspořádáním v množině M. Zapište lineárně uspořádanou množinu $[M]$.



Obr. 2.110:

3. V množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$ je dána relace $R = \{[1, 3], [4, 2], [4, 1], [3, 2]\}$. Doplňte relaci R dalšími uspořádanými dvojicemi tak, abyste získali relaci ostrého lineární uspořádání R_1. Zakreslete uzlový graf relace R_1 a zapište lineárně uspořádanou množinu $[A]$.

4. Určete první a poslední prvek lineárně uspořádané množiny $[B] = (B, <)$, kde $B = \{\frac{29}{16}, \frac{31}{18}, \frac{17}{9}, \frac{11}{6}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, \frac{7}{4}\}$.

5. Uveďte příklady lineárně uspořádaných množin (M, R), pro které platí:

a) (M, R) má první a poslední prvek,
b) (M, R) má první a nemá poslední prvek,
c) (M, R) nemá první a má poslední prvek,
d) (M, R) nemá první ani poslední prvek.

6. Zapište všechny lineárně ostře uspořádané množiny, jejichž pole je množina $M = \{a, b, c\}$.

7. Zdena má tmavší vlasy než Nela, Karla má světlejší vlasy než Adéla a tmavší než Zdena. Která z dívek má nejsvětlejší a která nejtmavší vlasy? Seřaďte dívky od nejsvětlejší po nejtmavší.

8. V množině $M = \{a, b, c, d\}$ definujte výčtem prvků vždy alespoň dvě binární relace, které jsou relacemi

a) ekvivalence,
b) uspořádání, která nejsou lineární,
c) uspořádání, která nejsou lineární a jsou ostrá,
d) uspořádání, která jsou též ekvivalence,
e) uspořádání, která nejsou lineární a jsou neostrá,
f) lineární uspořádání, které není ostré ani neostré.

9. Je dána množina A šesti dětí. Jména a další údaje o těchto dětech (místo bydliště, datum narození, výška, váha, domácí mazlíček) jsou uvedeny v tabulce níže. Vytvořte alespoň jednu relaci v množině A, která je relací

a) ekvivalence na množině A,

b) ostrého lineárního uspořádání na množině A a určete první prvek takto uspořádané množiny $[A]$.

Jméno	Místo bydliště	Datum narození	Výška	Váha	Domácí mazlíček
Kamil	Brno	5.6.2010	138 cm	26 kg	kočka
Mirka	Ostrava	3.4.2011	129 cm	24 kg	pes
Tomáš	Olomouc	12.7.2010	140 cm	30 kg	papoušek
Lenka	Plzeň	30.11.2011	133 cm	29 kg	kočka
Jarka	Brno	6.4.2010	142 cm	33 kg	kočka
Pavel	Olomouc	21.6.2010	136 cm	25 kg	pes

V případě a) doplňte i rozklad množiny A generovaný relací ekvivalence, v případě b) nakreslete uzlový graf uspořádání.

10. Uspořádejte množinu $A = \{x \in \mathbb{N}; x \leq 6\}$ tak, aby sudé číslo předcházelo před lichým a menší sudé před větším sudým číslem. Kolika způsoby lze množinu A uspořádat?

11. V množině $M = \{1, 2, 3\}$ jsou dány následující relace:

a) $R_1 = \{[x, y] \in M \times M; x \neq y \Rightarrow x = y\}$,
b) $R_2 = \{[x, y] \in M \times M; x \neq y \Rightarrow x + y = 3\}$,
c) $R_3 = \{[x, y] \in M \times M; x < 3 \Rightarrow x + y = 3\}$,
d) $R_4 = \{[x, y] \in M \times M; x < y \Leftrightarrow x = y\}$.

V případě, že se jedná o relaci ekvivalence na množině M, zapište příslušný rozklad množiny M; v případě, že se jedná o uspořádání, rozhodněte přesně o jeho typu.

12. Pavla je starší než Karla a mladší než Martina. Jana je starší než Pavla a mladší než Martina. Martina je mladší než Olga. Seřaďte dívky od nejmladší po nejstarší.

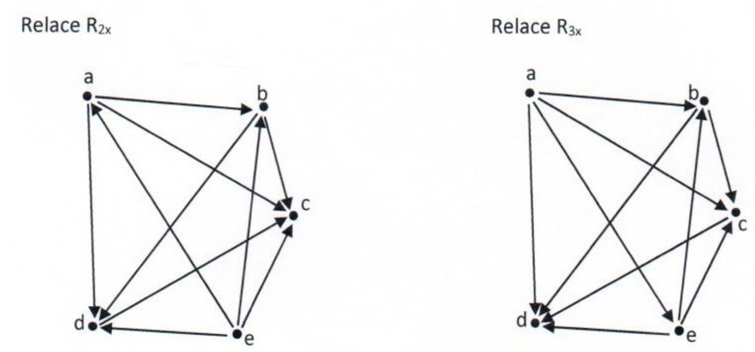
Výsledky:

1. Relaci R_1 nelze doplnit tak, abychom získali relaci ostrého lineárního uspořádání, neboť doplníme-li relaci R_1 uspořádanou dvojicí $[b, e]$, aby byla splněna její tranzitivita, porušíme antisymetrii relace R_1, neboť $[e, b] \in R_1$.
Uzlové grafy relací R_{2x}, resp. R_{3x} vytvořených z relací R_2, resp. R_3 jsou na obrázku 2.111.

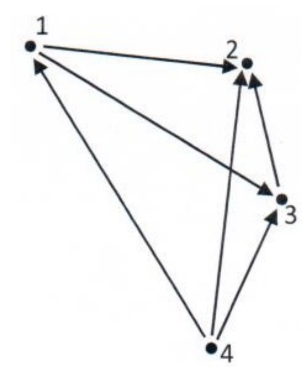
2. Relace R má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$. Relace R je ostrým lineárním uspořádáním v množině M, $[M] = [\{b, c, d, a\}]$.

3. $R_1 = \{[1, 3], [4, 2], [4, 1], [3, 2], [1, 2], [4, 3]\}$, $[A] = [\{4, 1, 3, 2\}]$, uzlový graf relace R_1 je na obrázku 2.112.

4. První prvek je $\frac{5}{3}$, poslední prvek je $\frac{17}{9}$.



Obr. 2.111:



Obr. 2.112:

6. $[M]_1 = [\{a, b, c\}]$, $[M]_2 = [\{a, c, b\}]$, $[M]_3 = [\{b, a, c\}]$, $[M]_4 = [\{b, c, a\}]$, $[M]_5 = [\{c, a, b\}]$, $[M]_6 = [\{c, b, a\}]$.

Všech možností ostrého lineárního uspořádání v tříprvkové množině M je 6.

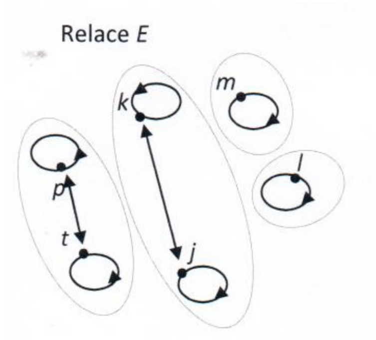
7. Nela, Zdena, Karla, Adéla.

9. Pro zjednodušení zapíšeme prvky množiny A pomocí malých počátečních písmen podle jmen jednotlivých dětí, tj. $A = \{k, m, t, l, j, p\}$.

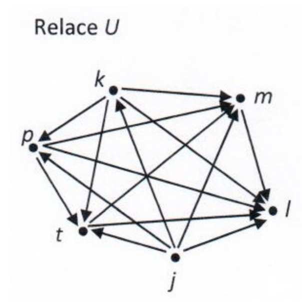
a) Relace ekvivalence E na množině A je například:
$E = \{[x, y] \in A \times A; x \text{ žije ve stejném městě jako } y\} = \{[k, k], [m, m], [t, t], [l, l], [j, j], [p, p], [k, j], [j, k], [t, p], [p, t]\}$.
Relace E generuje rozklad $T = \{\{j, k\}, \{t, p\}, \{l\}, \{m\}\}$. Uzlový graf relace E je na obrázku 2.113.

b) Relace ostrého lineárního uspořádání na množině A je například:
$U = \{[x, y] \in A \times A; x \text{ je starší než } y\} = \{[j, k], [j, m], [j, t], [j, l], [j, p], [k, p], [k, m], [k, t], [k, l], [p, m], [p, t], [p, l], [t, m], [t, l], [m, l]\}$. $[A] = [\{j, k, p, t, m, l\}]$.

První prvek této relace je j (Jarka je nejstarší z dětí), uzlový graf relace U je na obrázku 2.114.



Obr. 2.113:



Obr. 2.114:

10. Množinu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ lze dle zadání uspořádat šesti různými způsoby:

$[A]_1 = [\{2, 4, 6, 1, 3, 5\}]$, $[A]_2 = [\{2, 4, 6, 1, 5, 3\}]$, $[A]_3 = [\{2, 4, 6, 3, 1, 5\}]$,
$[A]_4 = [\{2, 4, 6, 3, 5, 1\}]$, $[A]_5 = [\{2, 4, 6, 5, 1, 3\}]$, $[A]_6 = [\{2, 4, 6, 5, 3, 1\}]$.

11. a) Relace $R_1 = \{[1, 1], [2, 2], [3, 3]\}$ má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$. Relace R_1 je relací ekvivalence a na množině M generuje rozklad $T_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. Relace R_1 je současně relací neostrého uspořádání, které není ostré a není lineární.

b) Relace $R_2 = \{[1, 1], [2, 2], [3, 3], [1, 2], [2, 1]\}$ má vlastnosti: $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \neg\mathcal{SO}$. Relace R_2 je relací ekvivalence a na množině M generuje rozklad $T_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$. Relace R_2 není uspořádání.

c) Relace $R_3 = \{[1, 2], [2, 1], [3, 1], [3, 2], [3, 3]\}$ má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \neg\mathcal{AS} \wedge \neg\mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$. Relace R_3 není relací ekvivalence ani uspořádáním.

d) Relace $R_4 = \{[2, 1], [3, 1], [3, 2]\}$ má vlastnosti: $\neg\mathcal{R} \wedge \mathcal{AR} \wedge \neg\mathcal{S} \wedge \mathcal{AS} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{SO}$. Relace R_4 je relací ostrého lineárního uspořádání, není relací ekvivalence.

12. Karla, Pavla, Jana, Martina, Olga.

2.4 Zobrazení a jeho vlastnosti

Pojem zobrazení je jedním z nejdůležitějších pojmů současné matematiky s aplikacemi v učivu matematiky 1. stupně ZŠ. Zavádí se jako speciální typ binární relace z množiny A do množiny B.

Definice 3.1: Nechť A, B jsou množiny. Binární relace $R \subset A \times B$ z množiny A do množiny B se nazývá **relace zobrazení z množiny** A **do množiny** B (nebo stručně zobrazení), jestliže ke každému prvku $x \in A$ existuje nejvýše jeden prvek $y \in B$ takový, že $[x, y] \in R$.

Poznámka 2.32 Relaci zobrazení z množiny A do množiny B lze chápat jako jistý předpis, který každému prvku z množiny A přiřadí nejvýše jeden prvek z množiny B (tzn. jeden nebo žádný). Dodejme, že v dalším textu budeme relaci zobrazení zpravidla označovat písmenem Z a ve stručnosti hovořit pouze o zobrazení.
Pro zobrazení Z z množiny A do množiny B budeme často používat zápis $Z : A \to B$ a místo zápisu $[x, y] \in Z$ budeme psát $Z(x) = y$. Je-li $[x, y] \in Z$, pak prvek $x \in A$ se nazývá **vzor** prvku $y \in B$ v zobrazení Z a prvek $y \in B$ se nazývá **obraz** prvku $x \in A$ v zobrazení Z.

Definice 3.2: Nechť Z je relace zobrazení z množiny A do množiny B. Pak první obor relace Z, tj. množina

$$O_1(Z) = \{x \in A; \exists y \in B : [x, y] \in Z\},$$

se nazývá **definiční obor zobrazení** Z. Druhý obor relace Z, tj. množina

$$O_2(Z) = \{y \in B; \exists x \in A : [x, y] \in Z\},$$

se nazývá **obor hodnot zobrazení** Z. Je-li $A = B$, hovoříme o **zobrazení v množině** A.

Příklad 2.24 Jsou dány množiny $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{u, v\}$. Nechť R_1, R_2 jsou binární relace z množiny A do množiny B dané výčtem prvků:

a) $R_1 = \{[a, v], [b, v], [c, u]\}$, b) $R_2 = \{[a, u], [b, v], [b, u], [c, v]\}$.

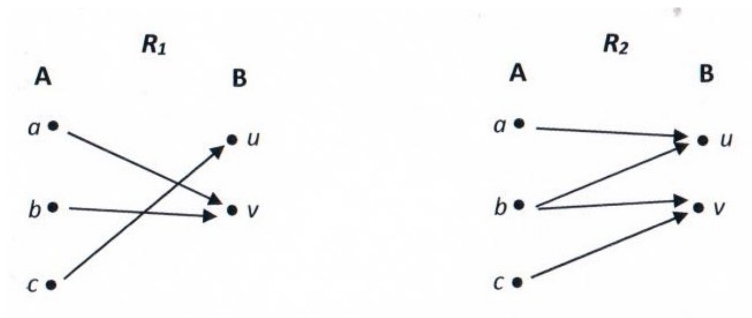
Sestrojte uzlové grafy binárních relací R_1, R_2 a rozhodněte, zda se jedná o zobrazení z množiny A do množiny B.

Řešení:

a) U relace R_1 vidíme, že ke každému prvku množiny A existuje právě jeden prvek množiny B, se kterým je v relaci R_1. To znamená, že binární relace R_1 je zobrazení z množiny A do množiny B.

b) U relace R_2 si povšimněte, že prvek $b \in A$ je v relaci s prvkem $u \in B$ a současně s prvkem $v \in B$ (relace R_2 obsahuje více než jednu uspořádanou dvojici, v níž se první složky rovnají, zatímco druhé složky jsou různé). Proto binární relace R_2 není zobrazení z množiny A do množiny B.

Uzlové grafy zobrazení R_1 a relace R_2 jsou na obrázku 2.115.



Obr. 2.115:

Poznámka 2.33 Je zřejmé, že pro zobrazení Z z množiny A do množiny B je $O_1(Z) \subset A$ a $O_2(Z) \subset B$. Na základě toho budeme rozlišovat čtyři typy zobrazení Z z množiny A do množiny B.

1. Pro $O_1(Z) \neq A$ a $O_2(Z) \neq B$ hovoříme o **zobrazení z množiny A do množiny B**.
2. Pro $O_1(Z) = A$ a $O_2(Z) \neq B$ hovoříme o **zobrazení množiny A do množiny B**.
3. Pro $O_1(Z) \neq A$ a $O_2(Z) = B$ hovoříme o **zobrazení z množiny A na množinu B**.
4. Pro $O_1(Z) = A$ a $O_2(Z) = B$ hovoříme o **zobrazení množiny A na množinu B**.

Graficky lze jednotlivé typy zobrazení 1. - 4. interpretovat na obrázku 2.116

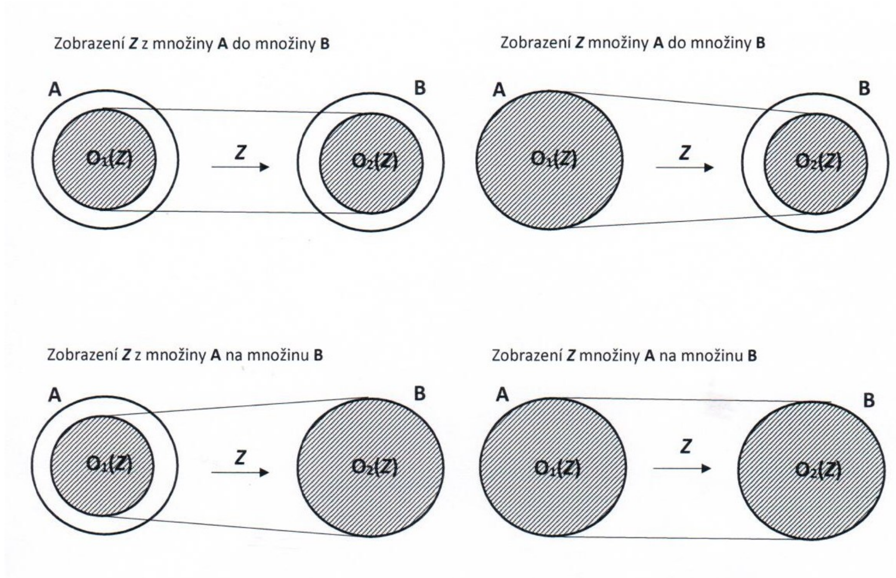
Poznámka 2.34 Název "zobrazení z množiny A do množinuy B" používáme obecně pro označení relace zobrazení z množiny A do množiny B podle definice 3.1; pokud ale rozhodujeme o typu zobrazení, pak předložky "z" a "do" mají význam a určují 1. typ zobrazení uvedený v poznámce 2.33.

Příklad 2.25 Jsou dány množiny $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{u, v\}$. Nechť R_1, R_2, R_3, R_4 jsou binární relace z množiny A do množiny B definované takto:

a) $R_1 = \{[a, v], [b, v], [c, u]\}$,	b) $R_2 = \{[a, u], [b, v]\}$,
c) $R_3 = \{[a, v], [b, v], [c, v]\}$,	d) $R_4 = \{[a, u], [b, u]\}$.

Rozhodněte, zda tyto relace jsou relacemi zobrazení z množiny A do množiny B. Pokud ano, určete typ zobrazení. Znázorněte uzlové grafy relací.

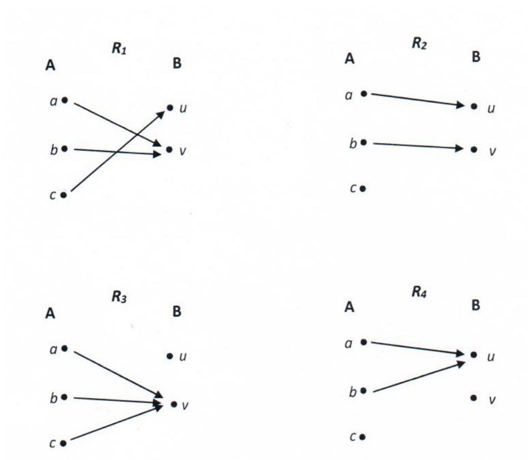
Řešení: Relace



Obr. 2.116:

a) R_1 je zobrazení množiny A na množinu B, neboť $O_1(R_1) = A$ a $O_2(R_1) = B$,
b) R_2 je zobrazení z množiny A na množinu B, neboť $O_1(R_2) \neq A$ a $O_2(R_2) = B$,
c) R_3 je zobrazení množiny A do množiny B, neboť $O_1(R_3) = A$ a $O_2(R_3) \neq B$,
d) R_4 je zobrazení z množiny A do množiny B, neboť $O_1(R_4) \neq A$ a $O_2(R_4) \neq B$.

Uzlové grafy zobrazení R_1, R_2, R_3, R_4 jsou na obrázku 2.117.



Obr. 2.117:

Definice 3.3 Zobrazení Z z množiny A do množiny B se nazývá **prosté zobrazení** právě tehdy, když relace Z^{-1} je zobrazení z množiny B do množiny A.

Poznámka 2.35 Uzlový graf prostého zobrazení Z z množiny A do množiny B je charakteristický tím, že do každého bodu, který znázorňuje prvek $y \in B$, směřuje nejvýše jedna šipka. Můžeme tedy říci, že platí následující věta:

Věta 2.5 Zobrazení Z z množiny A do množiny B je prosté právě tehdy, když pro každé $y \in B$ platí, že je obrazem nejvýše jednoho prvku $x \in A$ v zobrazení Z.

V praxi používáme pro rozlišení prostého zobrazení následující matematickou větu:

Věta 2.6 Zobrazení Z z množiny A do množiny B je prosté právě tehdy, když

$$(\forall x, y \in O_1(Z))[x \neq y \Rightarrow Z(x) \neq Z(y)]. \tag{2.9}$$

Poznámka 2.36 a) Symbolický zápis 2.9 věty 2.6 vyjádříme slovně takto: Každé dva různé vzory mají různé obrazy v zobrazení Z.

b) Zobrazení z množiny A do množiny B dané výčtem prvků není prosté právě tehdy, když obsahuje více než jednu uspořádanou dvojici, jejíž druhé složky se rovnají, zatímco první složky jsou různé.

Definice 3.4 Nechť Z je relace zobrazení z množiny A do množiny B. Nechť Z^{-1} je relace z množiny B do množiny A inverzní k relaci Z (ve smyslu inverzní relace zavedené v Definici 2.5). Je-li relace Z^{-1} zobrazením, pak se nazývá **inverzní zobrazení** k zobrazení Z.

Příklad 2.26 Nechť R_1, R_2, R_3, R_4 jsou zobrazení z příkladu 2.25. Rozhodněte, zda jsou tato zobrazení prostá a určete k nim inverzní relace.

Řešení: Zobrazení R_2 je prosté zobrazení. Zobrazení R_1, R_3, R_4 prostá nejsou (dvěma různým vzorům z množiny A existuje jeden obraz z množiny B). Inverzní relace k zobrazením R_1, R_2, R_3, R_4 jsou následující:

a) $R_1^{-1} = \{[v,a],[v,b],[u,c]\}$, b) $R_2^{-1} = \{[u,a],[v,b]\}$,
c) $R_3^{-1} = \{[v,a],[v,b],[v,c]\}$, d) $R_4^{-1} = \{[u,a],[u,b]\}$.

Relace R_1^{-1}, R_3^{-1}, R_4^{-1} nejsou zobrazení. Relace R_2^{-1} je zobrazení množiny B do množiny A, tzn. R_2^{-1} je inverzní zobrazení k zobrazení R_2.

Definice 3.5 Nechť Z je zobrazení množiny A na množinu B, které je prosté. Pak Z se nazývá **vzájemně jednoznačné zobrazení** množiny A na množinu B.

Poznámka 2.37 V odborné matematické literatuře často místo názvu

a) "prosté zobrazení" používáme název **injektivní zobrazení** nebo též **injekce**,

b) "zobrazení na množinu" používáme název **surjektivní zobrazení** nebo též **surjekce**,

c) "vzájemně jednoznačné zobrazení" množiny A na množinu B používáme název **bijektivní zobrazení** nebo též **bijekce** množiny A na množinu B.

Definice 3.6 Množiny A, B nazýváme **ekvivalentní množiny** právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Symbolicky zapisujeme $A \sim B$.

Příklad 2.27 Jsou dány množiny $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{1, 2, 3\}$. Rozhodněte, které z těchto množin jsou navzájem ekvivalentní.

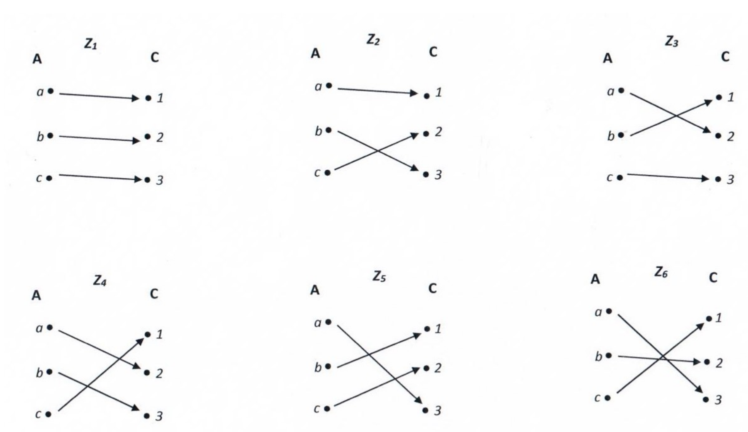
Řešení: Množiny A a C jsou ekvivalentní, neboť existuje prosté zobrazení Z množiny A na množinu C, např. $Z = \{[a, 1], [b, 2], [c, 3]\}$. Platí tedy $A \sim C$.
Množiny A a B nejsou ekvivalentní, neboť neexistuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Taktéž množiny B a C nejsou ekvivalentní, neboť neexistuje prosté zobrazení množiny B na množinu C.

Příklad 2.28 Určete všechna bijektivní zobrazení množiny A na množinu C z příkladu 2.27 a znázorněte je uzlovými grafy.

Řešení: Hledaná bijektivní zobrazení množiny A na množinu C jsou:

$$\begin{array}{lll} Z_1 = \{[a, 1], [b, 2], [c, 3]\}, & Z_2 = \{[a, 1], [b, 3], [c, 2]\}, & Z_3 = \{[a, 2], [b, 1], [c, 3]\}, \\ Z_4 = \{[a, 2], [b, 3], [c, 1]\}, & Z_5 = \{[a, 3], [b, 1], [c, 2]\}, & Z_6 = \{[a, 3], [b, 2], [c, 1]\}. \end{array}$$

Zobrazení Z_1, …, Z_6 jsou znázorněna uzlovými grafy na obrázku 2.118.



Obr. 2.118:

Definice 3.7: Řekneme, že množina A je **nekonečná**, je-li ekvivalentní s nějakou svou vlastní podmnožinou. Řekneme, že množina A je **konečná**, není-li ekvivalentní se žádnou svojí vlastní podmnožinou.

Povšimněme si toho, že definice 3.7 zavádí konečnou a nekonečnou množinu bez použití obratu "počet prvků". Tuto skutečnost oceníme později při konstrukci oboru všech přirozených čísel.

Následující příklad ilustruje skutečnost, že nekonečná množina je ekvivalentní s některou svou vlastní podmnožinou.

Příklad 2.29 Nechť $\mathbb{N}$ je množina všech přirozených čísel a $\mathbb{S}$ je množina všech kladných sudých čísel. Množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{S}$ zapíšeme:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}, \qquad \mathbb{S} = \{2, 4, 6, ...\}.$$

Nechť Z je zobrazení množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{S}$ definované takto:

$$Z = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{S}; y = 2x\}.$$

Pak Z je vzájemně jednoznačné zobrazení celé množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{S}$. Platí tedy $\mathbb{N} \sim \mathbb{S}$ a přitom $\mathbb{S}$ je vlastní podmnožina množiny $\mathbb{N}$ ($\mathbb{S} \subset \mathbb{N} \wedge \mathbb{S} \neq \mathbb{N}$).

Definice 3.8 Permutace P množiny A je libovolné prosté zobrazení množiny A na množinu A.

V následujícím textu budeme pracovat s permutacemi konečných množin.

Příklad 2.30 Je dána množina $A = \{1, 2, 3\}$. Určete všechny permutace množiny A.

Řešení: Nejprve zapíšeme všechny permutace množiny A výčtem prvků:

$$\begin{array}{lll} P_1 = \{[1,2],[2,1],[3,3]\}, & P_2 = \{[1,1],[2,3],[3,2]\}, & P_3 = \{[1,3],[2,2],[3,1]\}, \\ P_4 = \{[1,2],[2,3],[3,1]\}, & P_5 = \{[1,2],[2,1],[3,3]\}, & P_6 = \{[1,3],[2,1],[3,2]\}. \end{array}$$

Vidíme, že existuje celkem 6 permutací tříprvkové množiny A.

Nyní se dohodneme na výhodném a v matematické literatuře běžném zápisu permutací. Např. permutaci $P_1 = \{[1, 2], [2, 1], [3, 3]\}$ budeme zapisovat do dvouřádkové tabulky (tzv. matice) takto:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

V horním řádku matice jsou zapsány všechny prvky množiny A (vzory) v základním pořadí, v dolním řádku matice jsou zapsány jejich obrazy v permutaci P_1.

Všechny permutace $P_1, ..., P_6$ tříprvkové množiny A z příkladu 2.30 zapsané pomocí matic jsou následující:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Povšimněte si, že jednotlivé matice permutací $P_1, ..., P_6$ se od sebe liší pouze pořadím prvků množiny A v dolních řádcích matic.

Poznámka 2.38 Permutaci P_5 z příkladu 2.30 nazýváme **identické zobrazení** množiny A, kde každý prvek množiny A se zobrazí sám na sebe. Identické zobrazení značíme I a symbolicky jej zapíšeme:

$$(\forall x \in A)[I(x) = x].$$

Věta 2.7 Nechť A je konečná množina a má n prvků. Pak existuje $n!$ různých permutací množiny A.[8]

Důkaz: Jednotlivé permutace množiny A zapíšeme maticemi podle poznámky 2.38, ve kterých budou zapsány v prvním řádku vždy všechny prvky množiny A v základním pořadí. Otázkou nyní je, kolika způsoby mohou být zapsány prvky množiny A ve spodním řádku tabulky - prvky se přitom nemohou opakovat a záleží na jejich pořadí. Z kombinatoriky víme, že počet všech permutací množiny o n prvcích je právě $n!$. Proto i počet všech permutací chápaných jako bijekce n prvkové množiny je $n!$. Zajímavé je, že ačkoli se označení permutace vyskytuje v kombinatorice i v kapitolách o zobrazení, vyjadřuje toto označení v obou teoriích totéž.

Věta 2.8 Nechť Z_1 je zobrazení z množiny A do množiny B a nechť Z_2 je zobrazení z množiny B do množiny C. Potom binární relace $Z_1 \circ Z_2$ definovananá vztahem

$$Z_1 \circ Z_2 = \{[x, z] \in A \times C; \exists y \in B : ([x, y] \in Z_1 \wedge [y, z] \in Z_2)\}$$

je zobrazení z množiny A do množiny C.

Důkaz: Nechť Z_1 je zobrazení z A do B a nechť Z_2 je zobrazení z B do C. Protože Z_1 je zobrazení z A do B, existuje k libovolnému prvku $x \in A$ nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $y = Z_1(x)$. Dále Z_2 je zobrazení z B do C, tedy existuje k libovolnému prvku $y \in B$ nejvýše jedno $z \in C$ takové, že $z = Z_2(y)$. Potom tedy v relaci složené $Z_1 \circ Z_2$ existuje k libovolnému prvku $x \in A$ nejvýše jedno $z \in C$ v relaci takové, že $z = (Z_1 \circ Z_2)(x)$. Relace $Z_1 \circ Z_2$ je tedy zobrazení z A do C.

Definice 3.9 Nechť Z_1 je zobrazení z množiny A do množiny B a nechť Z_2 je zobrazení z množiny B do množiny C. Pak zobrazení $Z_1 \circ Z_2$ z množiny A do množiny C uvedené ve větě 2.8 nazýváme **zobrazení složené** ze zobrazení Z_1 a Z_2 (v tomto pořadí).

Poznámka 2.39 Zobrazení Z_1 a Z_2 z definice 3.9 jsou binární relace, operaci skládání zobrazení tedy provádíme analogicky jako u binárních relací v odstavci 2.2.1. Zobrazení $Z_1 \circ Z_2$ je neprázdná množina jen v případě, že $O_2(Z_1) \subset O_1(Z_2)$, tj. obor hodnot zobrazení Z_1 je podmnožinou definičního oboru zobrazení Z_2.

[8] Poznamenejme, že $n!$ čteme "n faktoriál", kde $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Příklad 2.31 Jsou dány množiny $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{u, v\}$. Zobrazení $Z_1 : A \to B$, $Z_2 : B \to C$ jsou dána výčtem prvků:

$$Z_1 = \{[a, z][b, z], [c, y], [d, x]\}, \qquad Z_2 = \{[x, u], [y, u], [z, v]\}.$$

Určete výčtem prvků zobrazení $Z_1 \circ Z_2$ a $Z_2 \circ Z_1$.

Řešení: $Z_1 \circ Z_2 = \{[a, v], [b, v], [c, u], [d, u]\}$, $Z_2 \circ Z_1 = \emptyset$.

Pro skládání zobrazení platí následující tvrzení, která uvedeme bez důkazu:

Věta 2.9 Nechť Z_1, Z_2, Z_3 jsou libovolná zobrazení taková, že všechna uvažovaná složená zobrazení jsou neprázdná. Pak platí:

1. $(Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3 = Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3)$, tj. skládání zobrazení je asociativní.
2. Jsou-li Z_1, Z_2 prostá zobrazení, pak $Z_1 \circ Z_2$ je opět prosté zobrazení.
3. Jsou-li Z_1, Z_2 bijektivní zobrazení, pak $Z_1 \circ Z_2$ je opět bijektivní zobrazení.
4. Jsou-li Z_1, Z_2 permutace množiny M, pak $Z_1 \circ Z_2$ je opět permutace množiny M.

Příklad 2.32 Uvažujme permutace P_1 a P_2 tříprvkové množiny A z příkladu 2.30.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Určete permutace $P_1 \circ P_2$, $P_2 \circ P_1$.

Řešení:

$$P_1 \circ P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_2 \circ P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že $P_1 \circ P_2 = P_6$, zatímco $P_2 \circ P_1 = P_4$, tj. $P_1 \circ P_2 \neq P_2 \circ P_1$.

Poznámka 2.40 Skládání zobrazení není obecně komutativní, tj. neplatí vždy $Z_1 \circ Z_2 = Z_2 \circ Z_1$, což můžeme vidět v řešených příkladech 2.31 a 2.32.

Poznámka 2.41 V příkladu 2.30 jsme zapsali celkem 6 permutací tříprvkové množiny A. Podle věty 2.9 má smysl určit permutace složené pro každou dvojici vybranou z permutací P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6. Všechny permutace složené (po dvou) z permutací P_1,..., P_6 zapíšeme do tabulky níže. S touto tabulkou budeme pracovat později v navazujícím textu.

$\circ$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	P_5	P_6	P_4	P_3	P_1	P_2
P_2	P_4	P_5	P_6	P_1	P_2	P_3
P_3	P_6	P_4	P_5	P_2	P_3	P_1
P_4	P_2	P_3	P_1	P_6	P_4	P_5
P_5	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_6	P_3	P_1	P_2	P_5	P_6	P_4

Poznámka 2.42 a) V některé literatuře je možné se setkat s jiným označením pro zobrazení složené. Uvažujeme-li zobrazení $Z_1 : A \to B$, $Z_2 : B \to C$, pak zobrazení $Z_1 \circ Z_2 : A \to C$ složené ze zobrazení Z_1 a Z_2 (v tomto pořadí) zapíšeme:

$$(Z_1 \circ Z_2)(x) = Z_2(Z_1(x)) \text{ pro každé } x \in A.$$

b) Uvažujeme-li $A = \mathbb{R}$ a $B = \mathbb{R}$, kde $\mathbb{R}$ je množina všech reálných čísel, pak zobrazení v množině $\mathbb{R}$ nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné** x a značíme ji f. Reálnou funkci f reálné proměnné x zapisujeme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nebo symbolicky $f(x) = y$. Definiční obor, resp. obor hodnot reálné funkce f označujeme $D(f)$, resp. $H(f)$. Zobrazení f, g z příkladu 2.33 níže jsou reálné funkce reálné proměnné x.

Příklad 2.33 Nechť $\mathbb{R}$ je množina všech reálných čísel a f, g jsou zobrazení v množině $\mathbb{R}$ daná předpisem:

$$f(x) = -x \text{ pro každé } x \in \mathbb{R},$$

$$g(x) = x + 1 \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Určete složená zobrazení $f \circ g$, $g \circ f$.
Řešení:

$$(f \circ g)(x) = -x + 1 \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

$$(g \circ f)(x) = -(x + 1) \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

V závěru kapitoly se budeme věnovat podrobněji binární relaci ekvivalence množin, kterou v dalším studiu využijeme k zavedení pojmu přirozeného čísla.

Připomeňme: Množiny A, B jsou ekvivalentní, píšeme $A \sim B$, právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B (vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B).

Uvažujme nyní systém množin $\mathfrak{M}$ a na tomto systému binární relaci $\sim$ ekvivalence dvou množin:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny } A \text{ na množinu } B.$$

Platí následující věta:

Věta 2.10 Relace $\sim$ ekvivalence dvou množin definovaná v libovolném systému množin $\mathfrak{M}$ má vlastnosti:

a) $(\forall A \in \mathfrak{M})[A \sim A]$, tedy relace $\sim$ je reflexivní,

b) $(\forall A, B \in \mathfrak{M})[A \sim B \Rightarrow B \sim A]$, tedy relace $\sim$ je symetrická,

c) $(\forall A, B, C \in \mathfrak{M})[(A \sim B \wedge B \sim C) \Rightarrow A \sim C]$, tedy relace $\sim$ je tranzitivní.

Relace $\sim$ je relací ekvivalence na systému množin $\mathfrak{M}$.

Důkaz:

a) Pro každou množinu $A \in \mathfrak{M}$ je identické zobrazení I množiny A prostým zobrazením A na A. Platí tedy, že $A \sim A$, tj. relace ekvivalence $\sim$ dvou množin je reflexivní.

b) Nechť pro libovolné dvě množiny $A, B \in \mathfrak{M}$ platí $A \sim B$. Existuje tedy prosté zobrazení množiny A na množinu B. Označme toto zobrazení Z. K němu existuje inverzí zobrazení Z^{-1}, které je prostým zobrazením množiny B na množinu A, tedy platí $B \sim A$, tj. relace ekvivalence $\sim$ dvou množin je symetrická.

c) Nechť pro libovolné tři množiny $A, B, C \in \mathfrak{M}$ platí $A \sim B$ a současně $B \sim C$. Existuje tedy prosté zobrazení množiny A na množinu B - označme jej Z_1. Současně existuje prosté zobrazení množiny B na množinu C - označme jej Z_2. Zobrazení $Z_1 \circ Z_2$ je pak prostým zobrazením množiny A na množinu C, platí tedy $A \sim C$, tj. relace ekvivalence $\sim$ dvou množin je tranzitivní.

Dokázali jsme, že relace $\sim$ ekvivalence dvou množin definovaná v libovolném systému množin $\mathfrak{M}$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní; tedy relace $\sim$ je relací ekvivalence na systému množin $\mathfrak{M}$.

Poznámka 2.43 Relace $\sim$ ekvivalence dvou množin definovaná na libovolném systému množin $\mathfrak{M}$ vytváří rozklad systému $\mathfrak{M}$ na třídy ekvivalentních množin. Tuto skutečnost ilustruje následující příklad.

Příklad 2.34 Uvažujme systém množin $\mathfrak{M} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, kde

$$\begin{array}{llll} A = \{a, b, c\}, & B = \{u, v\}, & C = \{1, 2, 3\}, & D = \{\triangle\}, \\ E = \{\square, \circ, \heartsuit, \diamond\}, & F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, & G = \{x, y, z\}, & H = \{[k, l], [m, n]\}. \end{array}$$

Rozhodněte, které z množin systému $\mathfrak{M}$ jsou navzájem ekvivalentní a určete rozklad systému $\mathfrak{M}$ generovaného relací $\sim$ ekvivalence množin.
Řešení: Navzájem ekvivalentní množiny systému $\mathfrak{M}$ jsou:

$A \sim A$, $C \sim C$, $G \sim G$, $A \sim C$, $A \sim G$, $G \sim A$, $G \sim C$, $C \sim A$, $C \sim G$,

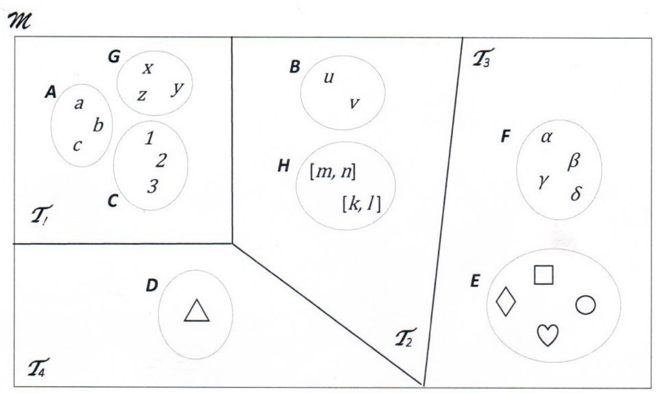
$B \sim B$, $H \sim H$, $H \sim B$, $B \sim H$,

$E \sim E$, $F \sim F$, $E \sim F$, $F \sim E$,

$D \sim D$.

Rozklad $\mathcal{T}$ systému množin $\mathfrak{M}$, který je generovaný relací $\sim$ ekvivalence množin, obsahuje třídy $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$, $\mathcal{T}_4$:

$\mathcal{T}_1 = \{A, C, G\}$, $\mathcal{T}_2 = \{B, H\}$, $\mathcal{T}_3 = \{E, F\}$, $\mathcal{T}_4 = \{D\}$.



Obr. 2.119:

Rozklad $\mathcal{T}$ systému množin $\mathfrak{M}$ zapíšeme $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4\}$ nebo také $\mathcal{T} = \{\{A, C, G\}, \{B, H\}, \{E, F\}, \{D\}\}$. Každá třída rozkladu $\mathcal{T}$ obsahuje navzájem ekvivalentní množiny systému $\mathfrak{M}$. Grafické znázornění rozkladu $\mathcal{T}$ systému množin $\mathfrak{M}$ generovaného relací $\sim$ je na obrázku 2.119.

Rozklad systému $\mathfrak{M}$ generovaný relací $\sim$ ekvivalence dvou množin na třídy ekvivalentních množin využijeme později při konstrukci oboru všech přirozených čísel.

2.4.1 Úlohy k procvičení

1. Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $B = \{x, y, z\}$. Rozhodněte, zda následující relace jsou relacemi zobrazení. V případě, že se jedná o zobrazenní, určete jeho typ, definiční obor, obor hodnot a zjistěte, zda je prosté.

a) $R_1 = \{[1, y], [2, y], [3, y], [4, y], [5, y]\}$,
b) $R_2 = \{[1, y], [2, y], [3, x], [4, x], [3, z], [4, z], [5, z]\}$,
c) $R_3 = \{[1, y], [2, x], [3, z], [4, y], [5, x]\}$,
d) $R_4 = \{[1, y], [3, x], [4, z]\}$,
e) $R_5 = \{[1, z], [5, x]\}$,
f) $R_6 = \{[1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4], [5, 5]\}$,
g) $R_7 = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5], [5, 1]\}$,
h) $R_8 = \{[1, 2], [2, 1], [3, 1], [1, 3], [1, 4], [4, 1], [1, 5], [5, 1]\}$,
j) $R_9 = \{[1, 5], [2, 5], [3, 5], [4, 5], [5, 5]\}$.

2. Definujte zobrazení množiny C na množinu D, je-li dáno:

a) $C = \{a, b, c\}$, $D = \{3, 4\}$,
b) $C = \{a, b\}$, $D = \{3, 4, 5\}$,
c) $C = \mathbb{N}$, D je množina všech sudých přirozených čísel,
d) $C = \mathbb{Z}$, $D = \{1, 2, 3\}$,
e) $C = \mathbb{R}$, $D = \{1\}$.

Pro každý případ rozhodněte, zda je uvažované zobrazení prosté.

3. Jsou dány množiny $M = \{a, b, c, d, e\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Uveďte příklad relace z množiny M do množiny N, která

a) je zobrazením množiny M na N, které je prosté,
b) je zobrazením množiny M do N, které není prosté,
c) je zobrazením množiny M do N, které je prosté,
d) není zobrazením.

4. Rozhodněte, zda dané relace jsou relacemi zobrazení v množině $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. V případě zobrazení zdůvodněte, zda je prosté:

a) $R_1 = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; y = 2x - 1\}$,
b) $R_2 = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; y = x - 3\}$,
c) $R_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = 2x^2 - 1\}$,
d) $R_4 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = |x|\}$,
e) $R_5 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x^2 + y^2 = 4\}$,
f) $R_6 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = 3\}$,
g) $R_7 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = \frac{1}{x}\}$,
h) $R_8 = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y < x\}$.

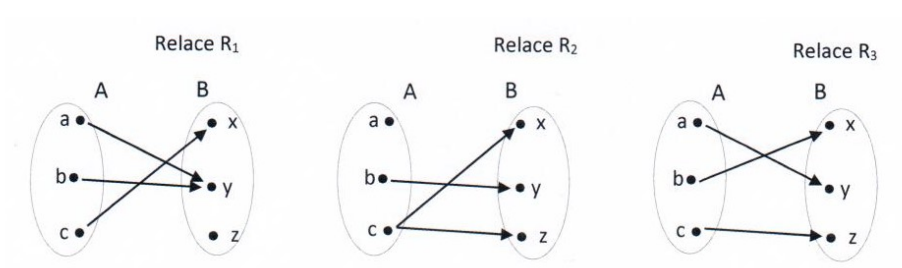
5. Jsou dány množiny $A = \{a, b, c, d\}$ a $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Určete výčtem prvků inverzní relace R_1^{-1}, R_2^{-1} k relacím R_1, R_2. Rozhodněte, zda relace R_1^{-1}, R_2^{-1} jsou relacemi zobrazení z množiny B do množiny A:

a) $R_1 = \{[a, 2], [b, 1], [c, 3], [d, 5]\}$, b) $R_2 = \{[a, 2], [b, 2], [c, 3], [d, 4]\}$,

6. Nalezněte inverzní zobrazení k následujícím zobrazením v množině $\mathbb{R}$:

a) $Z_1 : y = 2x - 1$, b) $Z_2 : y = x^2 + 3$,
c) $Z_3 : y = |x| + 2$, d) $Z_4 : y = -2$.

7. Jsou dány množiny $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$. Rozhodněte, zda uzlové grafy relací R_1, R_2, R_3 na obrázku 2.120 jsou relacemi zobrazení z množiny A do množiny B.



Obr. 2.120:

8. Zobrazení Z je dáno charakteristickou vlastností: $Z = \{[x, y] \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}; 2y = 3x - 5\}$. Určete

a) vzory prvků 1, 0, -5, 2 v zobrazení Z,
b) obrazy prvků 0, -3, -2, 4 v zobrazení Z.

9. Zobrazení Z je dáno charakteristickou vlastností: $Z = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y + 2 = 3x\}$. Doplňte tabulku:

x					3	0	-1	$-\frac{1}{2}$
y	0	-2	1	$\frac{1}{2}$				

10. V množině $B = \{x \in \mathbb{N}; 3 \leq x < 10\}$ přiřadíme každému číslu x největší prvočíslo y, pro které platí $y \leq x$. Znázorněte uvedenou relaci R_1 pomocí kartézského grafu a zjistěte, zda se jedná o relaci zobrazení.

11. Vysvětlete, jak poznáte, zda je zadaná relace zobrazením:

a) na kartézském grafu,
b) na uzlovém grafu,
c) prostým na kartézském grafu,
d) prostým na uzlovém grafu.

12. Ve třídě je 25 žáků, z nichž 23 psalo písemnou práci z českého jazyka. Každý žák získal za svou písemnou práci jednu známku, přičemž hodnocení dopadlo následovně: 12 žáků získalo jedničku, 6 žáků dvojku, dva žáci získali trojku a dva žáci získali pětku. Rozhodněte, zda přiřazení známky za písemnou práci jednotlivým žákům je zobrazení, případně určete jeho typ a zjistěte, zda je prosté.

13. Maminka má pět dětí (Toník, Sofinka, Adámek, Zbyněk a Vašík) a koupila jim 5 lízátek, z nichž každé mělo jinou ovocnou příchuť (jahodové, borůvkové, citronové, pomerančové a ananasové).

a) Kolika možnými způsoby může maminka mezi své děti rozdělit lízátka tak, aby rozdělení bylo spravedlivé, tj. aby každé dítě dostalo právě jedno lízátko?

b) Jsou uvažovaná přiřazení lízátek dětem z bodu a) zobrazeními? Pokud ano, určete jejich typ a rozhodněte, zda jsou prostá.

c) Uvažujme situaci, že si děti rozdělily lízátka takto: Toník dostal borůvkové, Sofinka pomerančové, Adámek jahodové, Zbyněk ananasové a Vašík si nevzal žádné. Je toto přiřazení zobrazením? Pokud ano, určete jeho typ a rozhodněte, zda je prosté.

d) Uvažujme situaci, že si děti rozdělily lízátka takto: Toník dostal borůvkové, Sofinka pomerančové, Adámek si vzal jahodové a ananasové, Zbyněk citronové a na Vašíka nezbylo žádné. Je toto přiřazení zobrazením? Pokud ano, určete jeho typ a rozhodněte, zda je prosté.

14. Určete pravdivost těchto výroků:

a) u: Každé dvě množiny, které se sobě rovnají, jsou ekvivalentní.
b) v: Každé dvě ekvivalentní množiny se sobě rovnají.

15. Rozhodněte, které z množin jsou navzájem ekvivalentní:

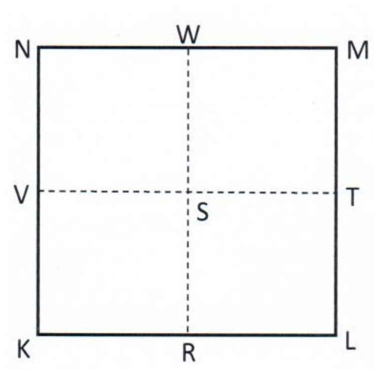
$A = \{x, y, z\}$, $B = \{\text{modrá, žlutá, zelená, oranžová}\}$, $C = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$,
$D = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $E = \{\triangle, \star, \circ\}$, $F = \mathbb{N}$,
$G = \{3, 6, 9, 12, ...\}$, $H = \{x \in \mathbb{N}; x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $I = \mathbb{N}_0$,
$J = \{\text{jedna, dva}\}$.

16. V množině $A = \{\frac{1}{3}, \frac{5}{7}, \frac{4}{12}, \frac{15}{21}, \frac{7}{21}, \frac{1}{2}\}$ je definována relace

$$R = \{[x, y] \in A \times A; y \text{ je základní tvar zlomku } x\}.$$

Rozhodněte, zda relace R je zobrazení, případně určete jeho typ, obor hodnot a zda je prosté.

17. Uvažujme množinu A všech obrazců, které lze získat vystřižením ze čtverce $KLMN$ o straně 2 cm podle vyznačených středních příček, viz. obrázek 2.121 (jako součást řešení přitom samotný čtverec $KLMN$ neuvažujeme).



Obr. 2.121:

a) Vypište pomocí označených bodů všechny prvky množiny A.

b) Je dána množina $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Relace R z množiny A do množiny B přiřazuje každému $x \in A$ takové $y \in B$, že y je obsah obrazce x (v cm^2). Rozhodněte, zda relace R je zobrazení, případně určete jeho typ, obor hodnot a zda je prosté.

18. V množině $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ je dána relace

$$R = \{[x, y] \in M \times M; y \text{ je zbytek při dělení čísla } x \text{ třemi}\}.$$

Zapište relaci R výčtem prvků a určete, zda R je zobrazení v množině M. Pokud ano, určete jeho typ a rozhodněte, zda je prosté.

19. V množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ je dána relace

$$R = \{[x, y] \in M \times M; y \text{ je zbytek při dělení čísla } x \text{ třemi}\}.$$

Zapište relaci R výčtem prvků a určete, zda R je zobrazení v množině M. Pokud ano, určete jeho typ a rozhodněte, zda je prosté.

20. Jsou dány množiny $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2\}$. Určete výčtem prvků všechna zobrazení množiny A do množiny B.

21. Je dána množina $M = \{1, 2, 3\}$. V množině M jsou dány binární relace R, S takto:

$$R = \{[x, y] \in M \times M; x \neq 3 \wedge y = 1\},\ S = \{[1, 2], [2, 3], [3, 1]\}.$$

Rozhodněte, zda relace R, S jsou zobrazení v množině M, pokud ano, určete jejich typ a zda jsou prostá. Určete $R \circ S$, $S \circ R$ a rozhodněte, zda jsou tyto složené relace zobrazení v množině M.

22. Je dána množina $M = \{1, 2, 3\}$. V množině M jsou dány binární relace R, S takto:

$$R = \{[x, y] \in M \times M; x \neq y \Rightarrow x = y\},\ S = \{[1, 3], [2, 1], [3, 2]\}.$$

Rozhodněte, zda relace R, S jsou permutace množiny M.

Výsledky:

1. Relace

a) R_1 je zobrazení množiny A do množiny B, které není prosté, $O_1(R_1) = A$, $O_2(R_1) = \{y\}$.
b) R_2 není zobrazení.
c) R_3 je zobrazení množiny A na množinu B, které není prosté, $O_1(R_3) = A$, $O_2(R_3) = B$.
d) R_4 je zobrazení z množiny A na množinu B, které je prosté, $O_1(R_4) = \{1, 3, 4\}$, $O_2(R_4) = B$.
e) R_5 je zobrazení z množiny A do množiny B, které je prosté, $O_1(R_5) = \{1, 5\}$, $O_2(R_5) = \{x, z\}$.
f) R_6 je zobrazení množiny A na množinu A, které je prosté, $O_1(R_6) = A$, $O_2(R_6) = A$.
g) R_7 je zobrazení množiny A na množinu A, které je prosté, $O_1(R_7) = A$, $O_2(R_7) = A$.
h) R_8 není zobrazení.
i) R_9 je zobrazení množiny A do množiny A, které není prosté, $O_1(R_9) = A$, $O_2(R_9) = \{5\}$.

2. a) Například $Z_1 = \{[a, 3], [b, 3], [c, 4]\}$, Z_1 je zobrazení množiny C na D, které není prosté.

b) Neexistuje zobrazení množiny C na D.

c) Například

$$Z_3(x) = \begin{cases} x & : \quad \text{kde } x \in \mathbb{N} \text{ je sudé,} \\ x + 1 & : \quad \text{kde } x \in \mathbb{N} \text{ je liché.} \end{cases}$$

Z_3 je zobrazení množiny C na D, které není prosté.

d) Například

$$Z_4(x) = \begin{cases} 1 & : \text{ pro } x < 0, \\ 2 & : \text{ pro } x = 0, \\ 3 & : \text{ pro } x > 0. \end{cases}$$

Z_4 je zobrazení množiny C na D, které není prosté.

e) Například $Z_5(x) = 1$, pro všechna $x \in \mathbb{R}$, Z_5 je zobrazení množiny C na D, které není prosté.

3. a) Například $R_1 = \{[a,2],[b,4],[c,5],[d,1],[e,3]\}$,

b) Například $R_2 = \{[a,2],[b,4],[c,5],[d,1],[e,1]\}$,

c) Neexistuje zobrazení množiny M do N, které je prosté,

d) Například $R_4 = \{[a,2],[b,4],[a,5],[b,1],[e,3]\}$.

4. Relace

a) R_1 je prosté zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{N}$,
b) R_2 je prosté zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{N}$,
c) R_3 je zobrazení množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$, které není prosté,
d) R_4 je zobrazení množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$, které není prosté,
e) R_5 není zobrazení,
f) R_6 je zobrazení množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$, které není prosté,
g) R_7 je prosté zobrazení z množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$,
h) R_8 není zobrazení.

5. a) R_1 je prosté zobrazení množiny A do B. Relace $R_1^{-1} = \{[2,a],[1,b],[3,c],[5,d]\}$ je inverzní zobrazení k zobrazení R_1.

b) R_2 je zobrazení množiny A do B, které není prosté. Relace $R_2^{-1} = \{[2,a],[2,b],[3,c],[4,d]\}$ není zobrazení.

6. a) Zobrazení Z_1 je prosté, $Z_1^{-1} : y = \frac{x+1}{2}$,

b) Zobrazení Z_2 není prosté, tj. v množině $\mathbb{R}$ neexistuje inverzní zobrazení k zobrazení Z_2,

c) Zobrazení Z_3 není prosté, tj. v množině $\mathbb{R}$ neexistuje inverzní zobrazení k zobrazení Z_3,

d) Zobrazení Z_3 není prosté, tj. v množině $\mathbb{R}$ neexistuje inverzní zobrazení k zobrazení Z_4,

7. Relace R_1 je zobrazení množiny A do množiny B, které není prosté. Relace R_2 není zobrazení. Relace R_3 je zobrazení množiny A na množinu B, které je prosté.

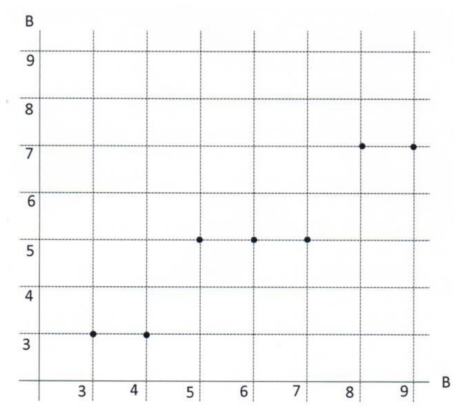
8. a) vzory prvků 1, 0, -5, 2 v zobrazení Z jsou po řadě čísla $\frac{7}{3}$, $\frac{5}{3}$, $-\frac{5}{3}$, 3,

b) obrazy prvků 0, -3, -2, 4 v zobrazení Z jsou po řadě čísla $-\frac{5}{2}$, -7, $-\frac{11}{2}$, $\frac{7}{2}$.

9.

x	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{5}{6}$	3	0	-1	$-\frac{1}{2}$
y	0	-2	1	$\frac{1}{2}$	7	-2	-5	$-\frac{7}{2}$

10. Relace $R_1 = \{[3,3],[4,3],[5,5],[6,5],[7,7],[8,7],[9,7]\}$ je zobrazení množiny B do množiny B, které není prosté. Kartézský graf zobrazení R_1 je na obrázku 2.122.



Obr. 2.122:

12. Uvažujeme-li A množinu všech žáků ve třídě a $B = \{1,2,3,4,5\}$ množinu všech možných známek hodnocení písemné práce, pak přiřazení známky jednotlivým žákům dané třídy je zobrazení z množiny A (2 žáci písemku nepsali) do množiny B (čtyřku nedostal žádný žák), které není prosté (např. jedničku dostalo více žáků než jeden).

13. Uvažujme malá počáteční písmena jmen dětí a označme $A = \{t,s,a,z,v\}$ množinu všech zadaných dětí. Dále uvažujme počáteční písmena příchutí lízátek a označme $B = \{j,b,c,p,a\}$ množinu všech lízátek.

a) Existuje celkem $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ různých způsobů, kterými může maminka mezi své děti rozdělit lízátka spravedlivě.

b) Uvažovaná přiřazení lízátek dětem z bodu a) jsou zobrazeními množiny A na množinu B, která jsou prostá.

c) Uvažovanou situaci lze zapsat jako relaci danou výčtem prvků $R_1 = \{[t,b],[s,p],[a,j],[z,a]\}$. Relace R_1 je zobrazením z množiny A do množiny B, které je prosté.

d) Uvažovanou situaci lze zapsat jako relaci danou výčtem prvků $R_2 = \{[t,b],[s,p],[a,j],[a,a],[z,c]\}$. Relace R_2 není zobrazením.

14. Výrok u je pravdivý, výrok v je nepravdivý.

15. $A \sim C$, $A \sim E$, $C \sim E$, $\quad B \sim D$, $\quad H \sim J$, $\quad F \sim G$, $F \sim I$, $G \sim I$.

16. $R = \{[\frac{1}{3},\frac{1}{3}],[\frac{5}{7},\frac{5}{7}],[\frac{4}{12},\frac{1}{3}],[\frac{1}{3},\frac{1}{3}],[\frac{15}{21},\frac{5}{7}],[\frac{7}{21},\frac{1}{3}],[\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\}$. Relace R je zobrazení množiny A do množiny A, které není prosté, $O_2(R) = \{\frac{1}{3},\frac{5}{7},\frac{1}{2}\}$.

17. a) $A = \{KRSV, RLTS, TMWS, VSWN, KLTV, RLMW, TMNV, WNKR, KLTSWN, RLMNVS, TMNKRS, WNKLTS\}$,

b) Relace R je zobrazení množiny A do množiny B, které není prosté, $O_2(R) = \{1, 2, 3\}$.

18. Relace $R = \{[0,0], [1,1], [2,2], [3,0], [4,1], [5,2], [6,0], [7,1], [8,2]\}$ je zobrazení množiny M do množiny M, které není prosté. Obor hodnot zobrazení R je množina $O_2(R) = \{0, 1, 2\}$.

19. Relace $R = \{[1,1], [2,2], [4,1], [5,2], [7,1], [8,2]\}$ je zobrazení množiny z M do množiny M, které není prosté. Obor hodnot zobrazení R je množina $O_2(R) = \{1, 2\}$.

20. $R_1 = \{[x,1], [y,1], [z,1]\}$, $R_2 = \{[x,2], [y,2], [z,2]\}$.

21. Relace R daná výčtem prvků $R = \{[1,1], [2,1]\}$ je zobrazení z množiny M do množiny M, které není prosté. Relace S je zobrazení množiny M na množinu M, které je prosté (permutace). Relace $R \circ S = \{[1,3], [2,3]\}$ je zobrazení z množiny M do množiny M, které není prosté. Relace $S \circ R = \{[1,1], [3,1]\}$ je zobrazení z množiny M do množiny M, které není prosté.

22. Relace R daná výčtem prvků $R = \{[1,1], [2,2], [3,3]\}$ je permutace množiny M. Relace S je rovněž permutace množiny M.

2.4.2 Binární relace v učivu matematiky na 1. stupni ZŠ

V každodenním životě se setkáváme s mnoha situacemi, které představují konkrétní modely binárních relací.

Již v předškolním věku děti získávají zkušenosti se vzájemnými vztahy mezi různými objekty. Poznávají například příbuzenské vztahy mezi členy rodiny matka - dítě, bratr - sestra, mladší - starší apod. Rozhodují, zda dané kostky mají stejnou (různou) barvu, tvar či velikost. Vnímají, že jedno dítě má více pastelek než druhé, poměřují se podle velikosti. Při různých aktivitách tvoří dvojice hrneček - talířek, děvče - chlapec, dítě - obrázek na skříňce, zvíře - mládě atd. Vytvářejí tedy dvojice podle určitého vztahu, třídí předměty podle určité vlastnosti, uspořádávají předměty.

Na tyto zkušenosti navazuje škola. V hodinách matematiky se žáci 1. stupně postupně seznamují s různými relacemi danými charakteristickou vlastností a intuitivně poznávají některé jejich vlastnosti. V aritmetice to jsou například vztahy mezi přirozenými čísly (relace v množině přirozených čísel):

- číslo x je menší/větší než číslo y,
- číslo x se rovná/nerovná číslu y,
- číslo x je/není násobkem čísla y.

V geometrii žáci pracují se vztahy mezi geometrickými útvary (relace v množině geometrických útvarů):

- přímka p je rovnoběžná/různoběžná s přímkou q,
- přímka p je kolmá k přímce q,
- úsečka AB je shodná s úsečkou CD,
- trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem KLM,
- úhel $\angle AVB$ je větší/menší než úhel $\angle CUD$.
- úsečka PQ je větší/menší než úsečka RS.

Binární relaci z množiny geometrických útvarů do množiny reálných čísel získáme například tak, že určíme délku úsečky, obsah rovinného obrazce či objem tělesa.

Z výše uvedeného je jistě zřejmé, že relace prostupují učivem matematiky na 1. stupni ZŠ. O některých speciálních typech binárních relací ve školské matematice pojednáme podrobněji v dalším textu.

• Relace uspořádání

S uspořádáním se děti seznamují při různých hrách a činnostech, prostřednictvím příběhů a pohádek (např. O veliké řepě). Porovnávají objekty podle velikosti a na základě toho je uspořádavají v dané skupině (množině). Intuitivně poznávají jeho vlastnosti antisymetrie, tranzitivnosti, případně souvislosti. Děti pracují s konečnými lineárně uspořádanými množinami, kde relace uspořádání je reprezentovaná vztahem

- "x je před y",
- "x je za y".

O každých dvou prvcích lineárně uspořádané množiny jsou děti schopny rozhodnout, který prvek je před kterým. Vzhledem k tomu, že každé lineární uspořádaní konečné množiny je dobré, je možné vždy určit první i poslední prvek dané množiny. Aby děti pochopily podstatu pojmu uspořádání, je třeba ukázat různá uspořádání téže množiny. Srovnání daných prvků do řady slouží jako pomocný prostředek a dělá se pro lepší názornost. Například množinu žáků ve třídě lze uspořádat podle abecedy, podle výšky žáků (nejvyšší/nejmenší) nebo podle hodnoty naměřeného času při sprintu na 50 m v hodině tělocviku (nejrychlejší/nejpomalejší). Každé uspořádání je tedy dohoda, která trvá, dokud ji nezrušíme či nenahradíme úmluvou jinou.

Zvláštní význam má na 1. stupni přirozené uspořádání množiny všech přirozených čísel a bezpečná orientace v číselné řadě, která je nezbytným předpokladem pro úspěšné provádění početních výkonů. O tomto typu uspořádání jsme se zmínili v poznámce 2.27 kapitoly 2.3.3.

• Relace ekvivalence a rozklad množiny

Relace ekvivalence se uplatňuje již v mateřské škole při rozdělování (třídění) objektů do skupin podle určité charakteristické vlastnosti

- "předmět x má stejnou barvu/tvar/velikost jako předmět y".

Relace ekvivalence je reflexivní, symetrická a tranzitivní v množině M daných objektů a na této množině generuje rozklad, tj. systém neprázdných navzájem disjunktních podmnožin množiny M, jejichž sjednocením je opět množina M. Je tedy důležité, aby v rámci různých předškolních aktivit byla uvedená charakteristická vlastnost pro třídění objektů zformulována jednoznačně tak, aby každý objekt množiny M byl zařazen do právě jedné skupiny.

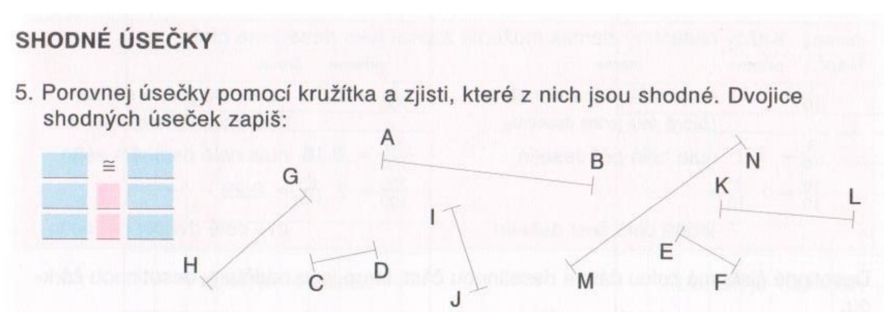
V rámci třídění podle určité charakteristické vlastnosti děti nejdříve třídí do skupin dané předměty na ty, které požadovanou vlastnost mají, a na ty, které ji nemají. Vznikají tak dvě skupiny (tzv. třídění dichotomické), později více skupin. Uvažujeme-li například M množinu dětí jednoho ročníku, lze je třídit podle barvy vlasů, barvy očí, místa bydliště atd. Podobně funguje vztah "mít stejnou barvu" v případě kostek uložených v krabici, který generuje rozklad na třídy, kde v každé třídě jsou kostky stejné barvy, přičemž každé dvě různé třídy obsahují kostky jiné barvy, a každou kostku z krabice jsme někam zařadili. Pro zařazení do výuky matematiky 1. ročníku ZŠ je vhodná například úloha 9 z odstavce 2.3.2, při které žáci třídí rovinné geometrické útvary podle barev či tvaru.

Žáci 1. ročníku ZŠ mohou třídit vybraná přirozená čísla v oboru do dvaceti, která jsou/nejsou menší než dané číslo (opět třídění dichotomické). Ve 2. ročníku žáci třídí v hodinách matematiky přirozená čísla do dvaceti podle toho, zda jsou/nejsou násobky dvou - vznikají dvě třídy rozkladu: čísla, která jsou násobky dvou (zavede se pojem sudého čísla) a čísla, která nejsou násobky dvou (zavede se pojem lichého čísla).

Po rozšíření číselného oboru do 100 ve 2. ročníku mohou žáci třídit čísla dané množiny například podle toho, zda jsou/nejsou násobky čtyř - vzniknou dvě třídy rozkladu: do jedné patří všechny násobky čtyř z dané množiny, do druhé patří čísla dané množiny, která nejsou násobky čtyř.

Po zavedení dělení se zbytkem ve 3. ročníku mohou žáci třídit čísla zadané množiny podle toho, jaký zbytek dávají například při dělení čtyřmi. Jde o relaci danou charakteristickou vlastností "číslo x dává při dělení čtyřmi stejný zbytek jako číslo y", která vytváří rozklad zadané množiny čísel na čtyři třídy podle zbytku po dělení čtyřmi (0, 1, 2, 3).

Další relace ekvivalence, se kterými se žáci na 1. stupni ZŠ seznamují, jsou rovnost čísel, shodnost úseček, shodnost trojúhelníků, rovnoběžnost přímek. Ukázka z učebnice matematiky pro 5. ročník (Justová, 2015) na obrázku 2.123 ilustruje třídění navzájem shodných úseček.



Obr. 2.123:

• Relace zobrazení z množiny do množiny

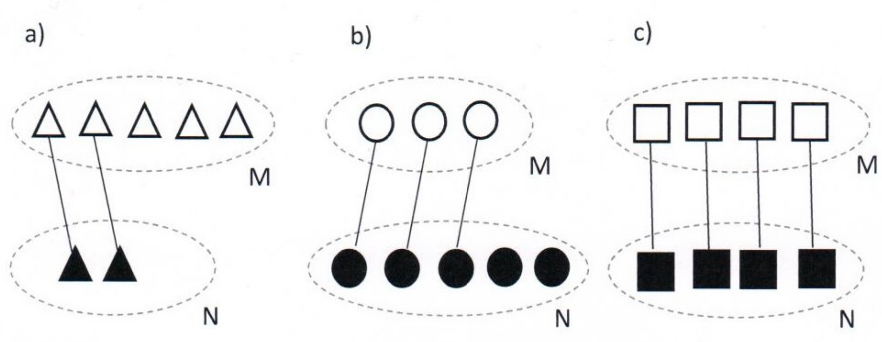
Relace zobrazení je využívána v hodinách matematiky již v 1. ročníku při zavádění přirozených čísel a jejich porovnávání. Východiskem je porovnávání počtu prvků zadaných množin (skupin) pomocí prostého zobrazení z jedné množiny do druhé.

Již v mateřské škole dokáže dítě určit, která ze dvou skupin objektů má více či méně prvků nebo mají-li zadané skupiny prvků stejně. Dítě toto určuje jen na základě vytváření uspořádaných dvojic, kde první prvek patří do první skupiny a druhý prvek do druhé skupiny (aniž by dítě prvky počítalo!). Modeluje tak prosté zobrazení z jedné množiny do druhé a podle výsledku (typu zobrazení) porovnává skupiny pomocí vztahů "má více - méně - stejně" prvků:

1. Na obrázku 2.124 a) se jedná o zobrazení z množiny M na množinu N, říkáme pak, že "*množina M má více prvků než množina N* ".

2. Na obrázku 2.124 b) se jedná o zobrazení množiny M do množiny N, říkáme pak, že "*množina M má méně prvků než množina N* ".

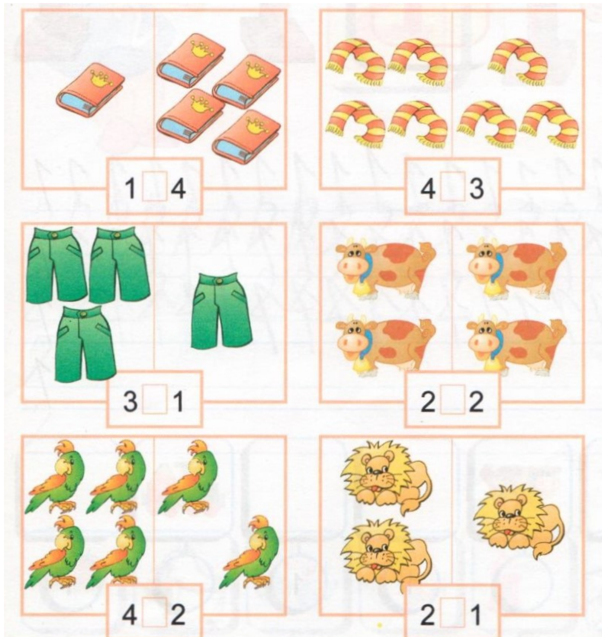
3. Na obrázku 2.124 c) se jedná o zobrazení množiny M na množinu N, říkáme pak, že "*množina M má stejně prvků jako množina N* ".



Obr. 2.124:

Všechna tato uvedená zobrazení jsou prostá, tedy jsou prostá i k nim příslušná inverzní zobrazení. Vzhledem k tomu mohou žáci v jediném znázornění využít obě navzájem inverzní zobrazení, což je vede ke zjištění: Jestliže množina M má více prvků než množina N, pak množina N má měně prvků než množina M. Na základě toho pak žáci provádí porovnávání přirozených čísel, viz ukázky vybraných úloh 2.125 z učebnice matematiky pro 1. ročník ZŠ (Potůčková, 1998).

Vrátíme-li se zpět k předškolním dětem, je třeba zmínit ještě jeden důležitý proces, s nímž se v rámci různých aktivit setkávají v souvislosti se zobrazením mezi množinami. Je jím **vzájemně jednoznačné přiřazování** (prosté zobrazení množiny M na množinu N), během kterého si děti uvědomují, že skupiny, jejichž prvky lze vzájemně jednoznačně přiřadit, mají stejný počet prvků, přičemž nezáleží na tom, jakého druhu prvky jsou.

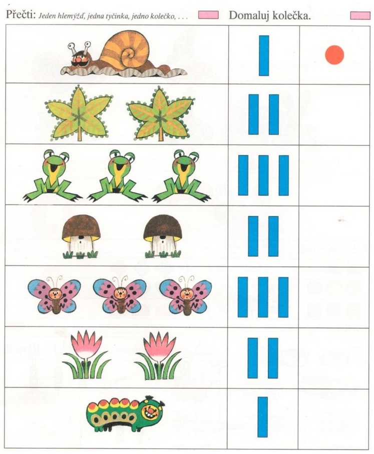


Obr. 2.125:

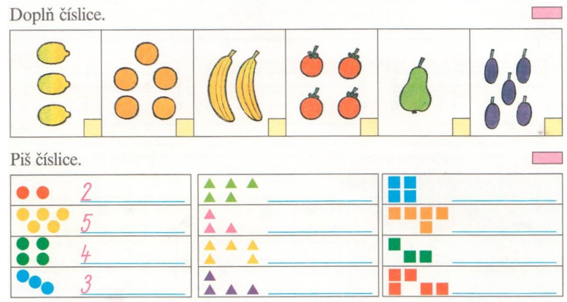
Podle Blažkové (2017) lze postupně s tímto uvědoměním zvyšovat u dětí náročnost na abstrakci a vzájemně jednoznačně přiřazovat

- **předměty předmětům** - děvčata chlapcům, aktovky dětem, židličky dětem, hrníčky na podšálky, vidličky nožům, dále pak každé dítě z dané množiny dostane jeden bonbón, atd. K nácviku procesu přiřazování lze využít zvířátek ze statku aktivitou "kdo ke komu patří" (koza - kůzlátko, kráva - telátko, kůň - hříbátko, slepice - kuřátko, kočka - koťátko, pes - štěňátko, atd.),
- **symboly předmětům** - vybereme několik dětí, kterým přiřazujeme oříšky, kamínky, kaštánky, korálky, apod.,
- **symboly symbolům** - obrázkům přiřazujeme puntíky, čárky, apod. (viz ukázka 2.126 z učebnice matematiky pro 1. ročník ZŠ (Staudková et al., 2019a)),
- **předmětům a symbolům čísla** - skupinám předmětů nebo symbolů přiřadíme číslo - kolik jich je (viz ukázka 2.127 z učebnice matematiky pro 1. ročník ZŠ (Staudková et al., 2019a)).

Dalším příkladem zobrazení, které se uplatňuje v matematice od 1. ročníku ZŠ, je zobrazení čísel na číselné ose. Číselná osa je chápána jako úsečka. Při znázornění množiny přirozených čísel (včetně nuly) do dvaceti jde o prosté zobrazení množiny přirozených čísel (včetně nuly) z intervalu $\langle 0, 20 \rangle$ do množiny bodů na úsečce s krajními body v 0 a 20, viz ukázky 2.128 a 2.129 z učebnic matematiky pro 1. ročník ZŠ (Staudková et al., 2019b). V pozdějších ročnících 1. stupně ZŠ je číselná osa chápána jako polopřímka,

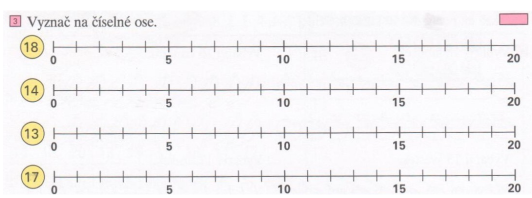


Obr. 2.126:

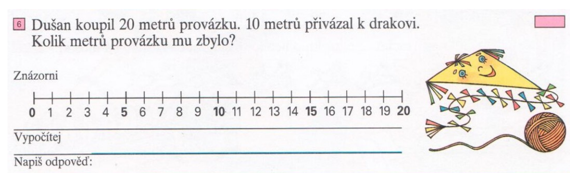


Obr. 2.127:

tzn. při znázornění přirozených čísel (včetně nuly) na číselné ose jde o prosté zobrazení množiny $\mathbb{N}_0$ do množiny bodů na polopřímce s počátkem 0).



Obr. 2.128:



Obr. 2.129:

Na 1. stupni ZŠ (nejen v matematice) dále žáci poznávají určité změny a závislosti, doplňují tabulky, analyzují závislosti z tabulek a grafů, v jednoduchých případech je vyjadřují matematickým předpisem. To směřuje k pochopení pojmu funkce. Příklady tabulek, které žáci 1. a 2. ročníku mohou dle zadaného předpisu doplňovat, můžeme vidět na obrázku 2.130.

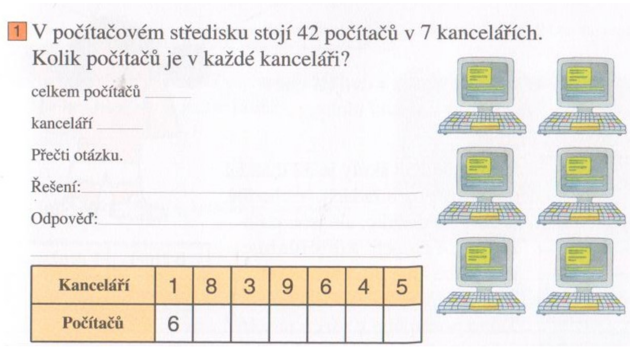
+ 4	1	2	5			4
	5			10	12	

a	0	1	2	3	4				9
5.a						35	50	40	

Obr. 2.130:

Žáci se na 1. stupni ZŠ seznamují s přímou úměrností, rozhodují, zda mezi veličinami je nebo není přímá úměrnost, a řeší úlohy typu: "Dvě vstupenky stojí 40 Kč, kolik korun stojí 1, 3, 4,... vstupenky." V ukázce 2.131 uvádíme příklad slovní úlohy zakládající se na přímé úměrnosti. Úloha byla vybrána z učebnice matematiky pro 2. ročník ZŠ (Eichlerová et al., 2019).

Početní výkony s přirozenými čísly jsou také zobrazení. Uspořádané dvojici přirozených čísel (včetně nuly) je přiřazen výsledek početního výkonu. Například při operaci sčítání, resp. násobení je dvojici přirozených čísel přiřazen jejich součet, resp. součin, což jsou



Obr. 2.131:

opět přirozená čísla. U obou operací jde přitom o zobrazení množiny $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ na množinu $\mathbb{N}_0$, které není prosté.

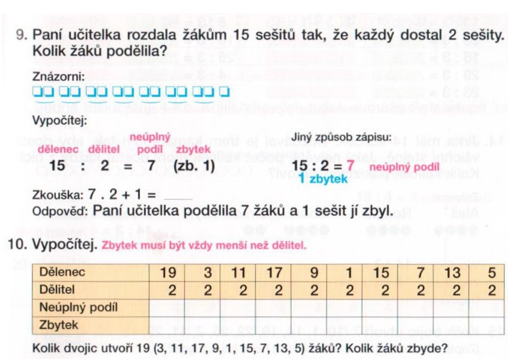
Rovněž dělení se zbytkem v množině přirozených čísel je zobrazení množiny $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, které není prosté. Každé uspořádané dvojici přirozených čísel $a, b \in \mathbb{N}_0$, kde $b \neq 0$, lze jednoznačně přiřadit uspořádanou dvojici čísel $q \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}_0$ tak, že

$$a = b \cdot q + r,$$

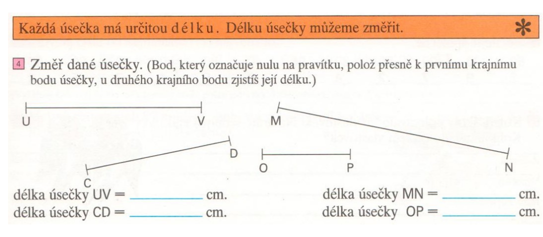
kde $0 \leq r < b$. Přirozené číslo

a	nazýváme	**dělenec**,
$b \neq 0$	nazýváme	**dělitel**,
q	nazýváme	**neúplný podíl**,
r	nazýváme	**zbytek** po dělení čísla a číslem b.

Například dělíme-li číslo 17 (dělenec) číslem 5 (dělitel), dostáváme neúplný podíl 3 a zbytek 2, neboť $17 = 5 \cdot 3 + 2$. Ukázky vybraných úloh zaměřených na dělení se zbytkem na obrázku 2.132 byly vybrány z učebnice matematiky pro 3. ročník (Blažková et al., 2006).



Obr. 2.132:



Obr. 2.133:

V geometrii se žáci na 1. stupni ZŠ setkávají se shodnými zobrazeními, zejména s osovou souměrností a středovou souměrností, což jsou prostá zobrazení roviny na sebe. Při měření geometrických útvarů, tj. zjišťování délky úsečky, obsahu rovinných geometrických útvarů, objemu těles, jde obecně o přiřazení nezáporného reálného čísla danému objektu, tedy o zobrazení množiny všech měřitelných geometrických útvarů na množinu všech nezáporných reálných čísel. Ukázka úlohy o měření úseček z učebnice matematiky pro 2. ročník (Staudková et al., 2013) je na obrázku 2.133.

Poznámka 2.44 Výše uvedené příklady s vybranými ukázkami z učebnic matematiky, jejichž výčet není zdaleka vyčerpávající, dokládají důležitost pojmů relace a zobrazení v matematice na 1. stupni ZŠ.

3 Literatura

Bartsch, Hans-Jochen. (1987) *Matematické vzorce*. Praha: SNTL.

Bělík, M. (2002). *Matematika pro kombinované studium učitelství 1. stupně základní školy*. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně.

Blažková, R., Matoušková, K. & Vaňurová, M. (1996a). *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy. 2. část.* Brno: Masarykova univerzita.

Blažková, R., Matoušková, K. & Vaňurová, M. (1996b). *Matematika pro 4. ročník základních škol. 2. část.* Všeň: Alter.

Blažková, R., Vaňurová, M., Matoušková, K. & Staudková, H. (2006). *Matematika pro 3. ročník základních škol.* Všeň: Alter.

Blažková, R., Matoušková, K. & Vaňurová, M. (2011a). *Pracovní sešit k učebnici Matematika 3. I.díl.* Všeň: Alter.

Blažková, R., Matoušková, K. & Vaňurová, M. (2011b). *Pracovní sešit k učebnici Matematika 3. II. díl.* Všeň: Alter.

Blažková, R. (2017). *Didaktika matematiky se zaměřením na specifické poruchy učení*. Brno: Masarykova univerzita.

Drábek, J., Križalkovič, K., Liška, J. & Viktora, V. (1985). *Základy elementární aritmetiky: pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Praha: SPN.

Eichlerová, M., Staudková, H. & Vlček, O. (2019). *Matematika. Sčítání a odčítání dvojciferných čísel do 100, násobení a dělení 2, 3, 4.* Všeň: Alter.

Justová, J. (2015). *Matematika pro 5. ročník ZŠ. 2. díl.* Všeň: Alter.

Kaslová, M. (2010). *Předmatematické činnosti v předškolním vzdělávání*. Praha: Raabe.

Polák, J. (2015). *Přehled středoškolské matematiky*. Praha: Prometheus.

Potůčková, J. (1998). *Matematika pro 1. třídu základní školy. 1. díl.* Brno: Studio 1 + 1.

Potůčková, J. (1999). *Matematika pro 2. ročník ZŠ. 3. díl.* Brno: Studio 1 + 1.

Staudková, H., Tůmová, V. & Landová, V. (2019a). *Matematika. Numerace, sčítání a odčítání do 6.*Všeň: Alter.

Staudková, H., Tůmová, V. & Landová, V. (2019b). *Matematika. Numerace do 20, sčítání a odčítání bez přechodu desítky.* Všeň: Alter.

Staudková, H., Tůmová, V. & Landová, V. (2013). *Matematika. Numerace do 100, sčítání a odčítání bez přechodu desítky*. Všeň: Alter.

Viktora, V. (1976). *Matematika I pro studium učitelství v 1. až 5. ročníku ZDŠ*. Brno: Univerzita J. E. Purkyně.