

Diskrétní matematika (MA0002)

—
Kombinatorika: Základní kombinatorická pravidla.

—
Odvození kombinatorických vzorců:
Permutace, variace, kombinace bez opakování a s opakováním.

—
Faktoriály a kombinační čísla. Binomická věta.
Princip inkluze a exkluze a další kombinatorické lahůdky.

—
Konečné součty.

—
Dělitelnost celých čísel. Základní věta aritmetiky.

—
Dělitelnost polynomů. Hledání kořenů polynomu.
Dělení polynomu polynomem. Euklidův algoritmus.

—
Základy teorie grafů.
—

Studijní text PdF MU - verze ze dne 29. října 2021

Helena Durnová

Pracovní verze

Obsah

I	Spíše teoretická část	4
1	Značení a úmluvy	5
1.1	Číselné obory	5
1.2	Jak psát řešení příkladů	5
1.3	Důkaz jako prostředek komunikace v matematice	5
2	Kombinatorika	6
2.1	Faktoriály a kombinační čísla. Kombinatorické identity.	8
2.2	Variace, permutace, kombinace.	11
2.3	Další úlohy	13
2.4	Binomická věta	14
2.5	Princip inkluze a exkluze.	15
2.6	Speciální princip inkluze a exkluze	18
2.7	Kompozice a rozklady.	18
2.8	Rozdělování do přihrádek.	20
2.9	Závěrem ke kombinatorice.	21
3	Rekurentní vztahy. Konečné součty.	22
4	Základy elementární teorie čísel	24
4.1	Znaky dělitelnosti (známe často ze ZŠ)	25
4.2	Prvočísla a čísla složená. Základní věta aritmetiky.	27
4.3	Kongruence	28
4.4	Diofantické rovnice a Eukleidův algoritmus	28
4.5	Úlohy na zbytkové třídy (důkazy)	32
5	Dělitelnost polynomu. Hledání kořenů polynomu.	33
6	Základy teorie grafů	34
II	Domácí práce: zadání a řešení	36

Předmluva

Motto:

„Nevyučuj toho, kdo není připraven, aby byl vyučován.“

(Jan Ámos Komenský)

Matematika provází všechny děti po celou základní školní docházku od 70. let 20. století pod tímto jménem a pod jmény jinými (počty a měřictví, či aritmetika a geometrie) ještě déle. Některé děti matematika prostě baví, některé ne, ale přesto se jí musí učit všechny, stejně jako třeba češtině či tělocviku.

V dnešní době se stalo módou chlubit se neznalostí matematiky, začněme tedy kacířskou otázkou: co by se stalo, kdybychom děti, které matematické poznatky přirozeně nechápou, povinnosti učit se matematiku zprostili? Odpovědět na ni dokážeme teprve tehdy, když si uvědomíme, jaké učitele matematiky jsme zažili a co od nás matematika vyžadovala.

Matematika se dá — s velkou nadsázkou — přirovnat ke sportu. Ani ve sportu není talent všechno; skoro u každého je potřeba trénink. Tak je tomu i s matematikou: během školní docházky se v matematice učíme postupům, které nám procvičováním přejdou do krve. A tak si při písemném sčítání „sloupečků“ i v dospělosti pomáháme prsty. Pravda, příležitostí k využití této dovednosti máme díky přítomnosti kalkulačky ve všudypřítomných mobilních telefonech pramálo, ale když bylo vynalezeno auto, také jsme nepřestali chodit pěšky a jezdit na kole.

Ve výuce matematiky se často klade důraz na správný zápis, na to, aby byl výsledek dvakrát podtržen, na to, aby znaménko rovnosti bylo v úrovni hlavní zlomkové čáry složeného zlomku. Všechny tyto věci se zvenčí mohou zdát podružnými a nepodstatnými, ale právě tyto návyky nás učí odlišovat podstatné od nepodstatného: vezměme si jako příklad pomocné výpočty psané tužkou na okraj sešitu nebo dokonce na šmírák. Podobně důraz na úpravu a dodržování pravidel není samoúčelný, nýbrž nám samotným později ve složitějších výpočtech usnadní orientaci. Během hodin matematiky se tak cvičíme v disciplíně; například samotné numerické počítání asi baví málokoho, přesto je bezchybný numerický výpočet nutný pro dosažení správné odpovědi na otázku, kterou jsme si položili.

Význam matematiky pro studující bývá často přirovnáván k latině. V knize *Nebezpečí jednotné školy* použil Rudolf Mertlík slova Zdeňka Nejedlého:

Netajím se přesvědčením, že latina je velmi důležitý výchovný předmět. Vzpomínám-li na své vzdělání, které z předmětů mi

vlastně co daly, byla to matematika (ačkoliv jsem historik) a latina. To jsou předměty, které jsou takovou dresurou přesného myšlení. Jen ten, kdo nezná latinský jazyk, může tvrdit, že je ho možno nahradit jiným živým jazykem. Žádná frančtina, angličtina ani jiná řeč nenahradí latinský jazyk. Není jazyka, který by měl takovou logickou konstrukci, jako má klasická latina.

Latina už se dnes povinně učí na málokterém gymnáziu. Roli pomyslného biče tak převzala matematika: všimněte si, že Nejedlý mluvil o *tréninku přesného myšlení*. Samozřejmě, že i v matematice můžeme být kreativní, ale současně musíme dodržovat jistá pravidla; podobně jako při hře v šachy. Přesnost, kterou skrze matematiku pěstujeme, však netkví v počtu desetinných míst výsledku.

Na závěr dovolte několik vět k předkládanému textu. Je věnován některým partiím z tzv. diskrétní matematiky, zde konkrétně z teorie čísel, kombinatoriky a teorie grafů a je koncipován spíše jako vodítko k Vaší orientaci. Všechny partie zde probírané byly již popsány v řadě knih, na něž se v textu odkazujeme. Nepochopíte-li vše hned, nezoufejte a mějte na paměti, že vše lze pochopit, vyvinete-li dostatečné úsilí. Matematika je také práce.

Část I

Spíše teoretická část

Kapitola 1

Značení a úmluvy

Matematická komunikace je založena na konvencích. (Henri Poincaré) Proto bude dobré, když si pro začátek některé pojmy a jejich značení sjednotíme. Pro úspěšné zvládnutí předmětu není vždy bezpodmínečně nutné veškeré zde uvedené konvence dodržet, ale můžete se sem vracet, bude-li v textu použito značení, kterému z jakéhokoliv důvodu nebudete rozumět.

1.1 Číselné obory

\mathbb{N}	přirozená čísla	(1, 2, 3, ...; nula není přirozené číslo)
\mathbb{Z}	celá čísla	(..., -2, -1, 0, 1, 2, ...)
\mathbb{Q}	racionální čísla	čísla tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$
\mathbb{R}	reálná čísla	„lze vyjádřit jako délku úsečky“
\mathbb{C}	komplexní čísla	čísla tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a pro i platí: $i^2 = -1$

1.2 Jak psát řešení příkladů

- čitelně (není třeba krasopisně) a tak, abyste po pěti letech sami věděli, jak jste příklad řešili
- opticky oddělujeme stěžejní a pomocné výpočty; pomocné výpočty můžeme např. psát tužkou
- ...

1.3 Důkaz jako prostředek komunikace v matematice

Dohodneme-li se na značení, shodneme-li se na definicích, dospějeme v matematice k těm samým výsledkům. V tomto procesu je důkaz prostředkem přesvědčování druhých, avšak nikoli ve smyslu nátlaku, ale spíše pomoci, tak, aby také viděli to, co vidíme my. (František Kurřina: matematika jako umění vidět)

Kapitola 2

Kombinatorika

Řada knih zabývajících se kombinatorikou a jejími počátky poukazuje na zálibu lidí v přeskupování a vytváření vzorů. Athanasius Kircher (1602–1680) v ní viděl největší umění a svou knihu věnovanou kombinatorice nazval *Ars Magna Sciendum, Sive Combinatoria*. Kombinatorické úlohy jsou pro malé počty prvků zábavné a snadno řešitelné jednoduchým způsobem, totiž vypsáním všech možností. Při větším počtu však působí spíše magickým dojmem, protože není v našich silách představit si všechny možnosti, pročež musíme více důvěřovat korektnosti naší úvahy.

V moderním množinovém vyjádření můžeme stručně a jasně psát:

Věta 2.1 (Pravidlo součtu) *Nechť A, B jsou množiny, $A \cap B = \emptyset$. Pak $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

Příklad 2.2 *Na otázku „kolika způsoby lze na šachovnici postavit pěšáka?“ lze odpovědět také rozdělením šachovnice na černá a bílá políčka. Pro variantu, jak postavit pěšáka na bílé políčko, máme 32 možností; pro variantu, kdy pěšák stojí na černém políčku, máme také 32 možností. Celkem je možností $64 = 32 + 32$ (stojí-li pěšák na černém políčku, nestojí na bílém, a naopak).*

Věta 2.3 (Pravidlo součinu) *Nechť A, B jsou neprázdné množiny. Pak $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.*

Příklad 2.4 *Ptáme-li se, kolika způsoby můžeme postavit na šachovnici černou a bílou dámu tak, aby černá dáma stála na černém políčku a bílá na bílém, odpověď určíme jako $32 \cdot 32 = 1\,024$*

V následujícím příkladu zkombinujeme pravidlo součtu a součinu:

Příklad 2.5 *Kolik různých slov lze získat přeházením písmen slova KOLENA tak, že se v nich samohlásky a souhlásky střídají a souhlásky jsou seřazeny abecedně?*

Pokud jsou souhlásky na sudých pozicích a samohlásky na lichých, můžeme takto získat 6 slov ($6 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$) a stejně slov získáme i tehdy, jsou-li souhlásky na lichých pozicích a samohlásky na sudých [užili jsme pravidlo součinu]. Celkem je možností $12 = 6 + 6$, neboť pokud jsou souhlásky na sudých místech, nejsou na lichých místech a naopak [užili jsme pravidlo součinu].

Věta 2.6 (Příhrádkový, též zvaný Dirichletův, princip) Máme-li rozdělit $n + 1$ předmětů do n příhrádek, pak při libovolném rozdělení budou v alespoň jedné příhradce alespoň dva předměty.

Příklad 2.7 V zásuvce je 12 párů červených a 12 párů modrých ponožek. Pokud bereme ponožky z příhrádky poslepu, kolik ponožek musíme vzít, abychom měli alespoň dvě ponožky téže barvy?

[Stačí vytáhnout tři ponožky.]

Všechny kombinatorické vzorce, které znáte ze střední školy, se dají odvodit pomocí pravidla součtu a pravidla součinu. Příhrádkový (Dirichletův) princip lze s výhodou použít při řešení některých příkladů.

Několik postřehů z historie kombinatoriky. Kombinatorická pravidla jsou tak jednoduchá a samozřejmá, že těžko můžeme očekávat, že bychom v historických pramenech našli zmínky o jejich přesné formulaci.¹ Zmínky o úlohách, které bychom dnes klasifikovali jako kombinatorické, nacházíme především v indických a čínských textech. První zmínky se však objevují již ve starověkém Egyptě, jak dokládá následující

úloha z Rhindova papyru s poměrně nejasným zadáním. Obsahuje sloupec (viz též ??)

domy	7
kočky	49
myši	343
pšenice	2401
hekaty	6807
<hr/>	
	19607

R79

Majetek:

		domy	7
		kočky	49
1	2 801	myši	343
2	5 602	pšenice	2 301 ^{sic}
4	11 204	ječmen	16 807
celkem	19 607	celkem	19 607

Obrázek 2.1: Úloha o majetku z Rhindova papyru. Převzato z knihy Vymazalová, Hana. *Hieratické texty*.

Podobné počty najdeme i u Fibonnacciho (*Liber abaci*, 1202) ve formě říkanky o sedmi starých ženách, které jdou do Říma:

¹Biggs, N. 1979. 'Roots of combinatorics'. *Historia Mathematica* 6:109-136.

Sedm starých žen šlo do Říma
každá nesla.....
Kolik....

Tyto počty se dochovaly i v dětské říkance „Když jsem šel do St. Ives“:

As I was going to St. Ives,
I met a man with seven wives.
Each wife had seven sacks.
In each sack there were seven cats.
Each cat had seven kits.
Kits, cats, sacks, and wives,
How many were going to St. Ives?

Možná byly doby, kdy takové počítání patřilo spíše k zábavě, ale i ta patří k matematice. Traduje se, že kombinatorické myšlení bylo pěstováno spíše v Indii než v Evropě. Známa je úloha o počtu možných kombinací z pěti chutí: slaná, sladká, hořká, pálivá a trpká. Výčtem všech možností dojdeme k počtu 31:

5 chutí - 1 možnost
4 chutě - 5 možností (vždy se jedna vynechá)
3 chutě - 10 možností (kombinace 3 z 5)
2 chutě - 10 možností (kombinace 2 z 5)
1 chuť - 5 možností
(buď sladká, nebo slaná, nebo hořká, nebo pálivá, nebo trpká)

Na této úloze může být zajímavé si povšimnout, že možnost „bez chuti“ se nepočítá; jinak se vlastně jedná o počet podmnožin pětiprvkové množiny, kterých je $2^5 = 32$. Vzhledem k tomu, že prázdná množina je jen jedna, skutečně stačí odečíst 1.

V Evropě se dostala kombinatorika do obecného povědomí nejpozději v 17. století v souvislosti s výpočtem počtu možností při hazardních hrách. Klasifikaci na permutace, variace a kombinace znal už Jacob Bernoulli (1654–1708), švýcarský matematik.

2.1 Faktoriály a kombinační čísla. Kombinatorické identity.

V tomto oddíle stručně shrneme některé poznatky o faktoriálech a kombinačních číslech tak, abychom s nimi v dalším mohli počítat bez dalšího vysvětlování. Funkci faktoriál definujeme pouze pro přirozená čísla:

Definice 2.8 (Faktoriál přirozeného čísla) *Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ klademe $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ (čteme: „n faktoriál“).*

Dále klademe $0! = 1$. Na okraj uveďme, že pojem faktoriálu lze rozšířit i mimo obor přirozených čísel.

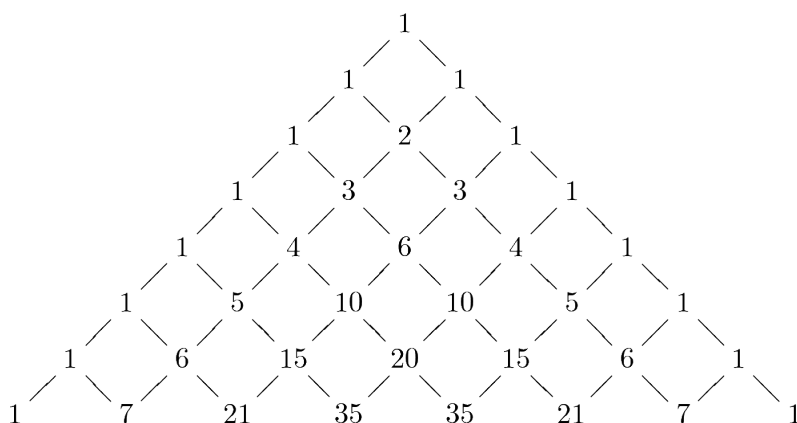
Tabulka hodnot faktoriálů pro $n = 1 \dots 10$, z níž je patrné, jak rychle tato funkce roste:

0!	1
1!	1
2!	2
3!	6
4!	24
5!	120
6!	720
7!	5 040
8!	40 320
9!	362 880
10!	3 628 800

Definice 2.9 (Kombinační číslo) Pro libovolná $k, n \in \mathbb{N}$ definujeme kombinační číslo (čteme: „ n nad k “) takto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Podobně jako pojem faktoriál lze i pojem kombinačního čísla rozšířit mimo obor přirozených čísel; v kombinatorice však vystačíme s kombinačními čísly, v nichž n i k budou přirozená čísla, pro něž navíc platí $0 \leq k \leq n$. Hodnoty kombinačních čísel lze elegantně zapsat do trojúhelníku, v němž na obou ramenech jsou čísla 1 (n nad nulou stejně jako n nad n je vždy jedna) a v ostatních případech můžeme kombinační číslo určit jako součet dvou čísel, která leží na odpovídajících místech v o řádek výš, jak je naznačeno na Obr. 2.2.²



Obrázek 2.2: Řádky aritmetického trojúhelníka pro $n = 0 \dots 7$.

Počítání s faktoriály a kombinačními čísly: Jednodušší příklady lze řešit rozepsáním faktoriálů. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ představuje vlastně stručný zápis zlomku $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, platí tedy: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

²Courtesy artofproblemsolving.com.

Kombinatorické identity: pro kombinační čísla platí řada tzv. kombinatorických identit. Lze je dokázat jednak rozepsáním jednotlivých kombinačních čísel, jednak kombinatorickou úvahou. Nejznámější z nich je tato:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Lze ji jednoduše ověřit rozepsáním kombinačních čísel. Také si můžeme uvědomit, že vybíráme-li např. tři osoby ze sedmi, je z početního hlediska jedno zda počítáme trojice těch, kteří nás budou reprezentovat, nebo naopak čtveřice těch, kteří “zůstanou doma”.

Uveďme některé další typy jednoduchých příkladů na toto téma::

- (a) Dokažte: $n! + (n-1)!n^2 = (n+1)!$ (Stačí na levé straně vytknout $n!$.)
- (b) Sečtěte: $\frac{(n+2)!}{n!} - 2\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} [=2]$
- (c) Vyjádřete jedním kombinačním číslem: $\binom{9}{4} + \binom{9}{6} [= \binom{10}{6}]$; $\binom{11}{2} + \binom{11}{8} [= \binom{12}{3}]$; $\binom{12}{5} + \binom{12}{6} [= \binom{13}{6}]$.

Dále platí tyto jednoduché kombinatorické identity:

- (i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- (ii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- (iii) $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$
- (iv) $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n}$
- (v) $\binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+m-1}{m} = \binom{n+m}{m}$
- (vi) $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m}{m}$
- (vii) $1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$
- (viii) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + m \cdot (m+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$
- (ix) $1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + m \cdot (m+1) \cdot (m+2) = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}$
- (x) $\binom{n}{0} \binom{n}{m} - \binom{n}{1} \binom{n-1}{m-1} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{m-2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{m} \binom{n-m}{0} = 0$

Jednoduchou úvahou z platnosti identity (iii) vyplývá platnost následujících identit pro sudé n :

- (iii-a) $2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n}$
- (iii-b) $2^{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n-1}$

a analogicky pro liché n :

- (iii-c) $2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n-1}$
- (iii-d) $2^{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n}$

Dále platí například:

$$(*) 4^n = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \binom{2n+1}{3} + \dots + \binom{2n+1}{n}$$

Řada vztahů mezi kombinačními čísly je patrná z tzv. Pascalova (též aritmetického) trojúhelníka.

DOPLŇ OBRÁZEK ARITMETICKÉHO TROJÚHELNÍKA

Rovnice s kombinačními čísly

Cvičení 2.10 Najděte všechna x , pro něž platí:

$$\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9$$

[5]

Cvičení 2.11 Určete m, n , víte-li, že platí:

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{m} = \frac{5}{3} \binom{m+1}{m-1}$$

[$n = 6, m = 3$]

2.2 Variace, permutace, kombinace.

V následujícím odvodíme pomocí pravidla součtu a součinu vzorce, které znáte ze střední školy pod názvy variace, permutace a kombinace (bez opakování a s opakováním). Postup vysvětlíme vždy na nějakém příkladu.

Variace bez opakování:

Příklad 2.12 *Kolika způsoby lze na šachovnici rozestavit dámu, krále a věž?*

Řešení: *Opakovaným použitím pravidla součinu: $64 \cdot 63 \cdot 62 = 249\,984$*

Obecně pokud vybíráme k předmětů z celkového počtu n předmětů, přičemž $k, n \in \mathbb{N}$ a $k \leq n$, možností je

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutace bez opakování jsou zvláštním případem variací pro $n = k$. Někdy mluvíme také o *pořadí*.

Příklad 2.13 *Kolika způsoby lze sestavit devítimístné číslo z cifer 1 až 9 takové, že se v něm cifry neopakují?*

Řešení: *Opakovaným použitím pravidla součinu: $9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 1 = 362\,880$*

Obecně je počet pořadí n prvků roven $n!$ ($n \in \mathbb{N}$)

Příklad 2.14 *Určete součet všech čtyřciferných čísel sestavených z cifer 1, 2, 3, 4.*

Řešení: $640 + 6400 + 64000 + 640000$ (číslice se mohou opakovat); $60 + 600 + 6000 + 60000$ (číslice se nemohou opakovat).

Kombinace bez opakování: uvědomíme si, že množství stejně početných variací a kombinací bez opakování prvků vybíraných ze stejně velké množiny spolu úzce souvisí. V podstatě stačí počet variací vhodným číslem vydělit; tímto vhodným číslem je faktoriál počtu vybíraných prvků; tj.

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

To je právě kombinační číslo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Příklad 2.15 *Kolika způsoby lze na šachovnici rozestavit tři bílé pěšáky?*

Řešení: Vydeme z příkladu, kdy jsme na šachovnici měli postavit krále, dámu a věž; možností bylo $64 \cdot 63 \cdot 62 = 249\,984$, Je zřejmé, že pokud na tři daná políčka postavíme tři pěšáky, je možnost jediná (pěšáci jsou stejní), zatímco krále, dámu a věž na tatáž políčka postavíme $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ způsoby.

U variant „s opakováním“ začneme s odvozováním vzorců také u variací.

Variace s opakováním

Příklad 2.16 *Do restaurace přijde 12 hostů. Na jídelním lístku jsou 4 jídla. Kolika způsoby si mohou objednat?*

Řešení: Každý z hostů má 4 možnosti, tedy $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^{12}$ možností.

Podobným způsobem lze odvodit počet podmnožin množiny A o n prvích:

$$2^{|A|} = 2^n$$

Permutace s opakováním tentokrát nejsou zvláštním případem variací.

Příklad 2.17 *Kolika způsoby můžeme přeskládat písmena slova*

(a) TATA

(b) POPOCATEPETL

Řešení:

(a) Vypíšeme možnosti dle abecedy: AATT, ATTA, ATAT, TAAT, TATA, TTAA. To odpovídá permutacím všech čtyř písmen vyděleným permutacemi opakujících se písmen, tj. $\frac{4!}{2!2!}$

(b) Analogicky slovo POPOCATEPETL má 3 P, 2 O, 2 T, 2 E, 1 A, 1 C 1 L, tj. dohromady 12 písmen a možností přeházení je tedy $\frac{12!}{3!2!2!2!1!1!1!}$

Kombinace s opakováním vyžadují zvláštní přístup. Začneme „kódovat“ a sestrojovat bijekce (vzájemně jednoznačná zobrazení) mezi objekty, jejichž počet máme spočítat, a objekty, jejichž počet budeme umět spočítat.

Příklad 2.18 *Do restaurace přijde 12 hostů. Na jídelním lístku jsou 4 jídla. Kolika může být objednávek z hlediska kuchaře?*

Řešení: *Kuchaři je jedno, kdo si objednal které jídlo, zajímá ho pouze, kolik má připravit porcí jídla č. 1 až 4. Možností je $\binom{12+4-1}{4-1} = \binom{12+4-1}{12}$*

Příklad 2.19 *Kolika způsoby mohou vybrat deset mincí v hodnotě 5, 10 a 20 Kč? (Máme dostatečný počet mincí každé hodnoty.)*

Řešení: *Možností je $\binom{10+3-1}{3-1} = \binom{10+3-1}{10} = 66$*

Oba výše uvedené případy můžeme „zakódovat“ pomocí nul a jedniček. V příkladě s mincemi si například můžeme představit, že mince uspořádáme podle hodnoty: nejprve dvacetikoruny, pak desetikoruny a nakonec pětikoruny. Místo dvacetikorun napíšeme do řádku příslušný počet jedniček; za ně napíšeme nulu. Pokračujeme tak, že zapíšeme tolik jedniček, kolik je desetikorun; za ně opět napíšeme nulu. Nakonec napíšeme tolik jedniček, kolik je pětikorun. Je zřejmé, že psát za nimi nulu je nadbytečné: pokud hromádka dvaceti-, deseti- a pětikorun splňuje zadání a obsahuje deset mincí, napsali jsme posud deset jedniček a dvě nuly. Je zřejmé, že mezi hromádkami mincí a permutacemi deseti jedniček a dvou nul existuje vzájemně jednoznačné zobrazení, neboli vyhovujících hromádek je právě tolik, kolik je permutací deseti jedniček a dvou nul. Ty však již umíme spočítat: jedná se o předchozí výsledek, který jsme nazvali permutace s opakováním (deseti jedniček a dvou nul).

Výše uvedené odvození můžeme zopakovat při řešení jednotlivých příkladů; je to spolehlivější než snaha dosazovat naslepo do vzorečku pro kombinace s opakováním, kdy vybíráme k prvků n druhů:

$$C_o(k, n) = \binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$$

Vzoreček pro kombinace s opakováním, v němž přehodíme značení pro druhy a počet prvků, a tedy vybíráme n prvků k druhů, totiž na první pohled vypadá dost podobně.

2.3 Další úlohy

Nyní si ukážeme několik zajímavých příkladů, u kterých vhodně využijeme výše uvedené vzorce a pravidla. Jsou převzaty z jiných učebnic, zejména z výborných skript Antonína Vrby ([3]).

Příklad 2.20 *Kolika způsoby lze přeskládat písmena slova LOKOMOTIVA tak, aby žádná dvě „O“ nestála vedle sebe?*

Řešení: *Nejprve určíme, kolika způsoby lze přeskládat písmena L, K, M, T, I, V, A. To lze provést 7! způsoby. Při libovolném z těchto rozložení máme posloupnost sedmi písmen. Abychom vyhověli podmínkám, můžeme O vložit před nebo za tuto posloupnost nebo do mezer mezi písmeny, přičemž na každé z těchto míst lze vložit nejvýše jedno O. Taková místa můžeme vybrat $\binom{8}{3}$ způsoby. Možností je tedy $7! \binom{8}{3}$.*

Příklad 2.21 Krotitel má do arény přivést 4 tygry a 5 lvů tak, aby žádní dva tygři nešli za sebou. Kolika způsoby to lze provést?

Řešení: Nejprve určíme počet seřazení tygrů a lvů bez ohledu na to, který tygr a který lev kde konkrétně bude. Symbolicky můžeme napsat, že hledáme permutace pěti L a čtyř T takových, že žádná dvě T nenásledují těsně za sebou; například LTLTLTLTL. Takových rozmístění je $\binom{6}{4}$ (mezi pěti L jsou čtyři mezery, jedno místo je před prvním L a jedno za posledním; podobně jako v předchozím příkladu vyberem z těchto šesti míst čtyři místa, na něž umístíme T). V dalším kroku pak „dáme lvům a tygrům jména“, což početně znamená, že například místo uvedené permutace bezejmenných tygrů LTLTLTLTL dostáváme $5! \cdot 4!$. Celkem je tedy možností $5! \binom{6}{4} \cdot 4!$

2.4 Binomická věta

Věta 2.22 Necht' a, b jsou proměnné, $n \in \mathbb{N}$. Platí následující vztahy:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

a analogicky

$$(a - b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} b^n$$

Příklad 2.23 Speciálními příklady binomické věty jsou známé vzorce:

$$(a + b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2$$

$$(a - b)^2 = \binom{2}{0} a^2 - \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2$$

$$(a + b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3$$

$$(a - b)^3 = \binom{3}{0} a^3 - \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 - \binom{3}{3} b^3$$

Se vzorci, které se opticky podobají binomické větě, se setkáte např. i v matematické analýze.

Binomické věty lze s výhodou užít například při těchto výpočtech:

$$(a) \quad 101^5 = (100 + 1)^5 = 100^5 + 5 \cdot 100^4 + 10 \cdot 100^3 + 10 \cdot 100^2 + 5 \cdot 100 + 1$$

$$(b) \quad 99^5 = (100 - 1)^5 = 100^5 - 5 \cdot 100^4 + 10 \cdot 100^3 - 10 \cdot 100^2 + 5 \cdot 100 - 1$$

V obou výše uvedených případech je výpočet jednodušší než přímo umocňovat 101 a 99.

Podobně lze umocňovat i komplexní čísla v algebraickém tvaru. Pro to, abychom mohli podobné příklady počítat, vystačíme se znalostí faktu, že každé komplexní číslo lze zapsat ve tvaru $a + bi$, přičemž platí $i^2 = -1$.³

³Pro ty, kteří se s komplexními čísly dosud nesetkali, doporučujeme např. knihu Emila Caldy *Komplexní čísla* z řady Matematika pro gymnázia nakladatelství Prometheus.

Cvičení a úkoly k zamyšlení: binomická věta

Cvičení 2.24 Dokažte binomickou větu metodou matematické indukce.

Cvičení 2.25 Dokažte binomickou větu metodou matematické indukce.

Cvičení 2.26 Určete, který sčítanec je v binomickém rozvoji $\sqrt{2} + \sqrt{3}^{50}$ největší.

$$\left[\binom{50}{22} \sqrt{2}^{22} \sqrt{3}^{28} \right]$$

2.5 Princip inkluze a exkluze.

V některých kombinatorických úlohách se výsledku dobereme tak, že nejprve vezmeme počet možností, který umíme dobře spočítat, i když víme, že tak zahrneme možností příliš mnoho; poté počet upravíme například odečtením nepříznivých případů nebo vydělením. Tyto postupy jsme už použili pro odvození vzorců pro kombinace (podělením příslušného počtu variací), pro permutace s opakováním (podělením celkového počtu permutací počty permutací opakujících se písmen), a tedy i pro odvození vzorce pro výpočet kombinací s opakováním. Ukažme si tuto strategii řešení na některých dalších příkladech.

Příklad 2.27 *úprava výsledku dělením - př. č. 1*

Příklad 2.28 *úprava výsledku dělením - př. č. 2*

Příklad 2.29 *úprava výsledku odečtením - př. č. 1*

Příklad 2.30 *úprava výsledku odečtením - př. č. 2*

Příklad 2.31 *úprava výsledku odečtením - př. č. 3*

Někdy nedokážeme určit výsledek pouze pomocí jediného odečtení a musíme opět nějaké možnosti přičíst.

Nejjednodušším použitím principu inkluze a exkluze je vztah pro určení počtu prvků sjednocení dvou konečných množin:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Pro odvození vztahu pro určení počtu prvků sjednocení tří množin můžeme použít například Vennovy diagramy (viz *Základy matematiky*). Snadno nahlédneme, že

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|;$$

pro čtyři množiny:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| = \\ |A| + |B| + |C| + |D| \\ - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \end{aligned}$$

$$+|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|;$$

pro pět množin:

$$\begin{aligned} & |A \cup B \cup C \cup D \cup E| = \\ & |A| + |B| + |C| + |D| + |E| \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |A \cap E| - |B \cap C| - |B \cap D| - |B \cap E| - |C \cap D| - |C \cap E| - |D \cap E| \\ & + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\ & - |A \cap B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap E| - |A \cap C \cap D \cap E| - |B \cap C \cap D \cap E| \\ & + |A \cap B \cap C \cap D \cap E| \end{aligned}$$

atd., a tedy pro n množin lze formulovat

Obecný princip inkluze a exkluze:

$$\begin{aligned} & |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n| = \\ & |M_1| + |M_2| + \dots + |M_n| \\ & - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - \dots - |M_1 \cap M_n| \\ & - |M_2 \cap M_3| - \dots - |M_2 \cap M_n| - |M_3 \cap M_4| - \dots - |M_{n-1} \cap M_n| \\ & + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + \dots + |M_{n-2} \cap M_{n-1} \cap M_n| \\ & - \dots + \dots + (-1)^n |M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n| \end{aligned}$$

Příklad 2.32 (Eratosthenovo síto) *Kolik je prvočísel mezi čísly od 1 do 100.*

Můžeme si představit, že budeme postupovat jako prý postupoval Eratosthenes ve starověkém Řecku: na voskové tabulce napíšeme čísla od 1 do 100 a horkou jehlou „propíchujeme“ místa označená násobky prvočísel, tj. násobky 2: 4, 6, 8, 10, ... atd., násobky 3: 6, 9, 12, ... atd., násobky 5: 10, 15, 20, 25, ... atd. a násobky 7: 14, 21, ... atd.

Snadno nahlédneme, že některá čísla vypichujeme vícekrát, například 6, 10, 15, 30, ... atd. toho níže využijeme. Dále využijeme skutečnosti, že při zkoumání toho, zda je dané číslo n prvočíslo, stačí vyzkoušet dělitelnost prvočísly do hodnoty \sqrt{n} (včetně). V našem případě hledáme prvočísla do 100, tedy stačí zkoumat dělitelnost prvočísly 2, 3, 5 a 7.

Víme, že 1 není prvočíslo, tedy můžeme počítat s 99 čísly. Nejprve od 99 odečteme počet všech násobků 2, 3, 5 a 7 s výjimkou těchto prvočísel:

$$99 - 49 - 32 - 19 - 13 = 50 - 51 - 13 = -14$$

Výsledkem je záporné číslo, neboť např. číslo 6 jsme odečetli dvakrát: jednou jako násobek dvou, jednou jako násobek tří. Všechna tato nedopatření se pokusíme napravit naráz tím, že přičteme zpět násobky 6, 10, 14, 15, 21 a 35:

$$99 - 49 - 32 - 19 - 13 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 = 31$$

Teď již nemáme varování v podobě záporného výsledku, ale snadno nahlédneme, že jsme například 30 přičetli třikrát: v prvním kroku jsme 30

tříkrát odečetli (jako násobek 2, 3 a 5) a nyní jsme je tříkrát přičetli (jako násobek 6, 10 a 15). Číslo 30 ale není prvočíslo, je tedy třeba je (a jemu podobná čísla, např. 70) odečíst. Dalším pokusem o nápravu je tedy odečtení násobků trojic prvočísel, tj. 30, 42, 70 a 105:

$$99 - 49 - 32 - 19 - 13 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 = 25$$

Naši snahu by mohlo zhatit číslo, které by bylo dělitelné všemi čtyřmi prvočísly; nejmenší takové číslo však je 210, a tedy bychom přičetli 0 (tolik je mezi čísly od 1 do 100 násobků 210).

(Jen pro úplnost: v prvním kroku bychom je 4x odečetli, následně 6x přičetli a nakonec 4x odečetli; v součtu bychom je tedy odečetli 2x, přičemž jsme je chtěli odečíst pouze 1x; to bychom napravili tím, že bychom je nyní ještě 1x přičetli; nic takového však dělat nemusíme, protože číslo 210 vůbec do hry nevstoupilo: počítali jsme stále pouze s čísly menšími nebo rovnými 100.)

Pro pořádek odpověď: mezi čísly 1 až 100 je 25 prvočísel.

Příklad 2.33 (jazyky) *V oddělení pracuje několik osob, z nichž každá zná alespoň jeden z těchto jazyků: ruština, španělština, italština. Rusky mluví 6 osob, španělsky 6 osob, italsky 7 osob, rusky a španělsky mluví 4 osoby, španělsky a italsky 3 osoby, rusky a italsky 2 osoby, všechny tři uvedené jazyky ovládá 1 osoba.*

- (a) *Kolik osob pracuje v oddělení?*
 (b) *Kolik z nich mluví rusky, avšak ne španělsky ani italsky?*
 (c) *Kolik z nich mluví španělsky, avšak ne rusky ani italsky?*

[(a) 11; (b) 1; (c) 3]

Definujeme-li jednotlivé množiny pomocí vlastností, pak množina M_1 obsahuje prvky s vlastností 1, množina M_n prvky s vlastností i , analogicky $M_i \cap M_j$ prvky s vlastnostmi i a současně j , atd. Pak lze např. odvodit, že prvků, které nemají žádnou z požadovaných vlastností (přičemž prvky, které nemají vlastnost i označíme M_1' a množinu obsahující všechny uvažované prvky označíme M), je

$$\begin{aligned} & |M_1' \cap M_2' \cap \dots \cap M_n'| = \\ & |M| - |M_1| - |M_2| - \dots - |M_n| \\ & + |M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + \dots + |M_1 \cap M_n| \\ & + |M_2 \cap M_3| + \dots + |M_2 \cap M_n| + |M_3 \cap M_4| + \dots + |M_{n-1} \cap M_n| \\ & - |M_1 \cap M_2 \cap M_3| - \dots - |M_{n-2} \cap M_{n-1} \cap M_n| \\ & + \dots - \dots + (-1)^n |M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n| \end{aligned}$$

příklady:

lednička, auto, chata

znalost jazyků

kroužky

2.6 Speciální princip inkluze a exkluze

Úlohy, jejichž výpočet vede na tzv. speciální princip inkluze a exkluze, lze formulovat jako „problém šatnářky“ nebo „problém roztržité sekretářky“. Naším úkolem je určit, v kolika případech nedostane žádný pán svůj klobouk nebo v kolika případech se nedostane žádný dopis ke svému adresátovi. Počet možností zde nezávisí na konkrétní osobě, ale pouze na počtu osob, které nedostanou svůj klobouk nebo dopis.

pro 4 osoby - 9 možností:

pro 5 osob - 44 možností:

Cvičení 2.34 Na třídní schůzce informoval učitel rodiče takto:

„Naše třída má 30 žáků. Mohou chodit do 4 zájmových kroužků, z nichž každý probíhá jednou týdně. Pondělní kroužek navštěvuje 29 žáků, úterní 13, středeční 18 a čtvrteční 11. Žádný žák nenavštěvuje více než dva kroužky a žádné dva kroužky nemají více než 5 společných žáků.“

Určete, zda učitel mluvil pravdu

[Ne. Návod: použijte princip inkluze a exkluze a selský rozum.]

Cvičení 2.35 Kolika způsoby lze na šachovnici $n \times n$ rozestavit n věží tak, aby každé neobsazené pole šachovnice bylo ohrožováno nějakou věží?

$[2n^n - n!]$ Návod: zkuste pro šachovnice o rozměrech $2 \times 2, 3 \times 3$, atd.]

Cvičení 2.36 Máme pět obálek s adresami (pro 5 různých lidí) a pět dopisů. Kolika způsoby můžeme vložit dopisy do obálek tak, aby ani jeden dopis nebyl ve správné obálce?

[44]

2.7 Kompozice a rozklady.

Další kombinatorické kategorie. Kromě variací, permutací a kombinací známe další typické kombinatorické kategorie. Z nich si nyní představíme dva typy, a to počítání, kolika způsoby lze přirozené číslo zapsat ve tvaru sčítanců–přirozených čísel, a dále počítání, kolika způsoby můžeme věci (rozlišitelné nebo nerozlišitelné) rozdělit do přihrádek (rozlišitelných nebo nerozlišitelných)-

Úmluva: Pro účely tohoto textu rozumíme přirozenými čísly (a značíme \mathbb{N}) čísla $1, 2, 3, \dots$; jinými slovy, nulu za přirozené číslo nepovažujeme

S rozklady (přirozeného) čísla na (přirozené) sčítance se setkávají děti již v 1. třídě, kdy si ujasňují, že např. $5 = 4 + 1 = 2 + 3$. Pokud bychom vyjádření čísla 5 jako $1 + 4$ a jako $4 + 1$ považovali za navzájem různá, mluvili bychom z kombinatorického hlediska o *kompozicích* (čísla 5 ze dvou sčítanců); pokud by pro nás tato vyjádření byla totožná, jednalo by se z kombinatorického hlediska o *rozklady*. V dalším textu budeme o kompozicích a rozkladech mluvit ve smyslu níže uvedených definic. Ty nám říkají, že zatímco u rozkladů nezáleží na pořadí sčítanců, zatímco u kompozic ano. Rozdíl v počtu

kompozic a rozkladů si můžeme ukázat na počtu rozkladů a kompozic čísla 4:

Rozkladů čísla 4 je 5:

$$4 = 4 = 2 + 2 = 3 + 1 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Kompozic čísla 4 je 8:

$$\begin{aligned} 4 &= 4 = 2 + 2 = 3 + 1 = 1 + 3 = \\ &= 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

Definice 2.37 (Kompozice) Kompozicí přirozeného čísla n z k sčítanců rozumíme každou uspořádanou k -tici přirozených čísel, pro niž platí následující vztah:

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

Na základě předchozí definice formulujeme kombinatorickou úlohu: kolik je možných kompozic čísla n z k sčítanců?

Definice 2.38 (Rozklad) Rozkladem přirozeného čísla n na k sčítanců rozumíme každou nespořádanou k -tici přirozených čísel, pro niž platí následující vztah:

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

Analogicky jako u předchozího příkladu můžeme formulovat kombinatorickou úlohu: kolik je rozkladů čísla n na k sčítanců? Navíc se můžeme ptát, kolik je všech rozkladů — bez ohledu a počet sčítanců. Je zřejmé, že sčítanců může být nejméně 1 a nejvýše n .

Uveďme jako příklad všechny rozklady čísla 10 na dva sčítance:

$$10 = 5 + 5$$

$$10 = 4 + 6$$

$$10 = 3 + 7$$

$$10 = 2 + 8$$

$$10 = 1 + 9$$

Zajímavosti k rozkladům a kompozicím

Ferrersovy diagramy

Adjungovaný rozklad

Samoadjungovaný rozklad

Uspořádání rozkladů

Znázornění uspořádání rozkladů pomocí hasseovského diagramu

Cvičení 2.39 Vypište všechny kompozice čísla 10 ze čtyř sčítanců.

Cvičení 2.40 Vypište všechny kompozice čísla 10 z nejvíce 4 sčítanců.

Cvičení 2.41 Vypište všechny rozklady čísla 12 na 5 sčítanců.

Cvičení 2.42 Vypočtete počty kompozic a rozkladů uvedených v přechodících příkladech pomocí vzorce pro výpočet počtu kompozic a rekurentního vzorce pro výpočet počtu rozkladů.

Cvičení 2.43 Vypište všechny rozklady čísla 12 na 3 sčítance takové, že každý ze sčítanců je roven nejvýše 6.

2.8 Rozdělování do přihrádek.

Část kombinatorických úloh se dá vhodně přeformulovat jako tzv. rozdělování předmětů (věcí) do přihrádek. Toto převedení si částečně ukážeme při odvozování příslušných vztahů; ty lze brátch prostě jako další nástroje k uchopení kombinatorické problematiky. U jednotlivých případů tedy budeme ptát, zda jsou přihrádky rozlišitelné (např. různě barevné krabice) nebo nerozlišitelné (např. stejné krabice) a zda jsou předměty rozlišitelné (např. různé knihy) nebo nerozlišitelné (stejně knihy). Na základě toho dostáváme čtyři situace, které si popíšeme níže. Ještě předtím si stručně připomeneme jednoduchý, ale účinný

Dirichletův (přihrádkový) princip: Při každém rozdělení n předmětů do k přihrádek, kde $k < n$, existuje alespoň jedna přihrádka obsahující alespoň dva předměty.

Příklad: Dokažte, že vyberem-li v obdélníku $6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ libovolných 25 bodů, budou mezi nimi nejméně dva, jejichž vzdálenost je menší než 1,5 cm.

Návod: Uvažujme body, jejichž souřadnice jsou celočíselné,

Příklad: Dokažte, že mezi sedmi různými přirozenými čísly jsou alespoň dvě taková, jejichž součet nebo rozdíl je dělitelný 10.

Návod: Rozdělte čísla do tříd podle dělitelnosti 10.

Rozdělování rozlišitelných předmětů do rozlišitelných přihrádek
Nechť n, k jsou libovolná přirozená čísla. Pak lze n rozlišitelných předmětů rozdělit do k rozlišitelných přihrádek rozdělit právě k^n způsoby.

Rozdělování rozlišitelných předmětů do rozlišitelných přihrádek, přičemž žádná přihrádka nezůstane prázdná
Nechť n, k jsou libovolná přirozená čísla, $n \geq k$. Pak lze n rozlišitelných předmětů do k rozlišitelných přihrádek tak, aby žádná přihrádka nezůstala prázdná, rozmístit právě

$$k!S(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

způsoby.

Rozdělování nerozlišitelných předmětů do rozlišitelných přihrádek
Nechť n, k jsou libovolná přirozená čísla, $n \geq k$. Pak lze n nerozlišitelných předmětů do k rozlišitelných přihrádek rozdělit právě

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

způsoby.

Rozdělování nerozlišitelných předmětů do nerozlišitelných přihrádek, přičemž žádná přihrádka nezůstane prázdná Nechtě n, k jsou libovolná přirozená čísla,. Pak lze n nerozlišitelných předmětů do k rozlišitelných přihrádek tak, aby v každé přihrádce bylo aspoň r předmětů, rozdělit právě

$$\binom{n - kr + k - 1}{k - 1}$$

způsoby; pro $r = 1$ je tento počet zřejmě

$$\binom{n - 1}{k - 1}.$$

Rozdělování rozlišitelných předmětů do nerozlišitelných přihrádek Nechtě n, k jsou libovolná přirozená čísla,. Pak lze n rozlišitelných předmětů do k nerozlišitelných přihrádek rozdělit právě

$$S(n, 1) + S(n, 2) + \dots + S(n, k)$$

způsoby. ($S(n, k)$ jsou tzv. Stirlingova čísla.)

Rozdělování nerozlišitelných předmětů do nerozlišitelných přihrádek Nechtě n, k jsou libovolná přirozená čísla,. Pak lze n nerozlišitelných předmětů do k nerozlišitelných přihrádek rozdělit právě

$$p(n, 1) + p(n, 2) + \dots + p(n, k)$$

způsoby; chceme-li, aby všechny přihrádky byly neprázdné, je tento počet

$$p(n, k).$$

2.9 Závěrem ke kombinatorice.

Dosud představené kombinatorické úlohy jsou samozřejmě pouhou „ochutnávkou“. Vůbec jsme se nedotkli problematiky magických či latinských čtverců, neformulovali jsme Kirkmanův problém 15 dívek, nedefinovali jsme Bellova či Stirlingova čísla. To je obsahem pokročilejších kurzů diskrétní matematiky. Zde probíraná látka představuje — kromě procvičení logického uvažování atp. — přípravu pro teorii pravděpodobnosti.

Kapitola 3

Rekurentní vztahy. Konečné součty.

Některé příklady nedokážeme vyřešit pomocí pravidla součtu a součinu – nedokážeme určit vzorec, do něhož bychom dosadili, a místo toho určujeme počet řešení na základě znalosti počtu řešení pro menší hodnoty parametru nebo parametrů. S tímto postupem jsme se již seznámili při určování počtu rozkladů čísel na sčítance. Ukážeme si ho také na následujícím příkladě:

Příklad 3.1 *Kolika způsoby lze vyjít 10 schodů, děláme-li kroky po 1, 2, nebo 3 schodech?*

Řešení: Poslední krok můžeme udělat ze 7., 8. nebo 9. schodu; tj.

$$S_{10} = S_9 + S_8 + S_7.$$

Obecně můžeme psát:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}.$$

Lehce ověříme, že

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 4,$$

a podle vzorce tedy dopočítáme

$$S_4 = 7 (= 1 + 2 + 4)$$

a analogicky

$$S_5 = 13, S_6 = 24, S_7 = 44, S_8 = 81, S_9 = 149,$$

a tedy

$$S_{10} = S_9 + S_8 + S_7 = 149 + 81 + 44 = 274.$$

S rekurentní vztahy jste se mohli setkat na střední škole při studiu aritmetických a geometrických posloupností. Shrňme si, co o těchto posloupnostech víme.

Aritmetická posloupnost. Posloupnost daná rekurentním vztahem $a_n = a_{n-1} + d$ (a prvním členem), kde d nazýváme diferencí. U této posloupnosti umíme sečíst prvních n členů; vzorec:

$$S_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

Traduje se, že jednu z variant této úlohy vyřešil Karl Friedrich Gauss (1777–1855), když jako školák dostal za úkol sečíst čísla od 1 do 50 (někdy se tvrdí, že od 1 do 100). Všiml si, že součet 1 a 50 je stejný jako součet 2 a 49 a tak dále, tedy dvojnásobek hledaného součtu je $51 \cdot 50$.

Příklad 3.2 *Určete součet:*

$$S = 2n - 4 + 2n - 2 + 2n + \dots + 4n.$$

Řešení: Jedná se o aritmetickou posloupnost s diferencí 2; její první člen je v našem částečném součtu $2n - 4$, poslední $4n$, diference 2. Abychom mohli použít výše uvedený vzorec, potřebujeme znát počet sčítanců, který však není n . Pro určení tohoto počtu můžeme použít úvahu: n sčítanců by bylo v součtu

$$S_n = (2n - 4) + (2n - 2) + (2n) + \dots + (4n - 6),$$

čili scházejí tři sčítance, neboť

$$S - S_n = (4n - 4) + (4n - 2) + (4n)$$

Dosazením do výše uvedeného vzorce získáváme

$$S = (2n - 4 + 4n) \frac{n+3}{2} = (n-1)(n+3).$$

Rozmyslete si, že výsledkem zlomku bude pro posloupnost s celočíselnými členy vždy celé číslo.

Geometrická posloupnost. Posloupnost daná rekurentním vztahem $a_n = a_{n-1}q$ (a prvním členem), kde q nazýváme kvocientem. U této posloupnosti umíme sečíst prvních n členů; vzorec:

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

Je tedy vidět, že posloupnost je určena svým prvním členem a rekurentním vztahem.

Obecně platí, že každá rekurentní posloupnost je určena rekurentním vztahem a prvními několika členy — tolika, kolik jich explicitně nebo implicitně vystupuje v rekurentním vztahu.

Fibonacciho posloupnost patří mezi zajímavé posloupnosti. Platí v ní, že každý další člen lze určit jako součet dvou členů předchozích. Zpr: $f_1 = 1, f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$; první členy: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Z rekurentního vztahu umíme v některých případech určit i tzv. vzorec pro n -tý člen, tj. návod, jak vypočítat f_n jen pomocí n .