MA0002 — řešení DÚ č. 2

Cvičení 2.1 *Vypočtěte:*

(a) $8!$

(b) $\binom{42}{4}$

(c) $\binom{65}{61}$

Řešení:

Dosazením získáváme (a) 40 320; (b) 111 930; (c) 677 040.

Cvičení 2.2 *Ve třídě je 13 chlapců a 15 dívek. Kolika způsoby z nich lze vytvořit šestičlenné družstvo takové, aby v něm bylo alespoň tolik dívek, jako chlapců?*

Řešení:

Má-li být v družstvu alespoň tolik dívek, kolik chlapců, máme čtyři možnosti skladby s ohledem na pohlaví – 3 dívky a 3 chlapci, 4 dívky a 2 chlapci, 5 dívek a 1 chlapec, nebo 6 dívek. Pro každou z těchto možností vypočítáme počet možných voleb, výsledné počty poté sečteme.

V prvním případě vybíráme trojici z 15 dívek a nezávisle na tomto výběru trojici ze 13 chlapců, možností výběru je $\binom{15}{3} \cdot \binom{13}{3}$. Stejným způsobem určíme počet možných družstev i pro zbylé případy a jednotlivé počty sečteme.
$\binom{15}{3} \cdot \binom{13}{3} + \binom{15}{4} \cdot \binom{13}{2} + \binom{15}{5} \cdot \binom{13}{1} + \binom{15}{6} = 280\,644$

Družstvo lze vytvořit 280 644 způsoby.

Cvičení 2.3 *Kolika způsoby lze na šachovnici rozestavit 8 věží tak, aby se navzájem neohrožovaly?*

Řešení:

Dle pravidel šachů věž ohrožuje figurky stojící ve stejném sloupci nebo řádku. Vždy, když vybereme políčko pro jednu věž, „zakážeme“ všechna políčka v tomtéž řádku i sloupci. Po umístění sedmé věže nám zůstane pouze jedno volné „nezakázané“ políčko pro poslední věž. Každé další možné umístění 8 věží je některou permutací řádků (nebo sloupců) šachovnice, kterých existuje $8! = 40\,320$.

Věže můžeme umístit 40 320 způsoby.

Cvičení 2.4 *Kolika způsoby lze 26 znakům přiřadit 26 různých zvuků? Uveďte odhad.*

Řešení:

Zafixujme si pořadí zvuků a k nim hledejme různá pořadí znaků. Jejich počet je $26! \doteq 4,03 \cdot 10^{26}$.

Znaky lze ke zvukům přiřadit přibližně $4,03 \cdot 10^{26}$ způsoby.

Cvičení 2.5 *Kolika způsoby lze 26 znakům přiřadit 26 různých zvuků, víme-li, kterých 6 znaků patří samohláskám? Uveďte odhad.*

(a) Víme konkrétně který znak patří které samohlásce.

(b) Víme, kterých 6 znaků patří samohláskám, nevíme však, který znak patří které samohlásce.

Řešení:

(a) Znaky patřící samohláskám jsou dané, zbývá nám pouze spočítat počet přiřazení znaků souhláskám. Zafixujme si pořadí 20 souhlásek a hledejme k nim různá pořadí znaků patřícím souhláskám.
$20! \doteq 2,43 \cdot 10^{18}$

Znaky lze ke zvukům přiřadit přibližně $2,43 \cdot 10^{18}$ způsoby.

(b) Zafixujme si pořadí 6 samohlásek a k nim hledejme různá pořadí znaků patřících samohláskám (různých pořadí je 6!). Stejně tak určeme nezávisle na pořadí samohlásek počet přiřazení zbylých 20 znaků a zvuků.
$6! \cdot 20! \doteq 1,75 \cdot 10^{21}$

Znaky lze ke zvukům přiřadit přibližně $1,75 \cdot 10^{21}$ způsoby.

Cvičení 2.6 *Kolika způsoby lze 26 znakům přiřadit 26 různých zvuků, známe-li znaky pro 4 z 6 samohlásek (víme, který znak patří které samohlásce) a pro 13 z 20 souhlásek (víme, který znak patří které souhlásce)?*

Řešení:

Zbývá nám přiřadit znaky k 7 souhláskám a 2 samohláskám, dohromady k 9 zvukům, to uděláme podobně jako v předchozích cvičeních.
$9! = 362\,880$

Znaky lze ke zvukům přiřadit 362 880 způsoby.

Cvičení 2.7 *Sedm dívek tančí v kruhu. Kolika různými způsoby mohou být v kruhu seřazeny?*

Řešení:

Nejdříve určíme počet různých pořadí dívek v řadě, těch je 7!. Rozdíl mezi řadou a kruhem je takový, že u kruhu nelze určit začátek – každou ze 7! řad máme tedy v počtu kruhů započítanou sedmkrát. Proto získáváme $7! : 7 = 720$ různých pořadí v kruhu.

Dívky mohou být seřazeny 720 způsoby.

Cvičení 2.8 *Kolik různých náhrdelníků je možno sestavit ze 7 různých korálků?*

Řešení:

Úloha je velmi podobná předchozí úloze, jediným rozdílem je, že náhrdelník můžeme i přetočit (to u dívek nebylo možné, tančily by hlavou dolů). Dva různé náhrdelníky lišící se pouze o přetočení považujeme za jeden, proto různých náhrdelníků bude poloviční počet kruhů dívek z předchozího příkladu.
$\frac{7!}{7 \cdot 2} = 360$

Lze sestavit 360 různých náhrdelníků.

Cvičení 2.9 *Porovnejte:* $152! + 151!$ *a* $150! + 153!$

Řešení:

$$\begin{array}{rcl} 152! + 151! & & 150! + 153! \\ 150!(152 \cdot 151 + 151) & & 150!(1 + 153 \cdot 152 \cdot 151) \\ 150! \cdot 23\,104 & < & 150! \cdot 3\,511\,657 \end{array}$$

Cvičení 2.10 *Seřaďte dle velikosti následující kombinační čísla:*

(a) $\binom{152}{17}$

(b) $\binom{153}{17}$

(c) $\binom{152}{135}$

Řešení:

(a) $\binom{152}{17}$

(b) $\binom{153}{17} = \binom{152}{17} + \binom{152}{16}$

(c) $\binom{152}{135} = \binom{152}{152-135} = \binom{152}{17}$

$\binom{152}{17} = \binom{152}{135} < \binom{153}{17}$

Cvičení 2.11 *Vypočtěte:* $\binom{45}{3}$

Řešení:

$\binom{45}{3} = \frac{45!}{3! \cdot 42!} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43}{3 \cdot 2} = 15 \cdot 22 \cdot 43 = 14\,190$

Cvičení 2.12 *Vypočtěte:* $\binom{72}{68}$

Řešení:

$\binom{72}{68} = \frac{72!}{68! \cdot 4!} = \frac{72 \cdot 71 \cdot 70 \cdot 69}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 71 \cdot 70 \cdot 69 = 1\,028\,790$

Cvičení 2.13 *Sečtěte:* $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3}$

Řešení:

$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} + \frac{4!}{3! \cdot 1!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!} + \frac{6!}{3! \cdot 3!} + \frac{7!}{3! \cdot 4!} =$
$= \frac{1}{1} + \frac{4}{1} + \frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 = 70$

Cvičení 2.14 *Sečtěte:* $\binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5}$

Řešení:

$\binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} + \frac{6!}{5! \cdot 1!} + \frac{7!}{5! \cdot 2!} + \frac{8!}{5! \cdot 3!} + \frac{9!}{5! \cdot 4!} =$
$= \frac{1}{1} + \frac{6}{1} + \frac{7 \cdot 6}{2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1 + 6 + 21 + 56 + 126 = 210$

Cvičení 2.15 *Vyjádřete jedním kombinačním číslem a vyčíslete:*

(a) $\binom{9}{4} + \binom{9}{6}$

(b) $\binom{11}{2} + \binom{11}{8}$

(c) $\binom{12}{5} + \binom{12}{6}$

Řešení:

(a) $\binom{9}{4} + \binom{9}{6} = \binom{9}{5} + \binom{9}{6} = \binom{10}{6} = 210$

(b) $\binom{11}{2} + \binom{11}{8} = \binom{11}{2} + \binom{11}{3} = \binom{12}{3} = 220$

(c) $\binom{12}{5} + \binom{12}{6} = \binom{13}{6} = 1\,716$

Cvičení 2.16 *Vypočtěte:* $8!$, $\binom{42}{4}$, $\binom{65}{61}$

Řešení:

$8! = 40\,320$
$\binom{42}{4} = \frac{42!}{4!\cdot 38!} = \frac{42\cdot 41\cdot 40\cdot 39}{4\cdot 3\cdot 2} = 7\cdot 41\cdot 10\cdot 39 = 111\,930$
$\binom{65}{61} = \frac{65!}{61!\cdot 4!} = \frac{65\cdot 64\cdot 63\cdot 62}{4\cdot 3\cdot 2} = 65\cdot 8\cdot 21\cdot 62 = 677\,040$

Cvičení 2.17 *Zjednodušte:* $\frac{(n+2)!}{(n)!} - \frac{n!(n^2+3n+2)}{(n+1)!} - \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

Řešení:
$\frac{(n+2)!}{(n)!} - \frac{n!(n^2+3n+2)}{(n+1)!} - \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = (n+2)\,(n+1) - \frac{(n+1)(n+2)}{n+1} - (n+1)n =$
$= n^2 + 3n + 2 - (n+2) - (n^2+n) = n$

Cvičení 2.18 *Dokažte:* $n! + (n-1)!n^2 = (n+1)!$

Řešení:

Upravujme postupně levou stranu
$n! + (n-1)!n^2 = n! + n!n = n!(1+n) = (n+1)!$

Cvičení 2.19 *Sečtěte:* $\frac{(n+2)!}{n!} - 2\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}$

Řešení:
$\frac{(n+2)!}{n!} - 2\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = (n+2)(n+1) - 2(n+1)n + n(n-1) =$
$= n^2 + 3n + 2 - 2n^2 - 2n + n^2 - n = 2$

Cvičení 2.20 *Najděte všechna* $n \in \mathbb{N}$*, pro něž platí:*

$$\binom{n-1}{n-3} + \binom{n-2}{n-4} = 4$$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
\binom{n-1}{n-3} + \binom{n-2}{n-4} &= 4 \\
\frac{(n-1)!}{(n-3)! \cdot 2!} + \frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!} &= 4 \\
\frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} &= 4 \\
(n-1)(n-2) + (n-2)(n-3) &= 8 \\
n^2 - 3n + 2 + n^2 - 5n + 6 &= 8 \\
2n^2 - 8n &= 0 \\
2n(n-4) &= 0
\end{aligned}
$$

V kombinačním čísle se nesmí vyskytovat záporná čísla, proto nemá rovnice pro $n = 0$ smysl a jediným řešením je $n = 4$.

Cvičení 2.21 *Zjednodušte:* $\frac{(p+1)!}{(p-1)!} - \frac{(p+5)!}{(p+4)!} - \frac{(p-5)!}{(p-7)!}$

Řešení:

$\frac{(p+1)!}{(p-1)!} - \frac{(p+5)!}{(p+4)!} - \frac{(p-5)!}{(p-7)!} = (p+1)p - (p+5) - (p-5)(p-6) =$

$= p^2 + p - p - 5 - p^2 + 11p - 30 = 11p - 35$