MA0002 — řešení DÚ č. 5

Cvičení 5.1 *Na večírku se sešlo několik přátel. Každý si při přípitku připil s každým a ozvalo se 28 cinknutí. Kolik přátel se sešlo na večírku?*

Řešení:

Jestliže si každý připil s každým, lze z daného počtu hostů vytvořit 28 dvoučlenných kombinací.

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} &= 28 \\ \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} &= 28 \\ n(n-1) &= 56 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

NA VEČÍRKU SE SEŠLO 8 PŘÁTEL.

Cvičení 5.2 *Kolik různých čísel dělitelných třemi menších než* 10 000 *lze sestavit z číslic* $0, 2, 3, 4, 6$ *takových, že se v nich číslice neopakují?*

Řešení:

Přeformulujme si zadané podmínky: má-li být číslo dělitelné třemi, musí být jeho ciferný součet dělitelný třemi. Je-li číslo menší než 10 000, musí být nejvýše čtyřciferné. Sestavujme postupně jednociferná až čtyřciferná čísla vyhovující podmínkám a určujme jejich počet.

Jednociferná čísla jsou zřejmě 2.

Dvouciferná čísla musí mít ciferný součet buď tři (tomu vyhovuje jediné číslo 30), šest (čísla 24, 42 a 60), nebo devět (čísla 36, 63). Dohromady existuje vyhovujících dvouciferných čísel 6.

Trojciferná čísla nedokážeme sestavit tak, aby měla ciferný součet tři. Uvažujme tedy ciferný součet šest (čísla vytvořená z cifer 0, 2, 4, která existují 4), devět (čísla vytvořená z cifer 0, 3, 6, která existují 4, nebo z cifer 2, 3, 4, těch je 6) a dvanáct (čísla vytvořená z cifer 2, 4, 6, je jich 6). Dohromady jsme nalezli 20 tříciferných vyhovujících čísel.

Čtyřciferná čísla mohou mít ciferný součet devět (čísla z cifer 0, 2, 3, 4, kterých je 18), dvanáct (čísla z cifer 0, 2, 4, 6, kterých je také 18) a patnáct (čísla z cifer 2, 3, 4, 6, těch existuje 24). Čtyřciferných vyhovujících čísel jsme nalezli 60.

Celkový počet získáme jako součet dílčích počtů, tedy $2 + 6 + 20 + 60 = 88$.

LZE SESTAVIT 88 ČÍSEL VYHOVUJÍCÍCH PODMÍNKÁM.

Cvičení 5.3 *Vymyslete slovní úlohu tak, aby výsledek byl*

(a) $\frac{12!}{3!2!2!2!}$

(b) $\frac{12!}{9!}$

Řešení:

(a) Určete počet všech permutací písmen slova POPOCATEPETL.

(b) Kolika způsoby si mohu v restauraci vybrat obědy na pondělí, úterý a středu, je-li v nabídce 12 různých jídel a chci-li jíst každý den něco jiného?

Cvičení 5.4 *Kolika způsoby můžeme mezi tři děti rozdělit 9 stejných jablek? Kolika způsoby můžeme těchto 9 jablek rozdělit mezi tři děti spravedlivě?*

Řešení:

Jelikož není řečeno jinak, jablka jsou všechna stejná a nelze je od sebe rozlišit. Druhá otázka je triviální, zřejmě existuje jediné takové rozdělení – každému dítěti dáme tři jablka. Pro zodpovězení první otázky přiřazujeme jablka do tří přihrádek (mezi nimiž jsou dvě nerozlišitelné přepážky) symbolizujících jednotlivé děti.
$\frac{11!}{9!\cdot 2!} = 55$

Jablka můžeme rozdělit 55 způsoby, spravedlivě 1 způsobem.

Cvičení 5.5 *Kolika způsoby lze mezi tři děti rozdělit 15 stejných jablek a 9 stejných hrušek? Kolika způsoby to lze provést spravedlivě?*

Řešení:

Úloha je velmi podobná předchozímu cvičení, ovoce stejného druhu je opět nerozlišitelné a spravedlivé rozdělení existuje pouze jedno (každému dítěti 5 jablek a 3 hrušky). Rozdělování hrušek a jablek děláme nezávisle na sobě, u každého druhu ovoce přitom zopakujeme úvahu z předchozího cvičení.
$\frac{17!}{15!\cdot 2!} \cdot \frac{11!}{9!\cdot 2!} = 7\,480$

Ovoce můžeme rozdělit 7 480 způsoby, spravedlivě 1 způsobem.

Cvičení 5.6 *Kolika způsoby můžeme mezi čtyři studenty rozdělit 7 různých matematických sbírek?*

Řešení:

U každé sbírky máme 4 možnosti darování. Darování jednotlivých sbírek je na sobě nezávislé, proto stačí použít pravidlo součinu.

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^7 = 16\,384$

Sbírky můžeme rozdělit 16 384 způsoby.

Cvičení 5.7 *Kolika způsoby může dát 5 chlapců 6 dívkám valentýnky, jestliže se chlapci mezi sebou nedomlouvali a každý z nich dá valentýnku právě jedné dívce?*

Řešení:

Podobně jako v předchozí úloze se každý z chlapců nezávisle na ostatních rozhoduje pro jednu z 6 dívek, užijeme opět pravidlo součinu.

$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7\,776$

Valentýnky mohou rozdat 7 776 způsoby.

Cvičení 5.8 *Kolika způsoby lze ze třídy, v níž je 10 hochů a 20 dívek, vybrat trojici tak, aby v ní byl alespoň jeden hoch?*

Řešení:

V trojici může být jeden hoch a dvě dívky ($\binom{10}{1} \cdot \binom{20}{2}$), dva hoši a jedna dívka ($\binom{10}{2} \cdot \binom{20}{1}$), nebo mohou být všichni tři hoši ($\binom{10}{3}$).

$\binom{10}{1} \cdot \binom{20}{2} + \binom{10}{2} \cdot \binom{20}{1} + \binom{10}{3} = 2\,920$

Trojici lze vybrat 2 920 způsoby.

Cvičení 5.9 *Kolika způsoby můžeme obarvit pěti barvami dvanáct stejných kuliček?*

Řešení:

Kuličky vkládáme do pěti přihrádek různých barev, permutujeme tedy 12 nerozlišitelných kuliček a 4 nerozlišitelné oddělovače přihrádek.

$\frac{16!}{12! \cdot 4!} = 1\,820$

Kuličky lze obarvit 1 820 způsoby.

Cvičení 5.10 *Vyřešte v oboru $\mathbb{Z}$ rovnice:*

(a) $2\frac{(x-1)!}{(x-2)!} + \frac{(x-2)!}{(x-4)!} = 6x - 16$

(b) $\frac{(x+1)!}{(x-1)!} - \frac{(x+4)!}{(x+3)!} = 0$

(c) $2\frac{(x-3)!}{(x-5)!} - \frac{(x-2)!}{(x-4)!} = 0$

(d) $2\frac{(x+2)!}{(x-1)!} - \frac{(x+1)!}{(x-2)!} = 0$

Řešení:

(a)

$$\begin{aligned}
2\frac{(x-1)!}{(x-2)!} + \frac{(x-2)!}{(x-4)!} &= 6x - 16 \\
2(x-1) + (x-2)(x-3) &= 6x - 16 \\
2x - 2 + x^2 - 5x + 6 &= 6x - 16 \\
x^2 - 9x + 20 &= 0 \\
(x-4)(x-5) &= 0
\end{aligned}$$

Kořeny dané rovnice jsou čísla 4 a 5. Ze zadání plyne podmínka $x \geq 4$, obě čísla jsou tedy řešením.

(b)

$$\begin{aligned}\frac{(x+1)!}{(x-1)!}-\frac{(x+4)!}{(x+3)!} &= 0\\ (x+1)x-(x+4) &= 0\\ x^2+x-x-4 &= 0\\ (x-2)(x+2) &= 0\end{aligned}$$

Kořeny dané rovnice jsou čísla -2 a 2. Ze zadání však plyne podmínka $x \geq 1$, řešením je tedy pouze číslo 2.

(c)

$$\begin{aligned}2\frac{(x-3)!}{(x-5)!}-\frac{(x-2)!}{(x-4)!} &= 0\\ 2(x-3)(x-4)-(x-2)(x-3) &= 0\\ 2x^2-14x+24-x^2+5x-6 &= 0\\ x^2-9x+18 &= 0\\ (x-3)(x-6) &= 0\end{aligned}$$

Kořeny dané rovnice jsou čísla 3 a 6. Ze zadání však plyne podmínka $x \geq 5$, řešením je tedy pouze číslo 6.

(d)

$$\begin{aligned}2\frac{(x+2)!}{(x-1)!}-\frac{(x+1)!}{(x-2)!} &= 0\\ 2(x+2)(x+1)x-(x+1)x(x-1) &= 0\\ (x+1)x(2x+4-x+1) &= 0\\ (x+1)x(x+5) &= 0\end{aligned}$$

Kořeny dané rovnice jsou čísla -5, -1 a 0. Ze zadání však plyne podmínka $x \geq 2$, úloha tak nemá žádné řešení.

Cvičení 5.11 *Kolika způsoby můžeme nalepit na dopis známky za 18 Kč, máme-li k dispozici známky za 2, 4 a 10 Kč (v libovolném potřebném množství)? Vypište všechny možnosti.*

Řešení:

Úlohu vyřešíme vypsáním všech možností do tabulky.

2 Kč	9	7	5	4	3	2	1	
4 Kč		1	2		3	1	4	2
10 Kč				1		1		1

Známky můžeme nalepit 8 způsoby.

Cvičení 5.12 *Na kolik oblastí rozdělí rovinu n přímek v obecné poloze (tzn. žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v témže bodě)?*

Řešení:

Promysleme si počty oblastí pro několik prvních n a následně odvoďme rekurentní vztah pro počet oblastí v závislosti na počtu přímek. Označme si o_n počet oblastí pro n přímek v obecné poloze.

$$
\begin{aligned}
n = 1 &\quad \dots \quad o_1 = 2 \\
n = 2 &\quad \dots \quad o_2 = 4 \\
n = 3 &\quad \dots \quad o_3 = 7 \\
n = 4 &\quad \dots \quad o_4 = 11 \\
n = 5 &\quad \dots \quad o_5 = 16
\end{aligned}
$$

Je vidět, že přidáním každé další přímky se počet oblastí zvýší o aktuální počet přímek, proto platí následující vztah:

$$o_n = o_{n-1} + n$$

ROVINA BUDE ROZDĚLENA NA $o_n = o_{n-1} + n$ OBLASTÍ.

Cvičení 5.13 *Dokažte (např. matematickou indukcí):*

(a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

(b) $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n^2 + n$

(c) $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2 - 1$

(d) $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = n^2 + 2n$

(e) $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = 3n^2 - n$

Řešení:

V prvním kroku vždy ověříme platnost pro $n = 1$, poté budeme předpokládat platnost pro $n - 1$ a z předpokladu dokážeme platnost pro n.

(a)
1. Dosadíme postupně do levé a pravé strany $n = 1$:
   $L = 1; P = 1; L = P$
2. Předpokládejme platnost pro $n - 1$ a dokažme pro n:
   $1+3+\cdots+(2n-3)+(2n-1) = 1+3+\cdots+(2(n-1)-1)+(2n-1) =$
   $= (n-1)^2 + (2n-1) = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2$

(b)
1. Dosadíme postupně do levé a pravé strany $n = 1$:
   $L = 2; P = 2; L = P$
2. Předpokládejme platnost pro $n - 1$ a dokažme pro n:
   $2 + 4 + \cdots + (2n-2) + 2n = 2 + 4 + \cdots + 2(n-1) + 2n =$
   $= (n-1)^2 + (n-1) + 2n = n^2 - 2n + 1 + n - 1 + 2n = n^2 + n$

(c) Jedná se o jinak zapsanou variantu (a), důkaz již byl proveden.

(d) 1. Dosadíme postupně do levé a pravé strany $n = 1$:
$L = 3; P = 1 + 2 = 3; L = P$

2. Předpokládejme platnost pro $n - 1$ a dokažme pro n:
$3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1) = 3+5+\cdots+(2(n-1)+1)+(2n+1) =$
$= (n-1)^2+2(n-1)+(2n+1) = n^2-2n+1+2n-2+2n+1 = n^2+2n$

(e) 1. Dosadíme postupně do levé a pravé strany $n = 1$:
$L = 1; P = 3 - 1 = 2; L \neq P$

Je vidět, že rovnost neplatí ani pro $n = 1$, dál nemusíme dokazovat.

Cvičení 5.14 *Sečtěte:*

(a) $S = n + (n + 3) + (n + 6) + \cdots + 4n$

(b) $S = (-31) + (-27) + (-23) + \cdots + 29 + 33$

(c) $S = n + (n + 2) + (n + 4) + \cdots + 3n$

(d) $S = (-8) + (-5) + (-2) + 1 + 4 + \cdots + (3n + 1)$

(e) $S = (-5) + (-3) + (-1) + 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 5) + (2n + 7)$

Řešení:

Ve všech variantách se jedná o aritmetické posloupnosti. Pomocí diference a prvního členu určíme počet členů dané posloupnosti a sečteme pomocí vztahu
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

(a) $S = n + (n + 3) + (n + 6) + \cdots + 4n$

$$\begin{aligned} a_1 &= n & a_x &= a_1 + (x - 1)d \\ d &= 3 & 4n &= n + 3(x - 1) \\ a_x &= 4n & x &= n + 1 \\ a_{n+1} &= 4n \end{aligned}$$

$$S = \frac{(n + 1)(n + 4n)}{2} = \frac{5n(n + 1)}{2}$$

(b) $S = (-31) + (-27) + (-23) + \cdots + 29 + 33$

$$\begin{aligned} a_1 &= -31 & a_x &= a_1 + (x - 1)d \\ d &= 4 & 33 &= -31 + 4(x - 1) \\ a_x &= 33 & x &= 17 \\ a_{17} &= 33 \end{aligned}$$

$$S = \frac{17(-31 + 33)}{2} = 17$$

(c) $S = n + (n+2) + (n+4) + \cdots + 3n$

$$\begin{aligned} a_1 &= n & a_x &= a_1 + (x-1)d \\ d &= 2 & 3n &= n + 2(x-1) \\ a_x &= 3n & x &= n+1 \\ a_{n+1} &= 3n & & \end{aligned}$$

$$S = \frac{(n+1)(n+3n)}{2} = 2n(n+1)$$

(d) $S = (-8) + (-5) + (-2) + 1 + 4 + \cdots + (3n+1)$

$$\begin{aligned} a_1 &= -8 & a_x &= a_1 + (x-1)d \\ d &= 3 & 3n+1 &= -8 + 3(x-1) \\ a_x &= 3n+1 & x &= n+4 \\ a_{n+4} &= 3n+1 & & \end{aligned}$$

$$S = \frac{(n+4)(-8+3n+1)}{2} = \frac{(n+4)(3n-7)}{2}$$

(e) $S = (-5) + (-3) + (-1) + 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+5) + (2n+7)$

$$\begin{aligned} a_1 &= -5 & a_x &= a_1 + (x-1)d \\ d &= 2 & 2n+7 &= -5 + 2(x-1) \\ a_x &= 2n+7 & x &= n+7 \\ a_{n+7} &= 2n+7 & & \end{aligned}$$

$$S = \frac{(n+7)(-5+2n+7)}{2} = (n+7)(n+1)$$

Cvičení 5.15 *Sečtěte (každou variantu rozložte na dvě aritmetické posloupnosti):*

(a) $S = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n+1}n$

(b) $S = 1 - 2 + 4 - 4 + 7 - 6 + 10 - 8 \cdots + (3n-2) + (-1)^{2n+1}2n$

Řešení:

Obě dané posloupnosti můžeme rozdělit na dvě posloupnosti, každou z nich sečteme zvlášť a nakonec sečteme oba součty. Opět se budeme opírat o vzorec z předchozí úlohy.

(a) Posloupnost si rozdělíme do dvou posloupností tak, že v jedné posloupnosti budou všechny kladné členy a ve druhé všechny záporné. Abychom mohli určit poslední členy obou posloupností, musíme rozlišit případ, kdy bude n liché, respektive sudé.

Pro lichá n získáváme posloupnosti

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + 3 + 5 + \cdots + n \\ S_2 &= -2 - 4 - 6 - \ldots - (n-1), \end{aligned}$$

přičemž první z posloupností má $\frac{n+1}{2}$ členů, druhá má $\frac{n-1}{2}$ členů. Určeme součty posloupností.

$S_1 = \frac{(n+1)(1+n)}{4} = \frac{n^2+2n+1}{4}$ $\quad S_2 = \frac{(n-1)(-2-n+1)}{4} = \frac{-n^2+1}{4}$ $\quad S = \frac{n+1}{2}$

Pro sudé n získáváme posloupnosti

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (n-1) \\ S_2 &= -2 - 4 - 6 - \ldots - n, \end{aligned}$$

přičemž první z posloupností má $\frac{n}{2}$ členů, druhá má $\frac{n}{2}$ členů. Určeme součty posloupností.

$S_1 = \frac{n(1+n-1)}{4} = \frac{n^2}{4}$ $\quad S_2 = \frac{n(-2-n)}{4} = \frac{-n^2-2n}{4}$ $\quad S = -\frac{n}{2}$

Pro lichá n má posloupnost součet $S = \frac{n+1}{2}$, pro sudá n má součet $S = -\frac{n}{2}$.

(b) Posloupnost si rozdělíme stejně jako v předchozí variantě na dvě posloupnosti. Nyní však není nutné rozlišovat lichá a sudá n, pro obě by poslední člen každé posloupnosti dopadl stejně.

Pro všechna n dostáváme posloupnosti

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3n-2) \\ S_2 &= -2 - 4 - 6 - 8 - \ldots - 2n, \end{aligned}$$

přičemž každá z posloupností má n členů. Určeme součty posloupností.

$S_1 = \frac{n(1+3n-2)}{2} = \frac{3n^2-n}{2}$ $\quad S_2 = \frac{n(-2-2n)}{2} = \frac{-2n^2-2n}{2}$ $\quad S = \frac{n^2-3n}{2}$

Posloupnost má součet $S = \frac{n^2-3n}{2}$

Cvičení 5.16 *Sečtěte:*

(a) $S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$

(b) $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2^n}$

(c) $S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n+3}$

(d) $S = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{n+2}$

(e) $S = 1 + 4 + 16 + \cdots + 4^{n-2}$

Řešení:

V každé z posloupností vznikl další člen vynásobením předchozího členu určitou konstantou, kvocientem, jedná se tedy o geometrické posloupnosti. Součet prvních n členů geometrické posloupnosti můžeme ze znalosti prvního členu a kvocientu určit pomocí vztahu

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

(a) $S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$, posloupnost má n členů
$a_1 = 2$ $\quad q = 2$ $\quad S_n = 2\frac{1-2^n}{1-2} = 2(2^n - 1)$

(b) $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2^n}$, posloupnost má $n+1$ členů
$a_1 = 1 \qquad q = -\frac{1}{2} \qquad S_{n+1} = 1\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n+1}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

(c) $S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n+3}$, posloupnost má $n+4$ členů
$a_1 = 1 \qquad q = 2 \qquad S_{n+4} = 1\frac{1-2^{n+4}}{1-2} = 2^{n+4} - 1$

(d) $S = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{n+2}$, posloupnost má $n+3$ členů
$a_1 = 1 \qquad q = 3 \qquad S_{n+3} = 1\frac{1-3^{n+3}}{1-3} = \frac{3^{n+3}-1}{2}$

(e) $S = 1 + 4 + 16 + \cdots + 4^{n-2}$, posloupnost má $n-1$ členů
$a_1 = 1 \qquad q = 4 \qquad S_{n-1} = 1\frac{1-4^{n-1}}{1-4} = \frac{4^{n-1}-1}{3}$

Cvičení 5.17 *Sečtěte (každou variantu rozložte na aritmetickou a geometrickou posloupnost):*

(a) $S = 2 + 5 + 11 + \cdots + (3 \cdot 2^{n-1} - 1)$

(b) $S = 1 + 5 + 17 + \cdots + (2 \cdot 3^{n-1} - 1)$

Řešení:

Každou z posloupností můžeme rozdělit do dvou posloupností – jedna bude geometrická a druhá aritmetická. Posloupnosti sečteme zvlášť a výsledky k sobě přičteme. Opět se budeme opírat o vztahy pro součty prvních n členů geometrické a aritmetické posloupnosti.

(a) Posloupnost rozdělíme na geometrickou a aritmetickou následovně:

$$\begin{aligned} S_1 &= 3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1} \\ S_2 &= -1 - 1 - 1 - \ldots - 1 \end{aligned}$$

První posloupnost je geometrická, má n členů a $q = 2$, $S_1 = 3\frac{1-2^n}{1-2} = 3(2^n - 1)$.

Druhá posloupnost má také n členů, její součet je zřejmě $S_2 = -n$. Dohromady dostáváme součet celé posloupnosti.

$$S = S_1 + S_2 = 3(2^n - 1) - n$$

(b) Počítáme analogicky variantě (a).

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 2\frac{1-3^n}{1-3} = 3^n - 1 \\ S_2 &= -1 - 1 - 1 - \ldots - 1 = -n \\ S &= 3^n - n - 1 \end{aligned}$$