

MA0002 — 7. domácí úkol

Cvičení 7.1 Eukleidovým algoritmem najděte největšího společného dělitele následujících dvojic čísel:

(a) 240 a 264

(c) 391 a 10127

(b) 51 a 81

(d) 437 a 247

Cvičení 7.2 Uvedte, jaké zbytky po dělení 3, 4, 5, 6, 8 a 10 dávají druhé mocniny čísel 1 až 10. Výsledky přehledně запиšte, např. do tabulky:

dělitel:	3	4	5	6	8	10
1	1	1	1	1	1	1
4						
9						
16						
25						
36						
49	1	1	4	1	1	9
64						
81						
100						

Cvičení 7.3 Určete, pro které hodnoty $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10$ jsou následující výrazy (a) sudé, (b) liché:

(a) $n^2 - 4n + 3$

(b) $n^2 + 5n + 6$

(c) $n^2 - 1$

(d) $n^3 + 3n^2 - n - 3$

Zformulujte obecné pravidlo (např. „platí pro všechna n tvaru ...“)

Cvičení 7.4 Určete, pro které hodnoty $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10$ jsou následující výrazy dělitelné (a) 2, (b) 3, (c) 6:

(a) $\frac{n^2+n-2}{4}$

(c) $\frac{n^2+5n+6}{2}$

(b) $\frac{n^3-n}{6}$

(d) $\frac{2n^2-1}{2n+1}$

Cvičení 7.5 Dokažte:

- (a) Dává-li n po dělení 3 zbytek 1, pak n^2 dává po dělení 3 zbytek 1.
- (b) Výraz $n^3 - n$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ dělitelný 6.
- (c) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: n^2 dává po dělení 4 zbytek 1 právě tehdy, když n je liché.
- (d) Výraz $n^3 + 9n^2 + 26n + 24$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ dělitelný 6.

Cvičení 7.6 Dokažte, že pro každé dvouciferné přirozené číslo n obsahuje dekadický zápis čísla n^2 alespoň dvě různé cifry. (*) Dokažte, že tvrzení platí pro libovolné přirozené číslo $n > 3$.

[Rozčleňte si situaci podle cifry na místě jednotek.]

Cvičení 7.7 Najděte takové prvočíslo p , že i čísla $2p+1, 4p+1$ jsou prvočísla. (*) Najděte všechna taková prvočísla p .

[(*) Postupujte na základě výsledků u nejmenších prvočísel.]

Cvičení 7.8 Určete alespoň jedno přirozené číslo n , pro něž je číslo $46^n + 296 \cdot 13^n$ dělitelné číslem 1947. (*) Určete všechna taková n .

[Rozložte si 1947, 296 a 46 na prvočísla.]

Cvičení 7.9 Dokažte, že pro všechna přirozená n platí: $9|(10^n(9n-1)+1)$. (*) Dokažte, že pro všechna přirozená n platí: $81|(10^n(9n-1)+1)$.

Cvičení 7.10 Dokažte, že pro všechna přirozená n platí: $36|(2n^6 - n^4 - n^2)$.

[Rozložte mnohočlen $(2n^6 - n^4 - n^2)$ na lineární a kvadratické mnohočleny.]

Cvičení 7.11 Dokažte následující tvrzení:

- (a) Součet dvou lichých čísel je číslo sudé.
- (b) Součet dvou sudých čísel je číslo sudé.
- (c) Součin dvou lichých čísel je číslo liché.
- (d) Součet libovolných dvou celých čísel stejné parity je číslo sudé.
- (e) Součin dvou sudých čísel je číslo sudé.
- (f) Součin sudého čísla a libovolného celého čísla je číslo sudé.
- (g) Součet sudého počtu lichých čísel je číslo sudé.
- (h) Součin libovolného počtu lichých čísel je číslo liché.
- (i) Součin libovolného počtu celých čísel, z nichž aspoň jedno je sudé, je číslo sudé.

Vyslovte alespoň šest podobná tvrzení pro čísla, která dávají vhodné zbytky po dělení 3, 4, 5 a 6.