

MA0002 — řešení DÚ č. 7

Cvičení 7.1 Eukleidovým algoritmem najděte největšího společného dělitele následujících dvojic čísel:

(a) 240 a 264

(c) 391 a 10 127

(b) 51 a 81

(d) 437 a 247

Řešení:

(a) 240 a 264

(c) 391 a 10 127

$$264 = 1 \cdot 240 + 24$$

$$10\,127 = 25 \cdot 391 + 352$$

$$240 = 10 \cdot 24 + 0$$

$$391 = 1 \cdot 352 + 39$$

$$NSD(240; 264) = 24$$

$$352 = 9 \cdot 39 + 1$$

$$39 = 39 \cdot 1 + 0$$

(b) 51 a 81

$$NSD(391; 10\,127) = 1$$

$$81 = 1 \cdot 51 + 30$$

(d) 437 a 247

$$51 = 1 \cdot 30 + 21$$

$$437 = 1 \cdot 247 + 190$$

$$30 = 1 \cdot 21 + 9$$

$$247 = 1 \cdot 190 + 57$$

$$21 = 2 \cdot 9 + 3$$

$$190 = 3 \cdot 57 + 19$$

$$9 = 3 \cdot 3 + 0$$

$$57 = 3 \cdot 19 + 0$$

$$NSD(51; 81) = 3$$

$$NSD(437; 247) = 19$$

Cvičení 7.2 Uveďte, jaké zbytky po dělení 3, 4, 5, 6, 8 a 10 dávají druhé mocniny čísel 1 až 10. Výsledky přehledně zapište, např. do tabulky:

dělitel:	3	4	5	6	8	10
1	1	1	1	1	1	1
4	1	0	4	4	4	4
9	0	1	4	3	1	9
16	1	0	1	4	0	6
25	1	1	0	1	1	5
36	0	0	1	0	4	6
49	1	1	4	1	1	9
64	1	0	4	4	0	4
81	0	1	1	3	1	1
100	1	0	0	4	4	0

Cvičení 7.3 Určete, pro které hodnoty $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10$ jsou následující výrazy (a) sudé, (b) liché:

(a) $n^2 - 4n + 3$

(b) $n^2 + 5n + 6$

(c) $n^2 - 1$

(d) $n^3 + 3n^2 - n - 3$

Zformulujte obecné pravidlo (např. „platí pro všechna n tvaru ...“)

Řešení:

Vytvoříme si tabulku parity daných výrazů pro $1 \leq n \leq 10$. Poté zformulujeme ke každé variantě obecné pravidlo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^2 - 4n + 3$	S	L	S	L	S	L	S	L	S	L
$n^2 + 5n + 6$	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
$n^2 - 1$	S	L	S	L	S	L	S	L	S	L
$n^3 + 3n^2 - n - 3$	S	L	S	L	S	L	S	L	S	L

- (a) Určeme obecně paritu výrazu, lichá čísla označme L a sudá čísla S .
Platí: $L^2 - 4L + 3 = L - S + L = S$, $S^2 - 4S + 3 = S - S + L = L$.

Pro všechna n tvaru $2n, n \in \mathbb{N}$ je výraz lichý.

Pro všechna n tvaru $2n - 1, n \in \mathbb{N}$ je výraz sudý.

- (b) Postupujeme stejně jako v předchozí variantě.

Platí: $L^2 + 5L + 6 = L + L + S = S$, $S^2 + 5S + 6 = S + S + S = S$.

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je výraz sudý.

- (c) Postupujeme stejně jako v předchozích variantách.

Platí: $L^2 - 1 = L - L = S$, $S^2 - 1 = S - L = L$.

Pro všechna n tvaru $2n, n \in \mathbb{N}$ je výraz lichý.

Pro všechna n tvaru $2n - 1, n \in \mathbb{N}$ je výraz sudý.

(d) Postupujeme stejně jako v předchozích variantách.

$$\text{Platí: } L^3 + 3L^2 - L - 3 = L + L - L - L = S,$$

$$S^3 + 3S^2 - S - 3 = S + S - S - L = L.$$

Pro všechna n tvaru $2n, n \in \mathbb{N}$ je výraz lichý.

Pro všechna n tvaru $2n - 1, n \in \mathbb{N}$ je výraz sudý.

Cvičení 7.4 Určete, pro které hodnoty $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10$ jsou následující výrazy dělitelné (a) 2, (b) 3, (c) 6:

(a) $\frac{n^2+n-2}{4}$

(c) $\frac{n^2+5n+6}{2}$

(b) $\frac{n^3-n}{6}$

(d) $\frac{2n^2-1}{2n+1}$

Řešení:

Podobně jako v předchozím cvičení vytvoříme tabulku, nyní do ní však zapíšeme hodnoty výrazů po dosazení jednotlivých čísel a určíme dělitelnost každé hodnoty čísly 2, 3 a 6.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{n^2+n-2}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{18}{4}$	$\frac{28}{4}$	$\frac{40}{4}$	$\frac{54}{4}$	$\frac{70}{4}$	$\frac{98}{4}$	$\frac{108}{4}$
$\frac{n^3-n}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{24}{6}$	$\frac{60}{6}$	$\frac{120}{6}$	$\frac{210}{6}$	$\frac{336}{6}$	$\frac{504}{6}$	$\frac{720}{6}$	$\frac{990}{6}$
$\frac{n^2+5n+6}{2}$	$\frac{12}{2}$	$\frac{20}{2}$	$\frac{30}{2}$	$\frac{42}{2}$	$\frac{56}{2}$	$\frac{72}{2}$	$\frac{90}{2}$	$\frac{110}{2}$	$\frac{132}{2}$	$\frac{156}{2}$
$\frac{2n^2-1}{2n+1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{31}{9}$	$\frac{49}{11}$	$\frac{71}{13}$	$\frac{97}{15}$	$\frac{127}{17}$	$\frac{161}{19}$	$\frac{199}{21}$

(a) Pro výraz $\frac{n^2+n-2}{4}$ dle hodnot z tabulky platí:

(a) je dělitelný 2 pro $n \in \{1; 6; 9\}$

(b) je dělitelný 3 pro $n \in \{1; 10\}$

(c) je dělitelný 6 pro $n = 1$

(b) Pro výraz $\frac{n^3-n}{6}$ dle hodnot z tabulky platí:

(a) je dělitelný 2 pro $n \in \{1; 3; 4; 5; 7; 8; 9\}$

(b) je dělitelný 3 pro $n \in \{1; 8; 9; 10\}$

(c) je dělitelný 6 pro $n \in \{1; 8; 9\}$

(c) Pro výraz $\frac{n^2+5n+6}{2}$ dle hodnot z tabulky platí:

(a) je dělitelný 2 pro $n \in \{1; 2; 5; 6; 9; 10\}$

(b) je dělitelný 3 pro $n \in \{1; 3; 4; 6; 7; 9; 10\}$

(c) je dělitelný 6 pro $n \in \{1; 6; 9; 10\}$

(d) Pro výraz $\frac{2n^2-1}{2n+1}$ dle hodnot z tabulky platí:

(a) není dělitelný 2 pro žádné $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10$

(b) není dělitelný 3 pro žádné $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10$

(c) není dělitelný 6 pro žádné $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10$

Cvičení 7.5 *Dokažte:*

- (a) *Dává-li n po dělení 3 zbytek 1, pak n^2 dává po dělení 3 zbytek 1.*
- (b) *Výraz $n^3 - n$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ dělitelný 6.*
- (c) *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: n^2 dává po dělení 4 zbytek 1 právě tehdy, když n je liché.*
- (d) *Výraz $n^3 + 9n^2 + 26n + 24$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ dělitelný 6.*

Řešení:

- (a) Napišme si $n = 3k + 1, k \in \mathbb{N}_0$.
Po umocnění dostáváme $n^2 = 9k^2 + 6k + 1$, přičemž členy $9k^2; 6k$ jsou dělitelné třemi, proto je zbytek po dělení třemi 1.
- (b) Výraz $n^3 - n$ lze rozložit na součin $n(n-1)(n+1)$, tedy součin tři po sobě jdoucích čísel. Mezi třemi po sobě jdoucími čísly je jistě právě jedno dělitelné třemi a alespoň jedno dělitelné dvěma, dohromady je výraz dělitelný číslem 6.
- (c) Umocněme na druhou n tvaru $2k + 1, k \in \mathbb{N}_0$: $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, přičemž členy $4k^2; 4k$ jsou dělitelné 4, celý výraz $(2k + 1)^2$ proto dává po dělení 4 zbytek 1.
Jelikož je v zadání použita spojka „právě tehdy, když“, musíme ukázat, že pro jiná než lichá n neplatí, že n^2 dává po dělení 4 zbytek 1. Ověříme tedy situaci pro n tvaru $2k, k \in \mathbb{N}$: $(2k)^2 = 4k^2$, což je beze zbytku dělitelné 4.
- (d) Výraz $n^3 + 9n^2 + 26n + 24$ můžeme například pomocí Hornerova schématu rozložit na součin $(n+2)(n+3)(n+4)$, což jsou tři po sobě jdoucí čísla a ze stejného důvodu jako ve variantě (b) je celý výraz dělitelný číslem 6.

Cvičení 7.6 *Dokažte, že pro každé dvouciferné přirozené číslo n obsahuje dekadický zápis čísla n^2 alespoň dvě různé cifry. (*) Dokažte, že tvrzení platí pro libovolné přirozené číslo $n > 3$.*

Řešení:

Soustředme se na jednotky každého dvouciferného čísla. Například číslo s cifrou 1 na místě jednotek můžeme zapsat ve tvaru $10a + 1, a \in \{1; 2; \dots; 9\}$, jeho druhá mocnina je $(10a + 1)^2 = 100a^2 + 20a + 1$. Na místě desítek se nám nikdy nemůže objevit cifra jedna, protože pro jakékoli a má číslo $20a$ na místě jednotek cifru různou od jedné. Podobně budeme postupovat i pro další cifry na místě jednotek.

$(10a + 2)^2 = 100a^2 + 40a + 4$, na místě jednotek bude cifra 4. Abychom dostali cifru 4 i na místě desítek, muselo by $a \in \{1; 6\}$, ale $12^2 = 144, 62^2 = 3844$.

$(10a + 3)^2 = 100a^2 + 60a + 9$, na místě jednotek je cifra 9, kterou nemůžeme na místě desítek nikdy získat.

$(10a + 4)^2 = 100a^2 + 80a + 16 = 100a^2 + 10(8a + 1) + 6$, na místě jednotek je cifra 6, kterou nemůžeme na místě desítek nikdy získat.

$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100(a^2 + a) + 10 \cdot 2 + 5$, číslo zřejmě vždy končí 25.

$(10a + 6)^2 = 100a^2 + 120a + 36 = 100(a^2 + a) + 10(2a + 3) + 6$, na místě jednotek je cifra 6, kterou nemůžeme na místě desítek nikdy získat.

$(10a + 7)^2 = 100a^2 + 140a + 49 = 100(a^2 + a) + 10(4a + 4) + 9$, na místě jednotek je cifra 9, kterou nemůžeme na místě desítek nikdy získat.

$(10a + 8)^2 = 100a^2 + 160a + 64 = 100(a^2 + a) + 10(6a + 6) + 4$, na místě jednotek je cifra 4. Abychom dostali cifru 4 i na místě desítek, muselo by $a \in \{3; 8\}$, ale $38^2 = 1444$, $88^2 = 7744$.

$(10a + 9)^2 = 100a^2 + 180a + 81 = 100(a^2 + a) + 10(8a + 8) + 1$, na místě jednotek je cifra 1, kterou nemůžeme na místě desítek nikdy získat.

Pro dvouciferná čísla zakončená cifrou 0 je situace zřejmá.

Pro čísla $3 < n < 10$ dokážeme tvrzení snadno vypsáním jednotlivých mocnin: $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$. Pro čísla $n > 99$ se opřeme o konstrukci z hlavní části tohoto cvičení. Možnosti, u kterých nelze zajistit stejnou cifru už na místě desítek, můžeme rovnou vypustit, jelikož přidáním stovek, tisíců a dále se situace nezmění. Proto nyní uvažujeme pouze čísla $n > 99$ končící na dvojčíslí: 12, 62, 38 a 88. Utvořme si trojciferná čísla v podobném tvaru, jako jsme výše tvořili dvouciferná, a vylučme čísla, ve kterých se vytvoří různá cifra už na místě stovek.

$(100a + 12)^2 = 10000a^2 + 2400a + 144 = 10000a^2 + 1000 \cdot 2a + 100(4a + 1) + 44$, na místě desítek i jednotek je cifra 4, tu však na místě stovek nijak získat nemůžeme.

$(100a + 62)^2 = 10000a^2 + 12400a + 3844 = 10000(a^2 + a) + 1000(2a + 3) + 100(4a + 8) + 44$, na místě desítek i jednotek je cifra 4. Abychom dostali cifru 4 i na místě stovek, muselo by $a \in \{4; 9\}$, ale $462^2 = 213444$, $962^2 = 925444$.

$(100a + 38)^2 = 10000a^2 + 7600a + 1444 = 10000a^2 + 1000(7a + 1) + 100(6a + 4) + 44$, na místě desítek i jednotek je cifra 4. Abychom dostali cifru 4 i na místě stovek, muselo by být $a = 5$, ale $538^2 = 289444$.

$(100a + 88)^2 = 10000a^2 + 17600a + 7744 = 10000(a^2 + a) + 1000(7a + 7) + 100(6a + 7) + 44$, na místě desítek i jednotek je cifra 4, tu však na místě stovek nijak získat nemůžeme.

Podobně pokračujeme pro čtyřmístná čísla zakončená trojčíslími 462, 962 a 538.

$(1000a + 462)^2 = 1000000a^2 + 924000a + 213444 = 1000000a^2 + 100000(9a + 2) + 10000(2a + 1) + 1000(4a + 3) + 444$, na místě tisíců však 4 nijak získat nemůžeme.

$(1000a + 962)^2 = 1000000a^2 + 1924000a + 925444 = 1000000(a^2 + a) + 100000(9a + 9) + 10000(2a + 2) + 1000(4a + 5) + 444$, na místě tisíců však 4 nijak získat nemůžeme.

$(1000a + 538)^2 = 1000000a^2 + 1076000a + 289444 = 1000000(a^2 + a) + 100000 \cdot 2 + 10000(7a + 8) + 1000(6a + 9) + 444$, na místě tisíců však 4 nijak získat nemůžeme.

DOKÁZALI JSME, ŽE PRO KAŽDÉ PŘIROZENÉ ČÍSLO $n > 3$ OBSAHUJE DEKADICKÝ ZÁPIS ČÍSLA n^2 ALESPŇ DVĚ RŮZNÉ CIFRY.

Cvičení 7.7 Najděte takové prvočíslo p , že i čísla $2p + 1, 4p + 1$ jsou prvočísla. (*) Najděte všechna taková prvočísla p .

Řešení:

Sepišme si tabulku hodnot $p, 2p + 1, 4p + 1$ pro několik nejmenších prvočísel.

p	$2p + 1$	$4p + 1$
2	5	9
3	7	13
5	11	21
7	15	29
11	23	45

Mohli bychom pokračovat dál, ale už nyní je vidět jedno řešení $p = 3$. U dalších prvočísel je vždy jeden z výrazů $2p + 1, 4p + 1$ dělitelný třemi. Podívejme se tedy na prvočísla dávající různý zbytek po dělení třemi.

Začněme prvočíslu tvaru $p = 3k, k \in \mathbb{N}$, takové je zřejmě pouze prvočíslo $p = 3$, které, jak už víme, je vyhovující.

Pro prvočísla tvaru $p = 3k + 1, k \in \mathbb{N}_0$ platí: $2(3k + 1) + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$, $4(3k + 1) + 1 = 12k + 5$. Výraz $2p + 1$ je dělitelný třemi, proto nikdy nemůže být prvočíselný.

Pro prvočísla tvaru $p = 3k + 2, k \in \mathbb{N}_0$ platí: $2(3k + 2) + 1 = 6k + 5$, $4(3k + 2) + 1 = 12k + 9 = 3(4k + 3)$. Výraz $4p + 1$ je dělitelný třemi, proto nikdy nemůže být prvočíselný.

JEDINÝM VYHOVUJÍCÍM PRVOČÍSLEM JE $p = 3$.

Cvičení 7.8 Určete alespoň jedno přirozené číslo n , pro něž je číslo $46^n + 296 \cdot 13^n$ dělitelné číslem 1947. (*) Určete všechna taková n .

Řešení:

$$\begin{array}{l|l} 1947 & 46^n + 296 \cdot 13^n \\ 3 \cdot 11 \cdot 59 & 2^n \cdot 23^n + 2^3 \cdot 37 \cdot 13^n \end{array}$$

Protože jsou čísla 3, 11 a 59 nesoudělná, stačí nalézt taková n , po která je výraz dělitelný čísly 3, 11 i 59. Přitom využijeme skutečnosti, že můžeme libovolné číslo ve výrazu nahradit jiným číslem, které dává stejný zbytek po dělení postupně čísly 3, 11 a 59.

$$\begin{array}{l|l} 3 & 46^n + 296 \cdot 13^n \\ 3 & 1^n + 2 \cdot 1^n \\ 11 & 46^n + 296 \cdot 13^n \\ 11 & 2^n + 10 \cdot 2^n \\ 11 & 2^n(1 + 10) \\ 59 & 46^n + 296 \cdot 13^n \\ 59 & (-13)^n + 1 \cdot 13^n \\ 59 & (-1)^n 13^n + 13^n \\ 59 & 13^n((-1)^n + 1) \end{array}$$

Vidíme, že výraz je dělitelný čísly 3 a 11 pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Číslem 59 je výraz dělitelný pouze v případě, že bude závorka $((-1)^n + 1)$ rovna nule, tedy pouze pro lichá n .

PRO VŠECHNA LICHÁ PŘIROZENÁ ČÍSLA n JE VÝRAZ $46^n + 296 \cdot 13^n$ DĚLITELNÝ ČÍSLEM 1947.

Cvičení 7.9 Dokažte, že pro všechna přirozená n platí: $9|(10^n(9n-1)+1)$.
 (*) Dokažte, že pro všechna přirozená n platí: $81|(10^n(9n-1)+1)$.

Řešení:

$$\begin{aligned} 9 &| 10^n(9n-1)+1 \\ 9 &| (9+1)^n(9n-1)+1 \\ 9 &| \left(9^n + \binom{n}{1}9^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}9+1\right)(9n-1)+1 \\ 9 &| \left(9^n + \binom{n}{1}9^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-2}9^2\right)(9n-1) + \left(\binom{n}{n-1}9+1\right)(9n-1)+1 \\ 9 &| 81\left(9^{n-2} + \binom{n}{1}9^{n-3} + \dots + \binom{n}{n-2}1\right)(9n-1) + (9n+1)(9n-1)+1 \\ 9 &| 81\left(9^{n-2} + \binom{n}{1}9^{n-3} + \dots + \binom{n}{n-2}1\right)(9n-1) + 81n^2 - 1 + 1 \\ 9 &| 81\left(9^{n-2} + \binom{n}{1}9^{n-3} + \dots + \binom{n}{n-2}1\right)(9n-1) + 81n^2 \\ 9 &| 81\left[\left(9^{n-2} + \binom{n}{1}9^{n-3} + \dots + \binom{n}{n-2}1\right)(9n-1) + n^2\right] \end{aligned}$$

Výraz na pravé straně je dělitelný nejen číslem 9, ale i číslem 81.

Cvičení 7.10 Dokažte, že pro všechna přirozená n platí: $36|(2n^6 - n^4 - n^2)$.

Řešení:

$$\begin{aligned} 36 &| 2n^6 - n^4 - n^2 \\ 36 &| n^2(2n^4 - n^2 - 1) \\ 36 &| n^2(n^2 - 1)(2n^2 + 1) \\ 36 &| (n-1)n^2(n+1)(2n^2 + 1) \end{aligned}$$

Opět se nám objevuje součin tří po sobě jdoucích čísel $(n-1)n(n+1)$, z nichž je právě jedno dělitelné třemi a alespoň jedno dělitelné dvěma.

Je-li n dělitelné třemi, pak je celá pravá strana dělitelná devíti a zbývá pouze ověřit dělitelnost čtyřmi. Pokud je dělitelné třemi jedno z čísel $(n-1)$, $(n+1)$, musíme ověřit, že je dělitelný třemi i výraz $2n^2 + 1$.

$$n-1 = 3k, k \in \mathbb{N} : n = 3k+1, 2(3k+1)^2+1 = 18k^2+12k+3 = 3(6k^2+4k+1)$$

$$n+1 = 3k, k \in \mathbb{N} : n = 3k-1, 2(3k-1)^2+1 = 18k^2-12k+3 = 3(6k^2-4k+1)$$

Výraz $(2n^6 - n^4 - n^2)$ je dělitelný číslem 9.

Jsou-li dvě z čísel $(n-1)n(n+1)$ sudá, je jejich součin dělitelný čtyřmi. Je-li ovšem sudé pouze jedno z těchto čísel, musí se jednat o číslo n . To se ve výrazu vyskytuje ve druhé mocnině, proto je jistě celý výraz $(2n^6 - n^4 - n^2)$ dělitelný číslem 4.

DOKÁZALI JSME, ŽE VÝRAZ $(2n^6 - n^4 - n^2)$ JE DĚLITELNÝ ČÍSLEM 36.