MA0002 — řešení DÚ č. 11

Cvičení 11.1 *Potřebujeme převézt přes řeku kozu, vlka a zelí v loďce, která uveze pouze převozníka a jednu z „věcí“. Jak to můžeme udělat, aby vlk nesežral kozu a koza zelí?*

Řešení:

Velice známá úloha s množstvím obměn lze řešit dle následující tabulky, kde vlk je značen V, koza K a zelí Z:

1. břeh	loď	2. břeh
VZ	→ K	–
VZ	←	K
V	→ Z	K
V	← K	Z
K	→ V	Z
K	←	VZ
–	→ K	VZ

Cvičení 11.2 *Máme plnou 12 l nádobu a dvě prázdné nádoby – 7 l a 4 l. Přeléváním rozdělte vodu tak, aby ve dvou nádobách bylo 6 l vody.*

Řeešení:

Řešení je opět zadáno tabulkou objemů tekutiny v nádobách, v záhlaví jsou uvedeny objemy nádob.

12 l	7 l	4 l
12	–	–
5	7	–
5	3	4
9	3	–
9	–	3
2	7	3
2	6	4
6	6	–

Cvičení 11.3 *(*) Adam, Bedřich a Cyril mají skleničky s obsahem 5 dl, 3 dl a 2 dl. Na začátku jsou v Adamově skleničce 4 dl, zbylé dvě jsou prázdné. Jak je potřeba přelít víno tak, aby Adam měl ve své skleničce 2 dl a Bedřich a Cyril každý 1 dl?*

Řešení:

Tuto úlohu je možné vyřešit pouze za předpokladu, že si Adam s Cyrilem vymění skleničky, pokud bychom totiž získali 2 dl vína v Adamově skleničce, nejsme schopni rozlít Bedřichovi a Cyrilovi po 1 dl. Řešení s vyměněnými skleničkami je následující:

Adam (5 dl)	**Bedřich (3 dl)**	**Cyril (2 dl)**
4	–	–
1	3	–
1	1	2

Cvičení 11.4 *Tři misionáři a tři lidožrouti se potřebují přepravit přes řeku na dvoumístné loďce. Je nežádoucí, aby se na některém břehu ocitlo více lidožroutů než misionářů. Loďka sama nepopluje. Zorganizujte přepravu.*

Řešení:

Vycházíme ze skutečnosti, že na lodi nejsou lidožrouti sami sobě nebezpeční, protože musí pádlovat (mohou spolu plout i dva lidožrouti). Řešení je znázorněno v tabulce.

1. břeh	**loď**	**2. břeh**
MMLL	→ ML	–
MMLL	← L	M
MML	→ LL	M
MML	← L	ML
ML	→ ML	ML
ML	← L	MML
M	→ LL	MML
M	← L	MMLL
–	→ ML	MMLL

Cvičení 11.5 *Manželé Adamcovi byli na večírku s dalšími třemi manželskými páry. Zdravili se podáním ruky. Nikdo nepodal ruku sám sobě, svému partnerovi ani víckrát téže osobě. Když to skončilo, tak se pan Adamec zeptal, kolikrát kdo podal ruku. Od každého dostal jinou odpověď. Kolika lidem podala ruku paní Adamcová?*

Řešení:

Na večírku jsou čtyři páry, jestliže si nikdo nepodal ruku se svým partnerem, mohl každý podat ruku nejvýše šesti lidem. Pan Adamec získal 7 různých odpovědí, musely to být odpovědi $0, 1, \ldots 6$.

Osoba X_1 si potřásla rukou s 6 osobami a nepotřásla si rukou pouze se svým doprovodem X_2. Jelikož si všichni kromě X_2 potřásli rukou s X_1, pouze osoba X_2 mohla panu Adamcovi odpovědět, že si s nikým rukou nepotřásla. Tím máme vysvětlenou zelenou část obrázku níže, body X_1, X_2 už s žádnými dalšími propojovat nebudeme.

Nazvěme Y_1 osobu, která si potřásla rukou s 5 přáteli. Nemohla si potřást rukou s X_2 ani se svým doprovodem Y_2, se všemi ostatními si rukou potřásla, což máme v obrázku vyznačeno oranžovou barvou. Všechny osoby mimo X_1, X_2, Y_1, Y_2 si již podle obrázku podali ruku právě se dvěma osobami, proto jedině osoba Y_2, mohla říci, že podala ruku pouze jedné osobě. Tím máme vysvětlenou i oranžovou část obrázku.

Dále si pojmenujme osobu jež přivítala 4 přátele Z_1. Ta si musela potřást rukou ještě se dvěma ze zbývajících tří osob – osoba, se kterou si rukou nepotřásla, musí být její doprovod Z_2. Zbývá nám tedy osoba Z_2, která uvítala 2 přátele, a dvě zbylé osoby, které obě uvítali právě 3 přátele. Protože panu Adamcovi odpověděl každý jinak, musí být právě zbývající dvě osoby Adamcovi.

PANÍ ADAMCOVÁ PODALA RUKU 3 OSOBÁM.

Cvičení 11.6 *(*) Sedm kamarádů se před prázdninami dohodlo, že každý pošle pohled 3 kamarádům tak, aby každý poslal pohled tomu, od kterého pohled dostal nebo dostane. Navrhněte, kdo bude komu posílat pohlednice, aby byla podmínka splněna.*

Řešení:

Když každý pošle 3 pohledy, bude dohromady odesláno $7 \cdot 3 = 21$ pohledů. Odešle-li osoba A pohled osobě B, musí i osoba B odeslat pohled osobě A. Proto je počet „poštovních tras“ roven polovině poslaných pohledů, to však není možné.

PLÁN SEDMI KAMARÁDŮ NELZE USKUTEČNIT.

Cvičení 11.7 *V klubu hádankářů mají deset pater. Ve výtahu jsou tlačítka* $+3; -4; :2$.

(a) *Lze se z libovolného patra dostat do jiného libovolného patra?*

(b) *Kolikrát zmáčkneme knoflík pro cestu z pátého do devátého patra?*

Řešení:

(a) Abychom zajistili možnost dostat se z libovolného patra do jiného libovolného patra, stačí vytvořit posloupnost pater začínající i končící stejným patrem, v níž získáme pomocí operací na tlačítkách všechna patra od 1 do 10 (vytvoříme „kružnici“, po které se můžeme dostat z jakéhokoli bodu do jakéhokoli bodu). Začněme například v prvním patře:
$\mathbf{1} + 3 \to \mathbf{4} : 2 \to \mathbf{2} + 3 \to \mathbf{5} + 3 \to \mathbf{8} : 2 \to \mathbf{4} + 3 \to \mathbf{7} + 3 \to \mathbf{10} - 4 \to \mathbf{6} : 2 \to \mathbf{3} + 3 \to \mathbf{6} + 3 \to \mathbf{9} - 4 \to \mathbf{5} - 4 \to \mathbf{1}$

Z LIBOVOLNÉHO PATRA SE LZE DOSTAT DO JINÉHO LIBOVOLNÉHO PATRA.

(b) Využijeme vytvořené posloupnosti, přičemž z šestého patra budeme cestovat rovnou do devátého patra.
$\mathbf{5} + 3 \to \mathbf{8} : 2 \to \mathbf{4} + 3 \to \mathbf{7} + 3 \to \mathbf{10} - 4 \to \mathbf{6} + 3 \to \mathbf{9}$

Z PÁTÉHO DO DEVÁTÉHO PATRA SE LZE DOSTAT POMOCÍ ŠESTI STISKNUTÍ TLAČÍTEK.

Cvičení 11.8 *(*) Hostitel pořádá každý den v týdnu večeři pro své přátele. Každý den pozve tři hosty. Jak může během týdne pozvat svých (a) 7; (b) 15 přátel tak, aby se každí dva z nich potkali alespoň jednou, případně právě jednou?*

Řešení:

(a) Pojmenujme si hosty Aleš, Bára, Cecil, Dana, Emil, Fábio a Gabriela (dále budeme užívat pouze jejich počáteční písmena). Hosty můžeme pozvat například podle tabulky níže, kdy se každý host s každým potká právě jednou.

Po	**Út**	**St**	**Čt**	**Pá**	**So**	**Ne**
A	A	A	B	C	B	C
B	D	F	D	E	E	D
C	E	G	F	F	G	G

(b) K hostům pozvaným z předchozí varianty ještě přidáme Helenu, Ivana, Janu, Karla, Ludmilu, Marka, Nikolu a Ondru. Jelikož v předchozí variantě bylo o 8 osob méně a podařilo se nám je sezvat takovým způsobem, že se každý s každým potkal právě jednou (kdyby se někteří potkali více než jednou, jiní by se nepotkali vůbec), je jen logické, že se nám to u 15 osob nepodaří. Pokud bychom se problémem zabývali hlouběji, došli bychom k závěru, že právě jednou by se každý s každým potkal v případě, že by byl hostitel extrémně pohostinný a zval by trojice hostů celý týden na 5 jídel denně.